

hiermal Kosinussatz anwenden, um $\cos \alpha$ zu ersetzen:

$$R^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \alpha$$

$$\text{d.h.} \quad \cos \alpha = \frac{r^2 + x^2 - R^2}{2rx}$$

einsetzen:

$$dg_x = -\gamma \frac{M}{2} \frac{1}{xR} \frac{r^2 + x^2 - R^2}{2rx} dr$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \frac{r^2 + x^2 - R^2}{r^2} dr$$

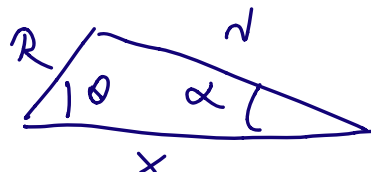
$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left(1 + \frac{x^2 - R^2}{r^2} \right) dr$$

Fall 1) noch:

Integration von dr : Fallunterscheidung nötig

1. Fall: P liegt außerhalb der Hohlkugel,

d.h. $x > R$:



$$r \in [\underbrace{x-R}, \underbrace{x+R}]$$

$$\text{bei } \theta = 0 \quad \text{bei } \theta = \pi$$

$$g_x = -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \int_{x-R}^{x+R} \left(1 + \frac{(x-R)(x+R)}{r^2} \right) dr$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left[r - \frac{(x-R)(x+R)}{r} \right]_{x-R}^{x+R}$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left[\overbrace{(x+R) - (x-R) - (x-R) + (x+R)}^{4R} \right]$$

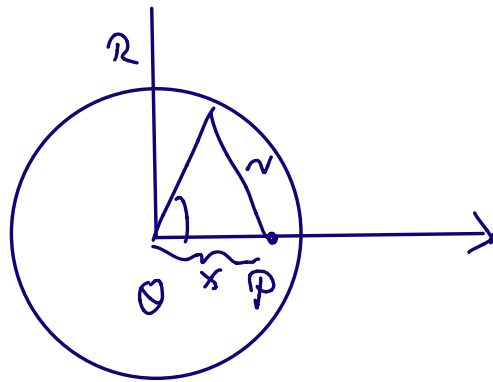
$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} 4R = -\gamma \frac{M}{x^2} \quad \text{für } x > R$$

2. Fall: P liegt innerhalb der Hohlkugel

$$\text{d.h. } x < R$$

$$r \in [R-x, R+x]$$

$$= \vartheta = 0'' \quad = \vartheta = \pi''$$



$$g_x = -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \int_{R-x}^{R+x} \left(1 + \frac{(x+R)(x-R)}{r^2} \right) dr$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left[r - \frac{(x+R)(x-R)}{r} \right]_{R-x}^{R+x}$$

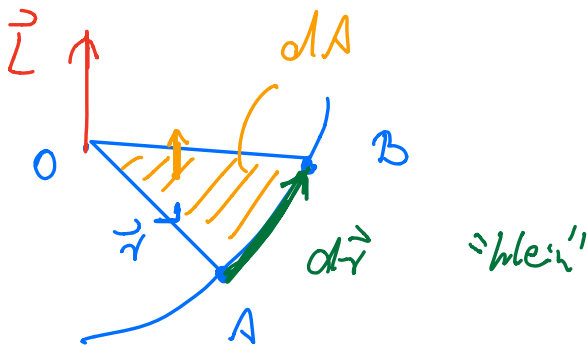
$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left[(R+x) - (R-x) - (x-R) - (x+R) \right]$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} < 0$$

$$\Rightarrow g_x < 0 \quad \text{für } x < R$$

2.2 Das Kepler-Problem und Drehimpulserhaltung

2. Kepler'sches Gesetz: Ein von der Sonne zum Planeten überzogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.



Fläche OAB : $\Delta \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \Delta \vec{r}$

$$\Rightarrow d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$$

Fläche pro Zeiteinheit :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{Geschwindigkeit}}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

Falls das Flächengesetz gültig ist:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \vec{v} = \text{const.}$$

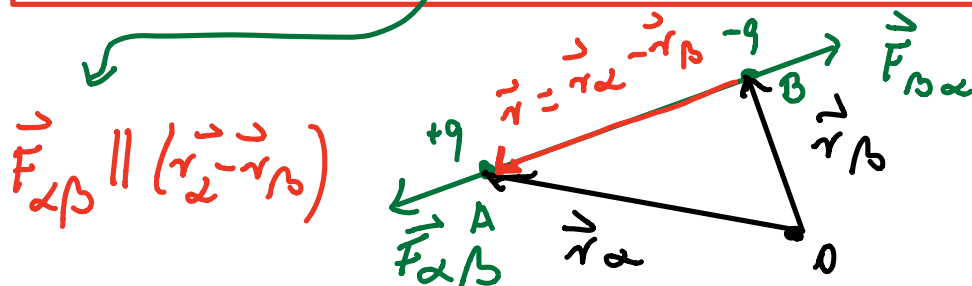
$\Rightarrow$ Drehimpuls des Teilchens:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \text{const.}$$

Das Flächengesetz beinhaltet, daß der Drehimpuls erhalten ist!

$\Rightarrow$ Allgemeiner Erhaltungssatz:

Wenn es sich bei den wirkenden Kräften um Zentralkräfte handelt, ist der Drehimpuls erhalten!

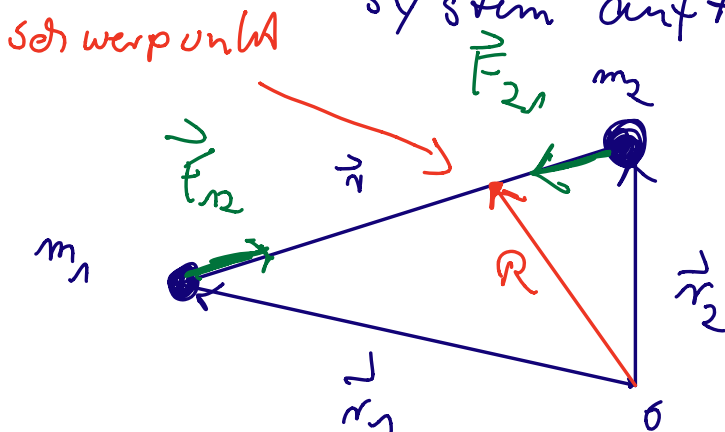


Zwei-Körper Problem mit Zentralkräften

Idee: Zwei-Körper System als ein System betrachten

Wie soll das gehen?

⇒ System in Schwerpunkts- und Relativsystem aufteilen



Gesamtmasse einführen: $M = m_1 + m_2 = \sum_{i=1}^2 m_i$

Schwerpunktsystem:

$$\text{Ortsvektor } \vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (*)$$

⇒ Schwerpunktsystem bei $\vec{R} = \vec{0}$

Gesamtimpuls: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2$

Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$

Gesamt kraft: $\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$

$$\vec{F}_{12} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_{12}$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2$$

In Schwerpunkts koordinaten: $M \ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ (*)

Relativ koordinaten einführen: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Wie bekommt man die Relativ bewegung?

$$\vec{F}_{12} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \quad | \cdot m_2$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \quad | \cdot m_1$$

actio = reactio
 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Differenz nehmen:

$$m_2 \vec{F}_{12} - m_1 \vec{F}_{21} = m_2 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2$$

$$(m_1 + m_2) \vec{F}_{12} = m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}$$

$$M \vec{F}_{12} = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\vec{r}} = \mu \ddot{\vec{r}}$$

reduzierte Masse

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Spezialfälle: $m_1 = m_2 = m \rightarrow \mu = \frac{m}{2}$

$$m_1 \gg m_2 \rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}$$

Taylor

$$\approx \frac{m_1 m_2}{m_2} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \approx m_1$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}_S}_{\text{Schwerpunkt's - Drehimpuls}} + \underbrace{\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}}_{\text{Drehimpuls der Relativbewegung}}$$

Test:

Im Schwerpunktsystem: $\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{\dot{r}} = \vec{r} \times \vec{p}_{\text{rel}} = \text{const.}$$

Wähle $\vec{L} \parallel z$ -Richtung:

$\Rightarrow \vec{r}, \vec{p}, \vec{\dot{r}}$ liegen in xy -Ebene, d.h.
die Bahnkurve liegt in xy -Ebene

$\Rightarrow$ d.h. Drehimpulserhaltung ($\vec{L} = \text{const.}$)
resultiert in einer ebenen Bewegung!

Zurück zum Kepler-Bewegung: