

## Der Nabla-Operator

⇒ definiert die Operatoren der Vektoranalysis

- Gradient  $\vec{\nabla} f(\vec{r})$
- Divergenz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$
- Rotation  $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$
- Laplace  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$   
 $\Delta \phi(\vec{r})$  und  $\Delta \vec{A}(\vec{r})$

⇒ wie normalen Vektor benutzen

### Rechenregeln:

$$\vec{\nabla} (\phi \psi) = (\vec{\nabla} \phi) \psi + \phi (\vec{\nabla} \psi)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{A} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{A} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$$

$$\Delta (fg) = (\Delta f) g + 2 (\vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} g) + f (\Delta g)$$

$\Rightarrow$  normale Vektoren kann man in verschiedenen Koordinatensystemen ausdrücken

Vorsicht:

sieht der  $\vec{\nabla}$ -Operator in allen Koordinatensystemen gleich aus? No!

$\vec{x} = x(u_1, u_2, u_3)$  aber

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} f(\vec{x}) \neq \begin{pmatrix} \partial/\partial u_1 \\ \partial/\partial u_2 \\ \partial/\partial u_3 \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}$  muss mit Hilfe der Funktional-determinante in die anderen Koordinatensysteme umgerechnet werden! (siehe später)

## Die Ausdrücke (lauter):

otto 9.3.4

- Kart. KO:  $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z$
- Polar ko.:  $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \partial_\varphi$
- Zylinder ko.:  $\vec{\nabla} = \vec{e}_s \partial_s + \vec{e}_\varphi \frac{1}{s} \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z$
- Kugel ko.:  $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi$

## 1.9.4 Konservative Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \vec{\nabla} V(\vec{r}) \iff \vec{F} \text{ konservativ}$$

Welche Bedingung muss erfüllt sein?

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \stackrel{!}{=} 0$$

Warum?

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (- \vec{\nabla} V(\vec{r})) = - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$$

$\uparrow$   
immer!

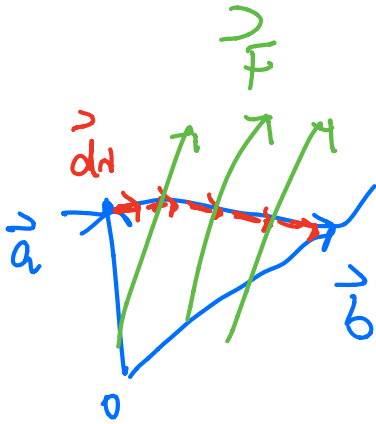
Nebenrechnung!

Falls die Rotation eines Kraftfeldes  
verschwindet, dann ist es eine  
konservative Kraft!

$\Rightarrow$  d.h. die geleistete Arbeit von  $\vec{F}(\vec{r})$   
ist vom gewählten Weg unabhängig!

Was bedeutet das?

$$W = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r} \vec{F}(\vec{r}) = \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{F}(\vec{r}(t)) = \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} dt \dot{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}(t))$$



Falls  $\vec{F}$  konservativ: setze  $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

$$W = \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} dt \dot{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) = - \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} dt \dot{\vec{r}} \vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$= - \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d}{d\vec{r}} V(\vec{r}) = - \int dV(\vec{r})$$

$$= -V(\vec{r}(t(\vec{b}))) + V(\vec{r}(t(\vec{a}))) \quad (*)$$

Fazit: Was passiert, wenn wir einen geschlossenen Weg  $C$  nehmen, d.h.  $\oint_C$ ?

Aus (\*) folgt sofort:  $W = 0$ !

Strategie: Falls  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \rightarrow V$  bestimmen

Falls  $\vec{F}$  nicht konservativ ist:

$$W = \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} dt \, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \quad \text{explizit berechnen und in geeignete Wegstücke unterteilen}$$

Energieerhaltung

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t(\vec{a})}^{t(\vec{b})} m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt = \frac{1}{2} m \int_{\dot{r}(t(\vec{a}))}^{\dot{r}(t(\vec{b}))} d(\dot{r}^2)$$

$$= E_{\text{kin}}(t(\vec{b})) - E_{\text{kin}}(t(\vec{a}))$$

Nun: Annahme  $\vec{F}$  sei konservativ:

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} =$$

$$= - \int \frac{\partial}{\partial \vec{r}} V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int \partial V(\vec{r}) = -V(\vec{r}_b) + V(\vec{r}_a)$$

$$= E_{\text{pot}}(\vec{r}_a) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_b)$$

Vergleichen:

$$E_{\text{kin}}(t(\vec{b})) - E_{\text{kin}}(t(\vec{a})) = E_{\text{pot}}(\vec{r}_a) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_b)$$

$$\underbrace{E_{\text{kin}}(t(\vec{b})) + E_{\text{pot}}(\vec{r}_b)}_{E_{\text{ges}}(\vec{r}_b)} = \underbrace{E_{\text{pot}}(\vec{r}_a) + E_{\text{kin}}(t(\vec{a}))}_{E_{\text{ges}}(\vec{r}_a)}$$

$\Rightarrow$  Für konservative Kräfte gilt Energieerhaltung!

## 2. Zwei-Körper-Probleme mit Zentralkräften

### 2.1 Gravitation und Kepler Gesetze

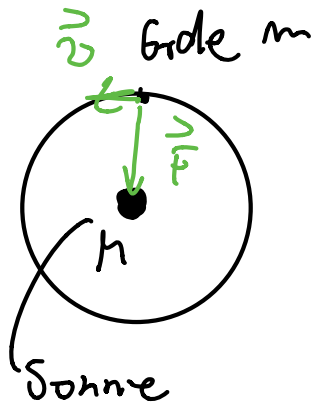
2-Körper  
Proble

Start: 1. Kepler'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. In einem ihrer Brennpunkte steht die Sonne.

Spezialfall einer Ellipse ist ein Kreis:

Brennpunkt = Mittelpunkt



Kraft  $\vec{F}$  weist auf Mittelpunkt

Körper  $m$  führt "Kreisbewegung" aus!  
Zentripetalkraft!

$$|\vec{F}_Z| = m \frac{v^2}{R}$$

Notiz: eigentlich reduzierte  
Masse  $\mu = \frac{mM}{m+M}$   
nehmen!

Aber da gilt:

$$\mu \Big|_{m \ll M} \approx \frac{mM}{M} \approx m$$

$$\text{Da } v = \frac{2\pi R}{T}, \quad T = \text{Periodendauer}$$

$$\Rightarrow \left\| |\vec{F}_Z| = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \right\|$$

3. Kepler'sches Gesetz:  $T^2 \propto \bar{r}^3 \stackrel{\text{Kreis}}{=} R^3$

$\bar{r} \hat{=}$  mittlerer

Abstand

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben (dritte Potenzen) der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.