2. Zwei-Körper-Probleme mit Zentralkräften

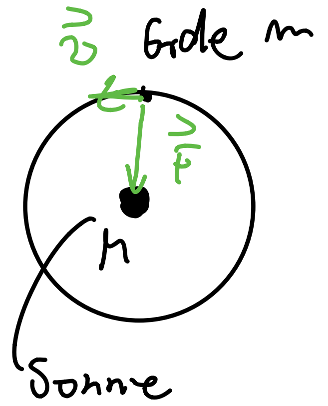
2.1 Gravitation und Kepler Gesetze

$\boxed{\text{Joh. Kepler } 1571-1630}$

Start: 1. Kepler'sches Gesetz

> Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. In einem ihrer Brennpunkte steht die Sonne.

Spezialfall einer Ellipse ist ein Kreis:
Brennpunkt = Mittelpunkt



Kraft $\vec{F}$ weist auf Mittelpunkt

Körper m führt "Kreisbewegung" aus!
Zentripetalkraft!

$$|\vec{F}_Z| = m\frac{v^2}{R}$$

Notiz: eigentlich reduzierte Masse $\mu = \frac{mM}{m+M}$ nehmen!

Aber da gilt!

$$\mu\Big|_{m \ll M} \approx \frac{mM}{M} \approx m$$

Da $v = \frac{2\pi R}{T}$, T = Periodendauer

$$\Rightarrow \quad \left\| \, |\vec{F}_Z| = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \, \right\|$$

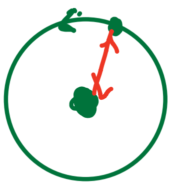
3. Kepler'sches Gesetz: $T^2 \sim \bar{r}^3 \overset{\text{Kreis}}{=} R^3$

$\bar{r}$ = mittlere Abstand

Die **Quadrate** der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die **Kuben** (= dritten Potenzen) der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen

Was bedeutet das für die Kraft?

$$|\vec{F}| = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \sim m\frac{4\pi^2 R}{R^3} = m\frac{4\pi^2}{R^2} \sim \frac{1}{R^2}$$

d.h. die wirkende Kraft zwischen zwei Körpern  — die Gravitationskraft — muss zentral wirken und $\sim \frac{1}{r^2}$ sein, um die Kepler'schen Gesetze zu erfüllen!

2. Keplersches Gesetz:

$\boxed{\text{Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.}}$

Das Gravitationsgesetz von Newton (1687)

$$\vec{F}_G \sim \frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r$$

Annahme: Gravitationswechselwirkung ist eine allgemeine Eigenschaft der Materie. Dann ist die Kraft $\vec{F}$ proportional zur Menge der Materie: $F \sim m\, M\, f(r)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_G = -\gamma\, M\, m\, \frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r}$$

Gravitationsgesetz

mit der Konstante $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N m^2}{kg^2}$

Gravitationsfeld $\hat{=}$ das Feld, das auf die Masse m wirkt:

$$\left\| \quad \vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} \quad \right\|$$

Bsp.: Gravitationsfeld der Erde $r > r_E$ beträgt:

$$\vec{g}(r) = -\gamma \frac{M_E}{r^2} \vec{e}_r$$

$\Rightarrow$ Richtung zum Erdmittelpunkt

Gravitationspotential:

Ist die Gravitationskraft konservativ?

$\rightarrow$ $\sim \frac{1}{r^2}$ wie bei Coulombkraft

$\rightarrow$ in Übungsaufgabe bewiesen

$\Rightarrow$ $\vec{F}_G$ ist ebenfalls konservativ!

Dann muss es ein Potential geben:

$$\vec{F}_G = -\vec{\nabla} V_G$$

Herleitung des Potentials:

$$\vec{F}_G(r) = -\vec{\nabla} V_g(r) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} V_g(r)$$

$$d\vec{r}\, \vec{F}_G(r) = -dV_g(r) \qquad \Big| \int$$

$$\int_{\infty}^{r} d\vec{r}\, \vec{F}_G(r) = -\int_{V_g(\infty)}^{V_g(r)} dV_g(r)$$

$$\int_{\infty}^{r} d\vec{r} \left(-\gamma \frac{m M}{r^2}\right) \vec{e}_r = -\int_{V_g(\infty)}^{V_g(r)} dV_g(r)$$

$$-\gamma m M \int_{\infty}^{r} dr \frac{1}{r^2} \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{1} = -V_g(r) + \overbrace{V_g(\infty)}^{\overset{!}{=}0}$$

potentielle Energie

$$-\gamma m M \left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \gamma m M \frac{1}{r} = -V_g(r)$$

Potential: $$\| \; V_g(r) = -\gamma m M \frac{1}{r} \; \|$$

attraktives Potential

Das Gravitationspotential, das auf den Körper m wirkt, wird aus dem Gravitationsfeld $\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}$ abgeleitet:

$$\boxed{\Phi_G = -\gamma \frac{M}{r}}$$

Zusammenfassung

Gravitationskraft:

$$\vec{F}_G = -\gamma \, mM \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = m\vec{g}$$

$$[F_g] = N = kg \; m/s^2$$

"Kraft, die zwischen m und M wirkt."

Gravitationsfeld:

$$\vec{g} = -\gamma M \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

γ = Gravitationskonst., $[\gamma] = N \frac{m^2}{kg^2}$

"Feld, das von M erzeugt wird und auf m wirkt."

Gravitationpotential:

$$\Phi_G = -\gamma M \frac{1}{r}$$

$$[\Phi_G] = J/kg = N \frac{m}{kg}$$

"potentielle Energie pro Masseneinheit m"

Übergang zu Mehrteilchensystemen

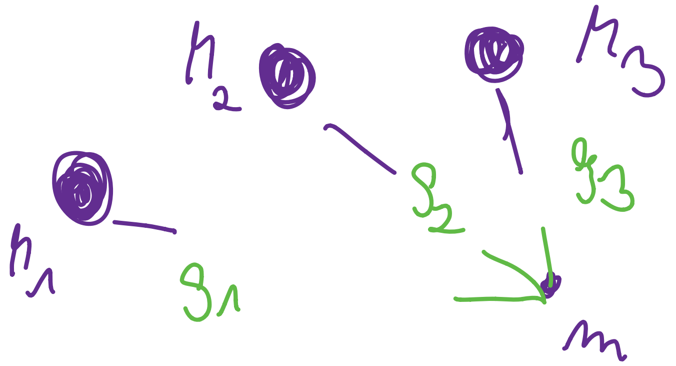
Arbeit, die benötigt wird, um m von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ im Feld $\vec{g}$ der Masse M zu verschieben:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \underbrace{d\vec{r}}_{\vec{e}_r dr} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\gamma \frac{mM}{r^2} \underbrace{\vec{e}_r \, dr \vec{e}_r}_{\vec{e}_r \vec{e}_r = 1}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} -\gamma \, m M \frac{1}{r^2} dr = -\gamma m M \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \gamma m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = V_g(\vec{r}_1) - V_g(\vec{r}_2)$$

Nun: falls statt eines Teilchens → mehrere Massen!



→ gesamtes Gravitationsfeld, das auf m wirkt:

$$\vec{g}_{total} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \dots$$

→ gesamtes Gravitationspotential:

$$\Phi_{total} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$$