

R nennt man die **allgemeine Gaskonstante**:

Für ein Mol eines idealen Gases gilt:

$$p V_M = R T$$

$V_M \hat{=}$ Molvolumen

Für n Mole eines idealen Gases gilt:

$$p V = n R T$$

Das ist die **Zustandsgleichung** des **idealen Gases**.

Da sich in einem Mol N_A Teilchen befinden, folgt unmittelbar:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

k heißt **Boltzmann-Konstante**.

Mikroskopische Beschreibung des Drucks eines Gases (kinetische Gastheorie):

Wie kann man mikroskopisch den Druck eines idealen Gases beschreiben ?

Ableitung unter der Voraussetzung:

- a) Das Eigenvolumen der Gasatome ist vernachlässigbar klein gegen das gesamte betrachtete Volumen.
- b) Es gibt nur elastische Stöße untereinander und mit den Wänden. Keine sonstigen Wechselwirkungen.

} ideales Gas

Ergebnis: Es wird eine Kraft auf eine Fläche, d.h. ein Druck, durch die mikroskopischen Teilchen erzeugt, die auf die Fläche treffen und reflektiert werden. Es gibt einen Impulsübertrag.

Mit Hypothese: alle Teilchen mit einer Geschwindigkeitskomponente v_x

→ Druck (Kraft auf eine Fläche senkrecht zur x-Achse):

$$\boxed{p = n m v_x^2}$$

mit $n = \frac{N}{V} \hat{=} \text{Teilchen dichte}$

$N \hat{=} \text{Anzahl Teilchen im Volumen } V$

Problem: Die Atome oder Moleküle haben nicht gleiche Geschwindigkeit.

$$\vec{v}_i = (v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i})$$

Deshalb muss eine mittlere Größe berechnet und eingeführt werden: $\overline{v_x^2} \hat{=} \text{Mittelwert von } v_x^2$

↳ mit Isotropie

$$\boxed{p = n m \overline{v_x^2}}$$

aus Überlegung:

a) Mittelwert über viele ($\sim \infty$) Teilchen

$$\overline{v_x^2}(t_1) = \frac{\sum_{i=1}^N v_{xi}^2(t_1)}{N} \stackrel{!}{=} \overline{v_x^2}(t_2)$$

oder

b) bessere Häufigkeitsverteilung für v_x

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} f(v_x) v_x^2 dv_x$$

$f(v_x) dv_x \stackrel{!}{=} \hat{=}$ Wahrscheinlichkeit
Wert bei v_x in dv_x
zu finden

Da der Druck isotrop ist, muss gelten:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{p = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}} \quad (1)$$

(! ohne explizite Annahme einer Verteilungsfunktion!)

[Anmerkung: Maxwell konnte mit der Annahme seiner Geschwindigkeitsverteilung explizit $\overline{v^2}$ ausrechnen.]

In Zustandsgleichung für das **ideale Gas** eingesetzt:

$$p V_M = R T$$

$V_M \stackrel{!}{=} \text{Molvolumen}$

$$\text{aus (1)} \quad \frac{1}{3} \frac{N_A}{V_M} \cdot m \overline{v^2} \cdot V_M = R T$$

$$\frac{1}{3} m \overline{v^2} = \frac{R}{N_A} \cdot T = \frac{2}{3} T \quad | \cdot \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} T} \quad (2)$$

oder mit ①

$$\boxed{p = n \cdot \frac{3}{2} T} \quad \textcircled{3}$$

$n \stackrel{\wedge}{=} \text{Teilchendichte}$

[Anmerkung: Maxwell erhielt

$$F(v) dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2RT}} dv$$

Der Beweis, dass die Geschwindigkeitsverteilung richtig ist, blieb Boltzmann vorbehalten (barometrische Höhenformel). Damit war die Richtigkeit der mikroskopischen Deutung der statistischen Beschreibung erbracht.]

Beachte:

- Die Gleichung ② ist eine Energiegleichung. Sie verbindet die **mittlere kinetische Energie** der Teilchen

$$\overline{E}_{kin} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} \stackrel{!}{=} \frac{3}{2} RT$$

mit der **Zustandsgröße Temperatur**.

Für ein Mol gilt:

$$\boxed{\overline{E}_{kin} (1 \text{ Mol}) = N_A \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} RT}$$

- Die Zustandsgleichung für das ideale Gase ist quasi eine Energiebilanz ausgedrückt durch makroskopische Zustandsgrößen.

- Der Druck (3) kann als **Energiedichte** aufgefasst werden.

$$p = n \frac{2}{3} \overline{E}_{kin}$$

- aus der Isotropie des Drucks (s.o.):

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

folgt, daß in den drei "Richtungen"
gleiche kinet. Energieanteile stecken: $3 \times \frac{1}{2} kT$

pro translatorischen Freiheitsgrad hat man die mittlere kinetische Energie

$$\frac{1}{2} kT$$

durch Stöße wird die Energie zu gleichen Teilen auf die Freiheitsgrade der Bewegung verteilt:

$$\overline{E}_{Teilch} = f \frac{1}{2} kT$$

f = Zahl der
Freiheits-
grade

bzw.

$$\overline{E}_{Mol} = f \frac{1}{2} RT$$

→ Gleichverteilungssatz:

Bei konstanter Temperatur (im thermodynamischen Gleichgewicht) verteilt sich die Energie gleichmäßig auf alle zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade. Und zwar ist die Energie pro Freiheitsgrad und Mol:

$$\overline{E}_{Mol} = \frac{1}{2} RT$$

- Bedeutung von $T = 0K$: Dort ist die Energie des Systems gleich Null, d.h. es kann keine tiefere Temperatur geben. → absoluter Nullpunkt

Eine wichtige Folgerung aus der mikroskopischen Betrachtung mittels kinetischer Gastheorie ist der Zusammenhang zwischen Temperatur und Energiegehalt:

Definition: **Innere Energie U**

Ein Mol eines idealen Gases besitzt pro Freiheitsgrad die Energie $\frac{1}{2} RT$. Die **innere Energie** eines Mols ist damit

$$U = f \frac{1}{2} RT$$

bzw. für n Mole

$$U = n f \frac{1}{2} RT$$

Freiheitsgrade:

1) einatomige Gase

$$f = 3$$

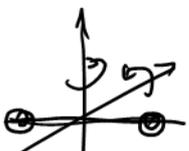
3 Freiheitsgrade der Translation

2) zweiatomige Moleküle

$$f = 5$$

3 Translationsf.

2 Rotationsf.



$$\frac{1}{2} \theta_i \overline{\omega^2} = \frac{1}{2} RT$$

3) dreiatomiges Molekül (nicht linear)

$$f = 6$$

3 Translationsf.

3 Rotationsf.