Zwei-Körper Problem mit Zentralkräften

Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}_S}_{\text{Schwerpunkts-drehimpuls}} + \underbrace{\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}}_{\text{Drehimpuls der Relativbewegung}}$$

Reduzierte Masse: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Im Schwerpunktsystem $\vec{R} = \vec{0}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}_{rel} = \text{const}$$

wähle $\vec{L} \parallel z$-Richtung:

$\Rightarrow$ $\vec{r}, \vec{p}, \dot{\vec{r}}$ liegen in xy-Ebene, d.h.

die Bahnkurve liegt in xy-Ebene

$\Rightarrow$ d.h. Drehimpulserhaltung ($\vec{L} = \text{const.}$) resultiert in einer ebenen Bewegung!

Zurück zur Kepler-Bewegung:

Wir wissen bereits: hier gilt Energieerhaltung

und Drehimpulserhaltung!

Was sagt uns das über die resultierende Bewegung / Bahnkurve?

Wähle Polarkoordinaten r und φ

$$r_x(t) = r(t)\cos\varphi(t) \qquad \dot r_x(t) = \dot r(t)\cos\varphi(t) - r\dot\varphi\sin\varphi(t)$$

$$r_y(t) = r(t)\sin\varphi(t) \qquad \dot r_y = \dot r(t)\sin\varphi(t) + r\dot\varphi\cos\varphi(t)$$

einsetzen in $|\vec L|$: da $|\vec L| = \text{const}$, wähle $|\vec L| = L_z$

$$|\vec L| = L_z = \mu(\vec r \times \dot{\vec r})_z = \mu(r_x \dot r_y - r_y \dot r_x)$$

$$= \mu\left[\cancel{r\cos\varphi\,\dot r\sin\varphi} + r^2\dot\varphi\cos^2\varphi - \cancel{r\sin\varphi\,\dot r\cos\varphi} + r^2\dot\varphi\sin^2\varphi\right]$$

$$= \mu r^2\dot\varphi\left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right] = \mu r^2(t)\dot\varphi(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot\varphi(t) = \frac{|\vec L|}{\mu r^2(t)}$$

Energieerhaltung anwenden:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = T + V = \text{const.}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r) = \text{const}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

Wegen Drehimpulserhaltung ist $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}$ bekannt!

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{\substack{\text{kin. Energie}\\ \text{der radialen}\\ \text{Bewegung}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}_{\substack{\text{Zentrifugal-}\\ \text{potential}}} + \underbrace{V(r)}_{\substack{\text{Wechselwirkungspotential}\\ \text{hier: Gravitationspotential}}} = \text{const}$$

$$U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

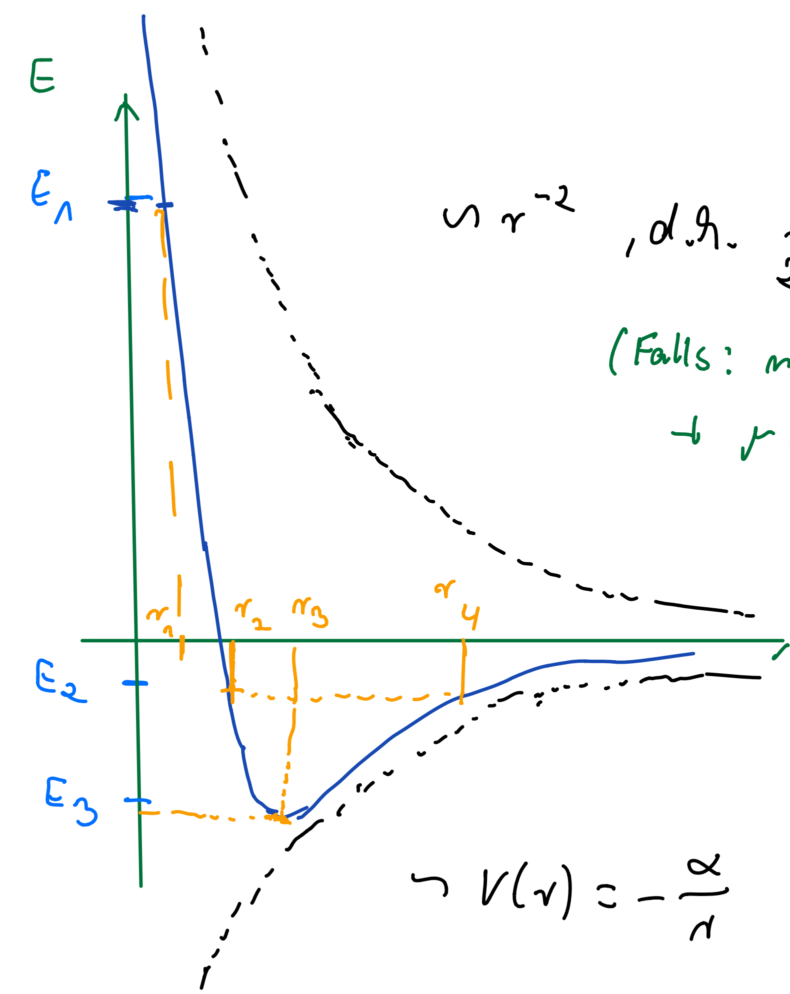
effektives Potential

Bewegung der reduzierten Masse μ im effektiven Potential U:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2(t) + U(r)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\mu \dot{r}^2(t)}{2} = E - U(r)} \Rightarrow$$ radiale Bewegung des Systems!

Wie sieht das Potential $U(r)$ aus?



(Falls: $m_1 = m_{Sonne}$ $m_2 = m_{Erde}$
$\Rightarrow \mu \approx m_{Erde}$)

r ist Relativkoord., d.h. der Abstand der Massen längs der Kraftwirkung!

Wie sieht nun die Bewegung für die drei Energien E_1, E_2 und E_3 aus?

a) $E = E_1 > 0$:

b) $E_3 \leq E \leq E_2 < 0$:

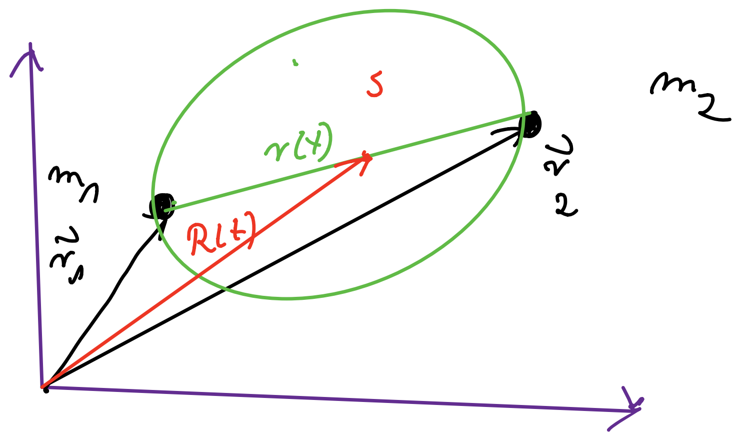
c) $E = E_3$:

Nebenrechnung:

Beispiele:

a) Sonne – Planet (μ = kleinere Masse): Planet kreist entweder ellipsenförmig oder fast kreisförmig um die Sonne

b) Doppelsterne ($\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$): radiale Bewegung der Sterne bewegt sich ellipsenförmig (kreisförmig) um den Schwerpunkt der Sterne



Zusammenfassung:

- Bewegung solcher Zwei-Körper Systeme kann immer in Bewegung des Schwerpunktes $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$

  und des Relativvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ zerlegt werden.

- Ohne äußere Kräfte führt der Schwerpunkt $\vec{R}$ eine gleichförmige (d.h. $\ddot{\vec{R}} = 0$) durch.

- Die Relativbewegung zweier Massen m_1 und m_2 entspricht der Bewegung einer reduzierten Masse μ $\hat{=}$ äquivalent zum Einteilchensystem!

- Bei Zentralkräften gilt Drehimpuls-erhaltung und die Bewegung findet in einer Ebene statt.