**Übungen Teilchenphysik f. Fortg. SS 2010, Blatt 9**

Ausgabe: 11.6.10, Abgabe: 18.6.10

**Baryon-Multipletts** (in der Übung)

Beginnen Sie mit der Quark-Darstellung des $\Delta^{++}$-Baryons. (Die Spin- und Farbfreiheitsgrade sollen hierbei nicht beachtet werden). Wenden Sie die Flavour-SU(3)-Schiebeoperatoren

$$I^+ : u \to 0, d \to u, s \to 0$$

$$I^- : u \to d, d \to 0, s \to 0$$

$$U^+ : u \to 0, d \to 0, s \to d$$

$$U^- : u \to 0, d \to s, s \to 0$$

auf diesen Zustand an, und erzeugen Sie damit alle Zustände des Spin 3/2 Baryon-Dekupletts. Machen Sie sich jeweils Gedanken um die geeignete Normierung der Wellenfunktion.

**1) Eigenschaften der SU(3)$_C$-Generatoren** (3 Punkte)

Man kann eine allgemeine SU(3)-Transformation $G(x)$ in der Form

$$G(x) = e^{\lambda^a \alpha_a(x)}$$

schreiben, wobei die Summation über die acht Generatoren $\lambda^a$, $a = 1, ..., 8$ impliziert ist. Die (festen) Matrizen $\lambda^a$ stellen eine Basis dar, in der die 8 Komponenten $\alpha_a(x)$ die jeweilige SU(3)-Transformation eindeutig charakterisieren. Bei der Farb-SU(3)$_C$, wenn $G(x)$ auf die drei-Farb-komponentige Wellenfunktion eines Quarks wirkt, sind die $\lambda^a$ 3x3 komplexe Matrizen und entsprechen den 8 Gluonen. Die Eigenschaften der Matrizen $\lambda^a$ lauten dann:

$$\begin{array}{ll}
(1) & \lambda_a^\dagger = \lambda_a \\
(2) & Sp(\lambda^a) = 0 \\
(3) & Sp(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab} \\
(4) & [\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda_c \\
(5) & \{\lambda^a, \lambda^b\} = \frac{4}{3}\delta^{ab}\mathbf{1} + 2id^{abc}\lambda_c.
\end{array}$$

Machen Sie sich Gedanken über die “Metrik” des Farbraumes, und entsprechend über die (Un)Bedeutung der unteren und oberen Indizes.
Die Eigenschaften (1) bzw. (2) bedeuten, dass G unitär bzw. unimodular ist, während (4) bzw. (5) die Struktur der Lie-Algebra definieren, wobei die 512 reellen Zahlen $f^{abc}$ und $d^{abc}$ die Strukturkonstanten sind. Zeigen Sie unter Verwendung der anderen 4 Relationen, dass die “Orthogonalitätsrelation” (3) erfüllt ist.

**2) Bestimmung der Strukturkonstanten der SU(3)$_C$** (4 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Relationen (3),(4) die antisymmetrischen Strukturkonstanten $f^{abc}$ der $SU(3)_C$ unter Benutzung der in der Vorlesung gewählten Darstellung der $\lambda^a$.

**3) Eichinvariante $SU(3)_C$-Farb-Wechselwirkung** (4 Punkte)

Man betrachte die Lagrange-Dichte im Farbraum (Notation wie Skript S. 21). Unter lokalen $SU(3)_C$-Eichtransformationen des Feldes

$$\Psi(x) \;\rightarrow\; \Psi'(x) = G(x)\Psi(x) \;\; \text{mit } \mathrm{G(x)} = \exp(\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{g_s}\lambda_\mathrm{j}\beta_\mathrm{j}(\mathrm{x})),$$

wo $\lambda^a$ ($a$ = 1,...,8) die acht Generatoren der SU(3) sind, sollen auch Gradiententerme der Lagrange-Dichte invariant bleiben. Dazu verwende man, in Analogie zur QED, die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbf{1} + ig_s B_\mu = \partial_\mu \mathbf{1} + ig_s \frac{1}{2}\lambda_j G^j_\mu,$$

wo $B_\mu$ (3x3-Matrix mit 8 Komponenten $G^j_\mu$) das Gluonenfeld darstellt.

a) Wie müssen sich dann die Eichfelder $G^j_\mu(x)$ transformieren? (Hinweis: man betrachte eine infinitesimale Transformation, $\beta(x) << 1$, und verwende die Eigenschaften der $\lambda$-Matrizen von Übung 7, Aufgabe 3)

b) Der eichinvariante Feldstärketensor $G^{\mu\nu}$ (mit Komponenten $F^{\mu\nu}_j$) der Gluonen-Eichfelder ist gegeben durch

$$G^{\mu\nu} = [D^\mu, D^\nu]/(ig_s)$$

(Damit ist dann auch der Beitrag $\frac{1}{4}F_{j,\mu\nu}F^{\mu\nu}_j = \frac{1}{2}Sp(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$ eichinvariant). Drücken Sie diesen Tensor aus als Funktion der Felder $B^\mu$ durch einsetzen der kovarianten Ableitung, und vergleichen Sie ihn mit dem Feldstärketensor der QED.

**5) Die Gluon-Gluon-Kopplung (2 Punkte)**

Die unter lokalen $SU(3)_C$-Transformationen eichinvariante Lagrangedichte

$$L = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}Sp(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}),$$

mit $D_\mu$ und $G^{\mu\nu}$ wie in Aufgabe 1 definiert, impliziert ebenfalls Gluon-Gluon-Kopplung. Man ermittle die Terme, die eine 3-Gluonen bzw. 4-Gluonen-Kopplung beschreiben. (Hinweis: Sie dürfen das Ergebnis von 4b) benutzen).