$$\Rightarrow g_x = -\gamma M \frac{1}{x_0^2 - (L/2)^2}$$

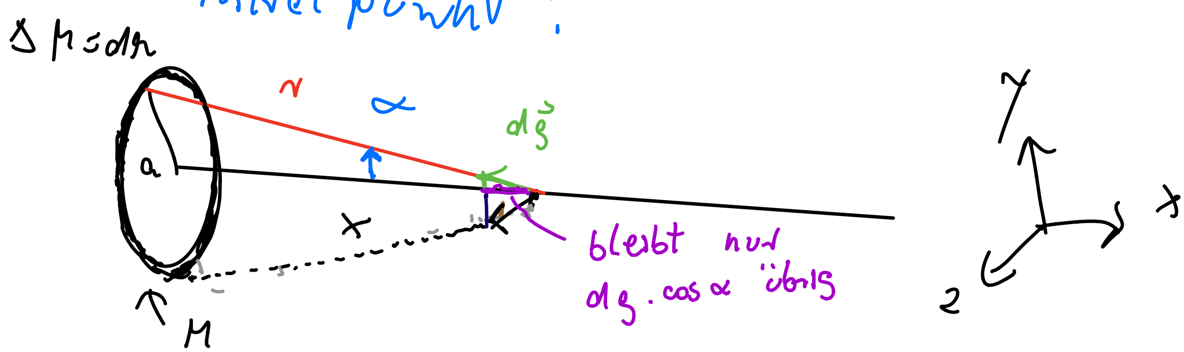
Da x_0 beliebig: $\vec{g} = -\gamma M \frac{1}{x^2 - (\frac{L}{2})^2} \vec{e}_x$

Test: Im weit entferntesten Gebiet, sieht Stab wie Punkt aus

$\Rightarrow x \gg L/2 \Rightarrow \vec{g} = -\gamma M \frac{1}{x^2} \vec{e}_x$ passt ✓

2. Gravitationsfeld eines massiven Ringes

Frage: Wie ist das Gravitationsfeld eines massiven Ringes der Masse M entlang einer senkrechten Achse durch den Mittelpunkt?



• Wähle dM aus und integriere entlang des Rings

→ Symmetrie: nur Komponenten längs x-Achse bleiben übrig!

Wir erhalten: $dg = -\gamma \frac{dM}{r^2}$

$\Downarrow$

wegen Symmetrie: $dg_x = dg \cos\alpha = -\gamma \frac{dM}{r^2} \cos\alpha$

• Integration: $g_{total} = g_x = -\int \gamma \frac{\cos\alpha}{r^2} \, dM$

• dM parametrisieren: da jedoch r und α für alle Punkte des Ringes gleich sind:

$\Rightarrow \quad g_x = -\gamma \frac{\cos\alpha}{r^2} \int dM = -\gamma \frac{\cos\alpha}{r^2} M$, wobei $M = \int_0^M dM$

Mit $r^2 = a^2 + x^2$:

$$\Rightarrow \boxed{g_x = -\gamma \frac{\cos\alpha \, M}{a^2 + x^2}}$$

Test: In weiter Entfernung, d.h. $x \gg a$ gilt:

$$g_x = -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{a^2+x^2} \overset{x\gg a}{=} -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{x^2} \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{a}{x}\right)^2+1}}$$

Taylor-Entwicklung: $\frac{1}{1+y} \sim 1-y \quad , y<1$
(ableiten oder Formelsammlung)

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y} = (1+y)^{-1} \approx 1 - y + \ldots$$

bei uns: $y = \frac{a}{x}$ ist kleiner 1!

$$\Rightarrow g_x = -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{x^2} \frac{1}{\left(\frac{a}{x}\right)^2+1} \approx -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{x^2} \left(1 - \underbrace{\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right)$$

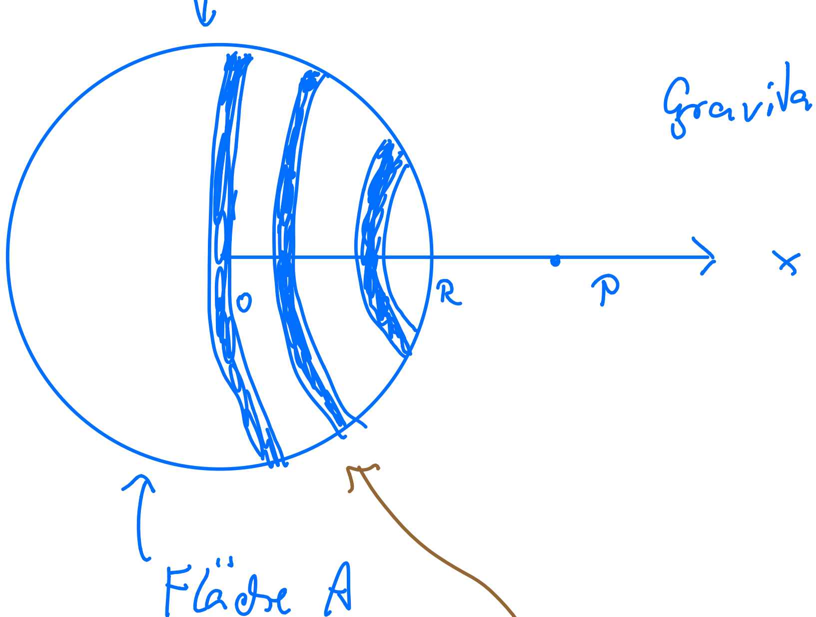
da sehr klein, weglassen

$$\approx -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{x^2}$$

Feld des Ringes sieht im weit entfernten wie ein Punkt der Masse M aus ✓ macht Sinn

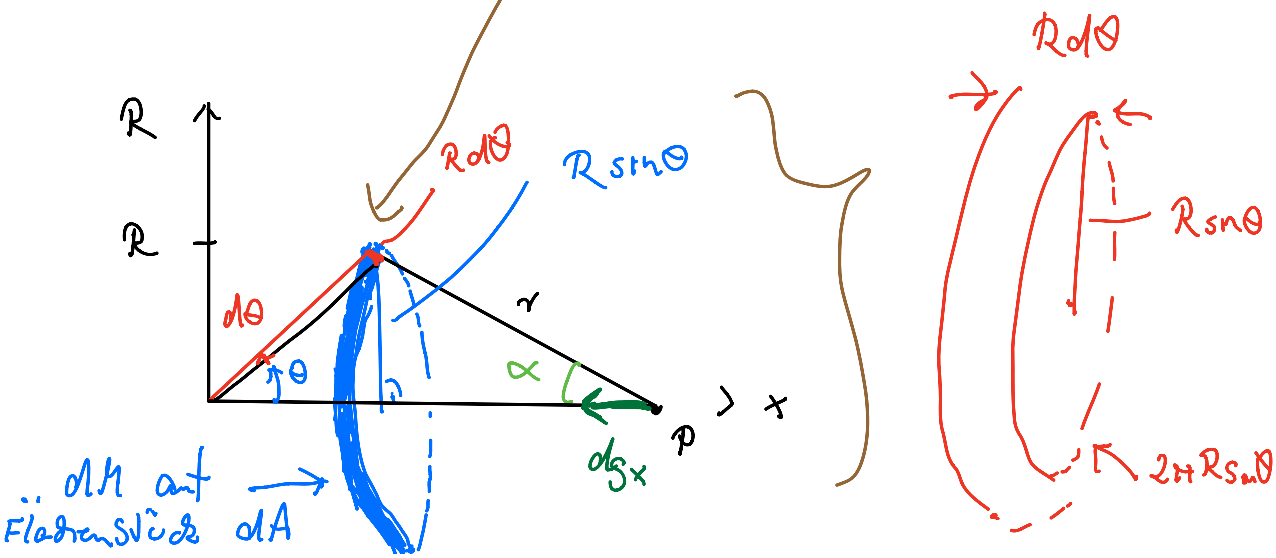
3. Gravitationsfeld einer Hohlkugel

Hohlkugel Masse M (Christbaumkugel) mit Radius R



Gravitationsfeld längs der x-Achse bestimmen!

Idee: Setze Hohlkugel aus Streifen von Ringen zusammen!



$\Rightarrow$ d.h. die Gravitationsfelder der Hohlkugel kann man direkt aus dem vorherigen Beispiel übernehmen!

- Wegen der Symmetrie bleibt wieder nur das Feld in x-Richtung übrig:

$$dg_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bsp. 2}}}{=} -\gamma \frac{\cos\alpha}{r^2}\, dM$$

- Parametrisierung von dM:
Gesamte Kugelschale hat die Masse M gleichmäßig verteilt auf die Fläche $A = 4\pi R^2$

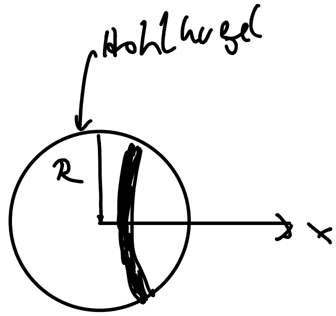
$$dM = \frac{M}{A}\, dA = \frac{M}{4\pi R^2}\, dA = \frac{M}{4\pi R^2}\, (2\pi R \sin\theta)\, R\, d\theta$$

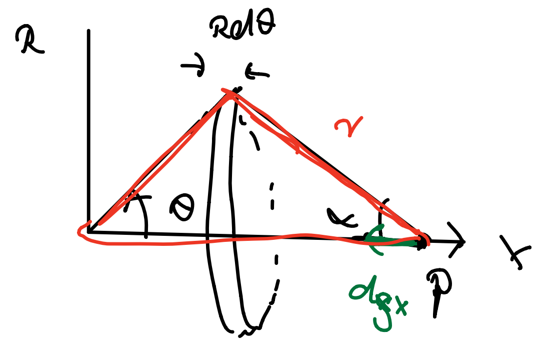
$$= \frac{1}{2} M \sin\theta\, d\theta$$

$\Rightarrow$ einsetzen in g_x: $dg_x = -\gamma \frac{\cos\alpha}{r^2} \frac{M}{2} \sin\theta\, d\theta \quad (*)$

Fehlt noch: r bestimmen

→ In diesem Fall hängen r, θ, α voneinander ab

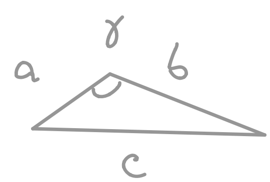




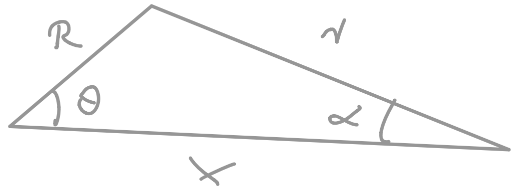
→ Drücke α (oder $\cos\alpha$) als Funktion von r und θ aus!

→ Kosinussatz benutzen!

Einschub: Kosinussatz



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



$$\Rightarrow \boxed{r^2 = R^2 + x^2 - 2xR\cos\theta}$$

Wie verändert sich r mit θ? → Kettenregel benutzen

Linke Seite ableiten nach dr: $2r\,dr$

rechte Seite ableiten nach $d\theta$: $2xR\sin\theta\,d\theta$

gleichsetzen: $\cancel{2}r\,dr = \cancel{2}xR\sin\theta\,d\theta$

$$\frac{r}{Rx}\,dr = \sin\theta\,d\theta$$

(Kettenregel für || || benutzen:

$$f(\theta) = R^2 + x^2 - 2xR\cos\theta$$

$$f'(\theta) = \frac{df}{d\theta} = 2xR\sin\theta$$

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{df}{dr}\,\frac{dr}{d\theta} \overset{f=r^2}{=} \frac{d(r^2)}{dr}\,\frac{dr}{d\theta} = 2r\,\frac{dr}{d\theta} = 2xR\sin\theta \;)$$

→ in (*) einsetzen: $\sin\theta\,d\theta = \frac{r}{xR}\,dr$

$$dg_x = -\gamma\,\frac{\cos\alpha}{r^{\cancel{2}}}\,\frac{M}{2}\,\frac{\cancel{r}}{xR}\,dr$$

$$= -\gamma\,\frac{M}{2}\,\frac{1}{xR}\,\frac{\cos\alpha}{r}\,dr$$

nochmal Kosinussatz anwenden, um $\cos\alpha$ zu ersetzen:

$$R^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\alpha$$

d.h. $$\cos\alpha = \frac{r^2+x^2-R^2}{2rx}$$

einsetzen:

$$dg_x = -\gamma \frac{M}{2} \frac{1}{xR} \frac{r^2+x^2-R^2}{2r^2x}\, dr$$

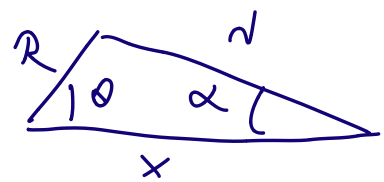
$$= -\gamma \frac{M}{4x^2R} \frac{r^2+x^2-R^2}{r^2}\, dr$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2R} \left(1 + \frac{x^2-R^2}{r^2}\right) dr$$

Integration von dr: Fallunterscheidung nötig

1. Fall: P liegt außerhalb der Hohlkugel,

d.h. $x > R$:



$$r \in [\underbrace{x-R}_{\text{bei } \theta=0},\ \underbrace{x+R}_{\text{bei } \theta=\pi}]$$

$$g_x = -\gamma \frac{M}{4x^2R} \int_{x-R}^{x+R} \left(1 + \frac{(x-R)(x+R)}{r^2}\right) dr$$

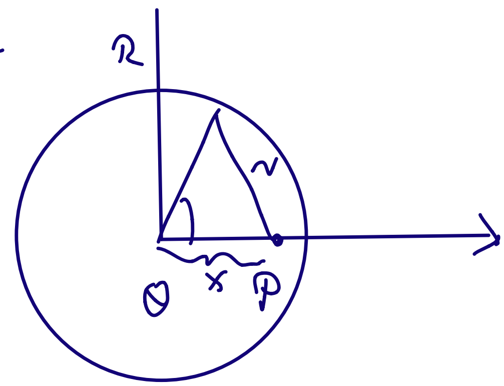
$$= -\gamma \frac{M}{4x^2R} \left[r - \frac{(x-R)(x+R)}{r} \right]_{x-R}^{x+R}$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2R} \left[\overbrace{(x+R)-(x-R)-(x-R)+(x+R)}^{4R} \right]$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2R} 4R = -\gamma \frac{M}{x^2} \quad \text{für } x > R$$

2. Fall: P liegt innerhalb der Hohlkugel

d.h. $x < R$



$r \in [R-x, R+x]$

"$\theta = 0$" "$\theta = \pi$"

$$g_x = -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \int_{R-x}^{R+x} \left(1 + \frac{(x+R)(x-R)}{r^2}\right) dr$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left[r - \frac{(x+R)(x-R)}{r} \right]_{R-x}^{R+x}$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} \left[(R+x) - (R-x) - (x-R) - (x+R) \right]$$

$$= -\gamma \frac{M}{4x^2 R} = 0$$

$\Rightarrow g_x = 0$ für $x < R$