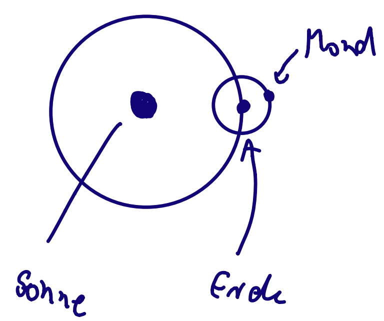
Gravitationsgesetz: $F_G \sim \frac{1}{r^2}$



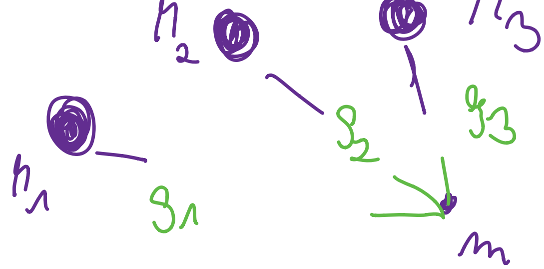
Wir machen einen Test:

- der Mond erfährt eine Zentripetalbeschleunigung.
- wie groß ist diese verglichen mit der Erdbeschleunigung?
- vergleichen Sie die zugehörigen Bahnradien.

→ Wie verhalten sich die Beschleunigungen zu den Bahnradien?

Übergang zu Mehrteilchensystemen

Nun: falls statt eines Teilchens → mehrere Massen!



→ gesamtes Gravitationsfeld, das auf m wirkt:

$$\vec{g}_{total} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \ldots$$

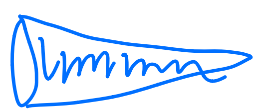
→ gesamtes Gravitationspotential:

$$\phi_{total} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \ldots$$

Tipler 11.4

Wie berechnet man das Gravitationsfeld von ausgedehnten Körpern?

z.B. massiver Stab 

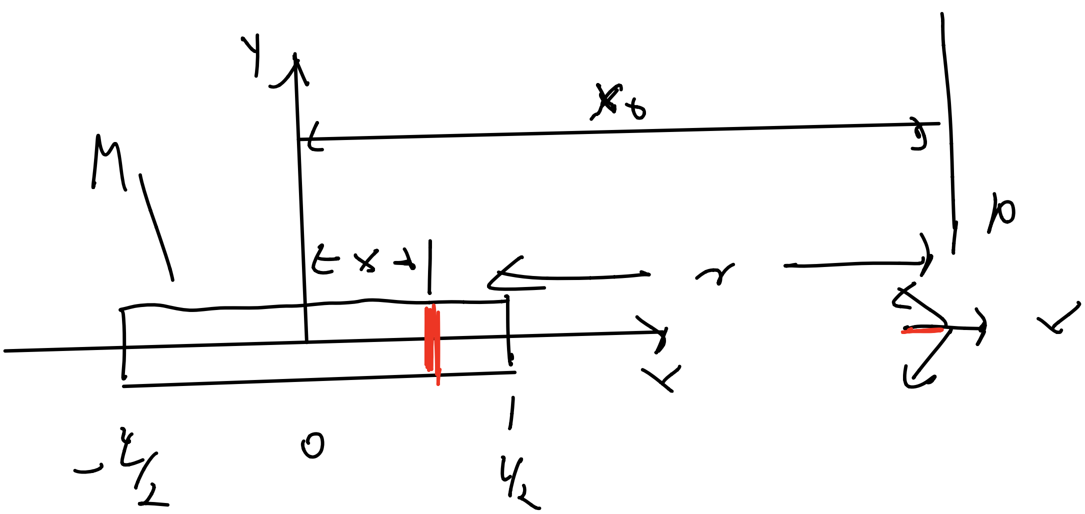
massiver Zylinder 

massive Kugel 

⇒ Wie summiert man die Massenstückchen auf?

1. Gravitationsfeldes eines massiven Stabs

Frage: Wie lautet das Gravitationsfeld entlang der x-Achse für einen massiven Stab, der in x-Richtung orientiert ist mit der Masse M und der Länge L.



Rezept:

- Nutze Symmetrie aus?
- Wähle Δm aus Δx aus und integriere von $\int_{-L/2}^{L/2}$

$\Delta m = dm$, $\Delta x = dx$

- Am Punkt P (an der Stelle x_0) das Feld $d\vec{g}$ von dm erzeugt ausrechnen:
  → bleibt nur x-Komponente übrig

$$dg_x = -\gamma \frac{dm}{r^2}$$

- dm parametrisieren: homogene Verteilung

$$\frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \qquad \frac{M}{L} \mathrel{\hat{=}} \text{"Massendichte"}$$

- $r = x_0 - x$

$$\rightarrow \quad dg_x = -\gamma \frac{dm}{r^2} = -\gamma \frac{M}{L} \frac{dx}{(x_0-x)^2}$$

- Integral: $\int_{-L/2}^{L/2}$ ⇒ symmetrisch!

$$\Rightarrow g_x = \int_{-L/2}^{L/2} dg_x = -\gamma \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(x_0-x)^2}\, dx = -\gamma \frac{M}{L} \left[\frac{1}{x_0-x}\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= -\gamma \frac{M}{L}\left[\frac{1}{x_0-L/2} - \frac{1}{x_0+L/2}\right] = -\gamma \frac{M}{\cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{x_0^2-(L/2)^2}$$

$$\Rightarrow g_x = -\gamma M \frac{1}{x_0^2 - (L/2)^2}$$

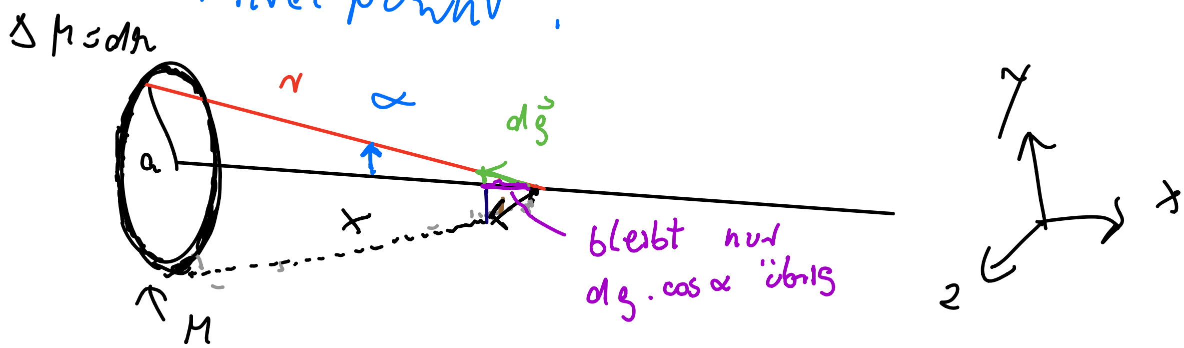
Da x_0 beliebig: $\vec{g} = -\gamma M \frac{1}{x^2 - (L/2)^2} \vec{e}_x$

Test: Im weit entferntesten Gebiet, sieht Stab wie Punkt aus

$\Rightarrow x \gg L/2 \quad \Rightarrow \vec{g} = -\gamma M \frac{1}{x^2} \vec{e}_x$ passt ✓

2. Gravitationsfeld eines massiven Ringes

Frage: Wie ist das Gravitationsfeld eines massiven Ringes der Masse M entlang einer senkrechten Achse durch den Mittelpunkt?



- Wähle dM aus und integriere entlang des Rings

→ Symmetrie: nur Komponenten längs x-Achse bleiben übrig!

Wir erhalten: $dg = -\gamma \frac{dM}{r^2}$

⇓

wegen Symmetrie: $dg_x = dg \cos\alpha = -\gamma \frac{dM}{r^2} \cos\alpha$

- Integration: $g_{total} = g_x = -\int \gamma \frac{\cos\alpha}{r^2} dM$
- dM parametrisieren: da jedoch r und α für alle Punkte des Ringes gleich sind:

$$\Rightarrow \quad g_x = -\gamma \frac{\cos\alpha}{r^2} \int dM = -\gamma \frac{\cos\alpha}{r^2} M, \text{ wobei } M = \int_0^M dM$$

Mit $r^2 = a^2 + x^2$:

$$\Rightarrow \boxed{g_x = -\gamma \frac{\cos\alpha \, M}{a^2 + x^2}}$$

Test: In weiter Entfernung, d.h. $x \gg a$ gilt:

$$g_x = -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{a^2+x^2} \overset{x \gg a}{=} -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{x^2} \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{a}{x}\right)^2+1}}$$

Taylor-Entwicklung: $\frac{1}{1+y} \approx 1-y \quad, y<1$
(ableiten oder Formelsammlung)

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y} = (1+y)^{-1} \approx 1-y+\ldots$$

bei uns: $y = \frac{a}{x}$ ist kleiner 1 !

$$\Rightarrow g_x = -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{x^2} \frac{1}{\left(\frac{a}{x}\right)^2+1} \approx -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{x^2}\left(1-\underbrace{\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right)$$

da sehr klein, weglassen

$$\approx -\gamma \frac{\cos\alpha\, M}{x^2}$$

Feld des Ringes sieht im weit entfernten wie ein Punkt der Masse M aus ✓ macht Sinn