

# TEILCHENPHYSIK FÜR FORTGESCHRITTENE

Die starke Wechselwirkung und Quantenchromodynamik,  
Teil II (in Anlehnung an Skript R. Klanner/T. Schoerner)

**Caren Hagner**  
**Achim Geiser**



Universität Hamburg, IExpPh  
Sommersemester 2009

# ÜBERBLICK

1. Die quantenmechanische Beschreibung von Elektronen
2. Feynman-Regeln und –Diagramme
3. Lagrange-Formalismus und Eichprinzip
4. QED

Einschub: Beschleuniger und Experimente

5. Starke Wechselwirkung und QCD
  - 5.1 Einleitung: Quarks und Farbe
  - 5.2 Einschub: Gruppentheorie und Anwendungen
  - 5.3 QCD: die Theorie der starken Wechselwirkung: SU(3)-Eichinvarianz, Gell-Mann-Matrizen, Masselosigkeit der Gluonen, Lagrange-Dichte der QCD, Renormierung, "running coupling", asymptotische Freiheit und Confinement
  - 5.4 Anwendung: Jets, Fragmentation, Entdeckung des Gluons, Messung des Gluonspins**
  - 5.5 Perturbative QCD: Wirkungsquerschnitte, Messung von  $\alpha_s$
  - 5.6 Tief-unelastische Streuung

# 5.4 Fragmentation+Jets

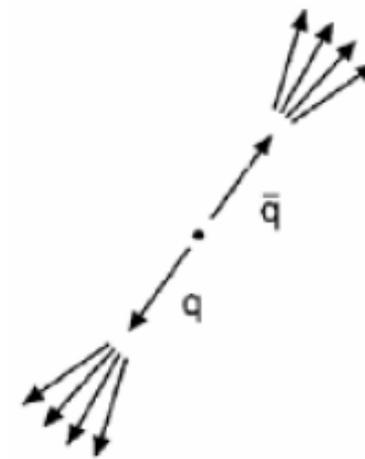
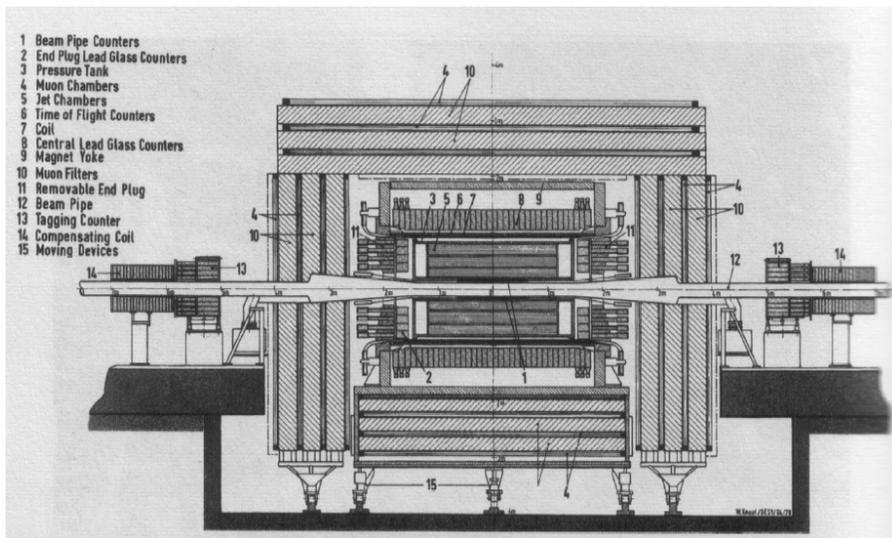
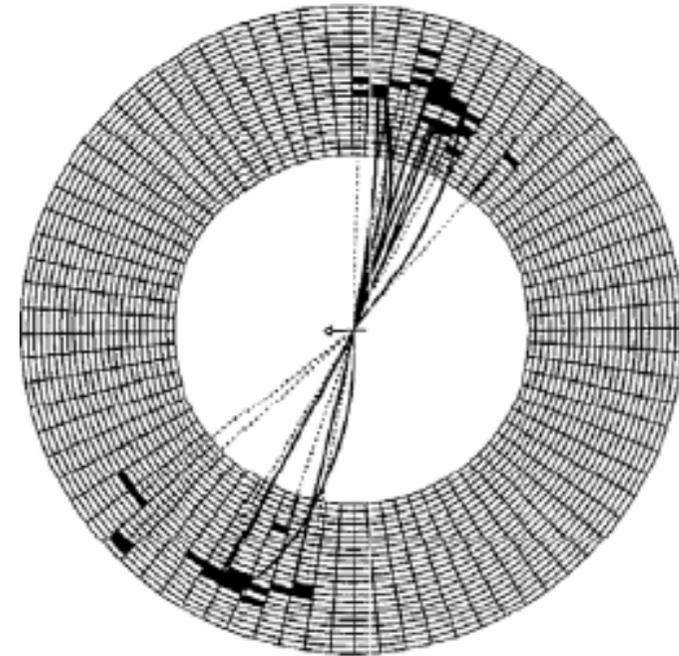
## Wie sehen Detektoren Quarks und Gluonen?

- werden Quarks/Gluonen getrennt →  
Abstrahlung von QCD-Feldquanten  $g \rightarrow q\bar{q}$   
mit kleinen ( $\sim \Lambda=0.2 \text{ GeV}$ ) Transversalimpulsen  
(Fragmentation)

→ für hohe Transversalimpulse → enges  $\vec{p}$   
Teilchenbündel (Jet), aus dem sich im Detektor  
des Quarks/Gluon rekonstruieren lässt

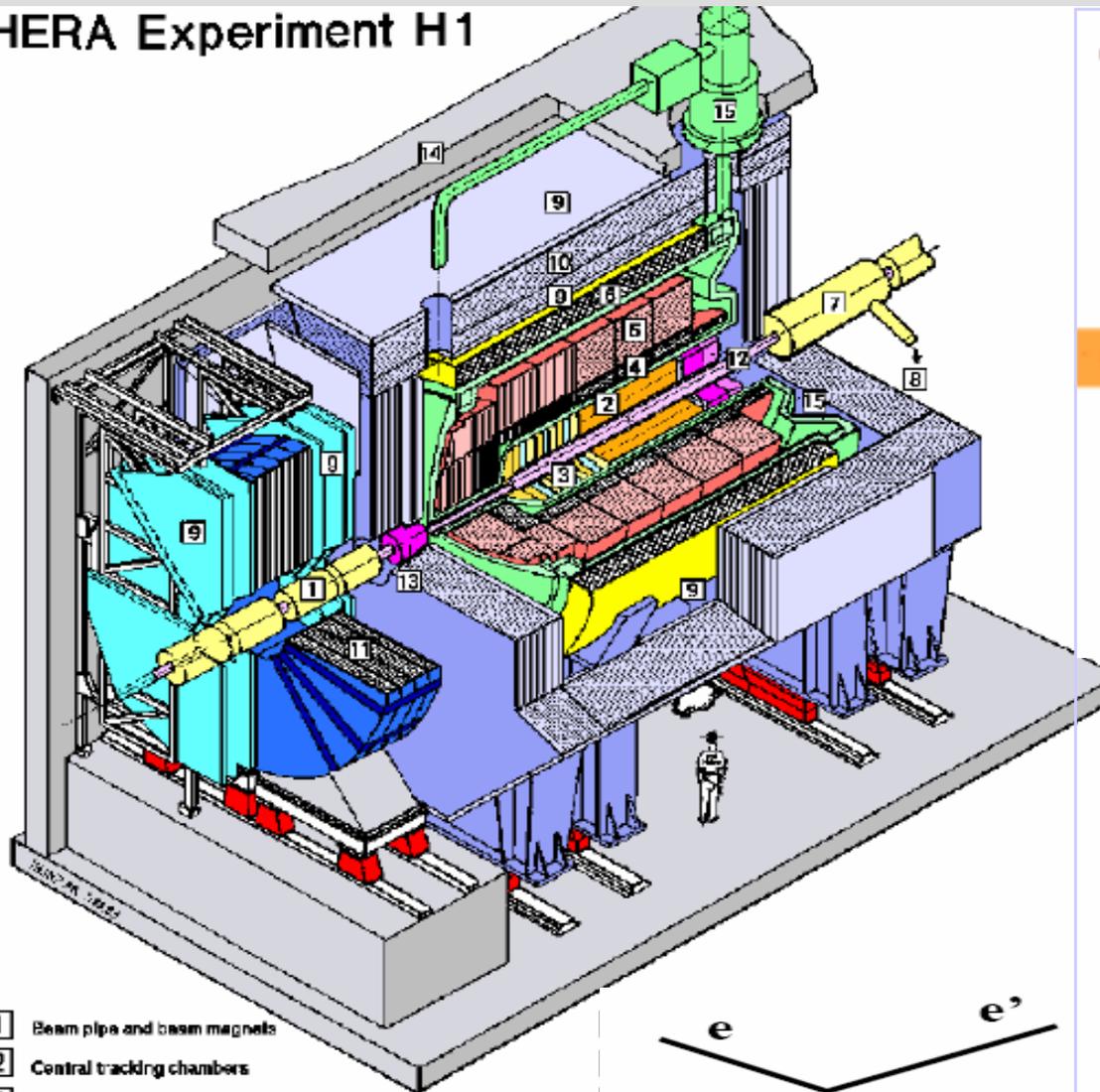
- Fragmentation = statistischer Prozess mit  
großen Fluktuationen in Anzahl und Art der  
Teilchen ( $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \dots p, n, \dots$ )

→ Nachweis durch Spurdetektor und Kalorimeter

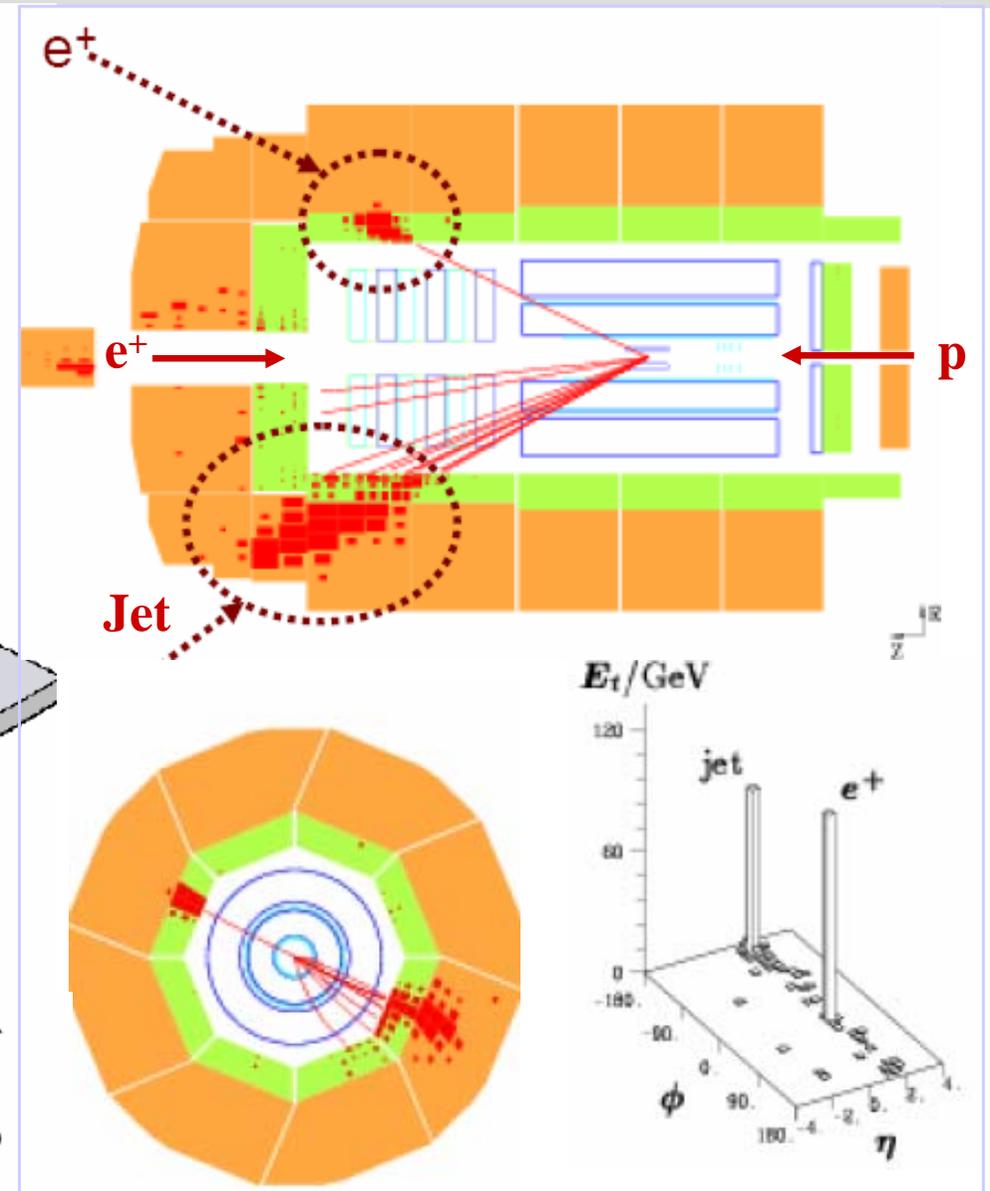
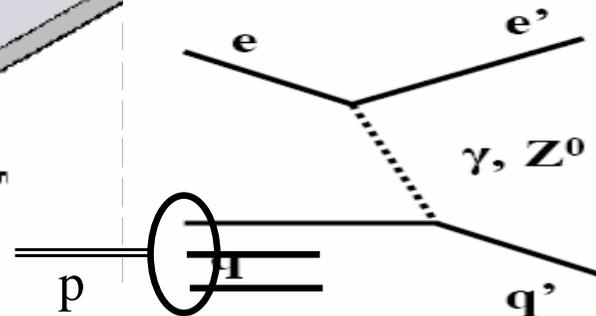


# 5.4 Jets

## HERA Experiment H1



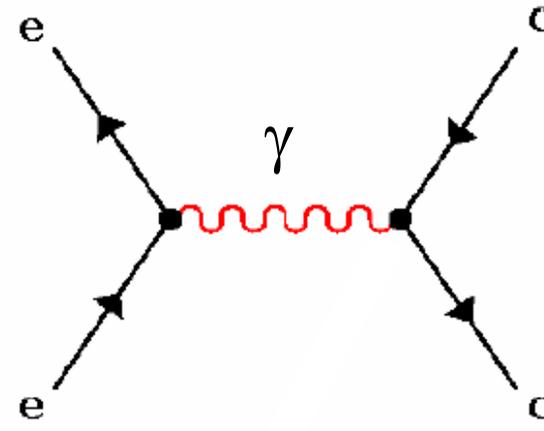
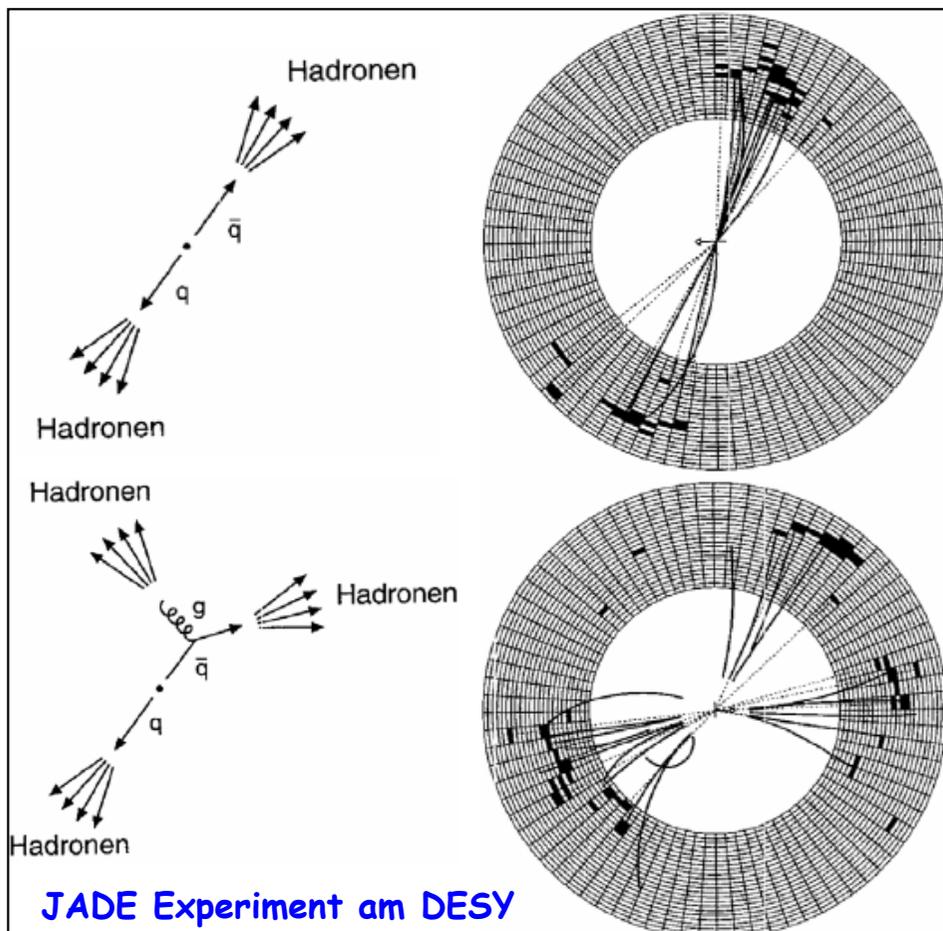
- 1 Beam pipe and beam magnets
  - 2 Central tracking chambers
  - 3 Forward tracking and Transition radiators
  - 4 Electromagnetic Calorimeter (lead)
  - 5 Hadronic Calorimeter (stainless steel)
  - 6 Superconducting coil (1.2T)
  - 7 Compensating magnet
  - 8 Helium cryogenics
- } Liquid Argon



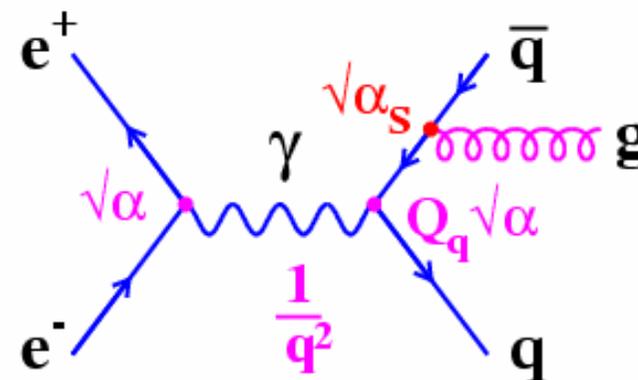
# 5.4 Jets – Entdeckung der Gluonen - 1979

**DESY-PETRA:** Wichtiger experimenteller Schritt auf dem Weg zur QCD:

3-Jet Ereignisse  $\rightarrow$  „Nachweis“ der Gluonen



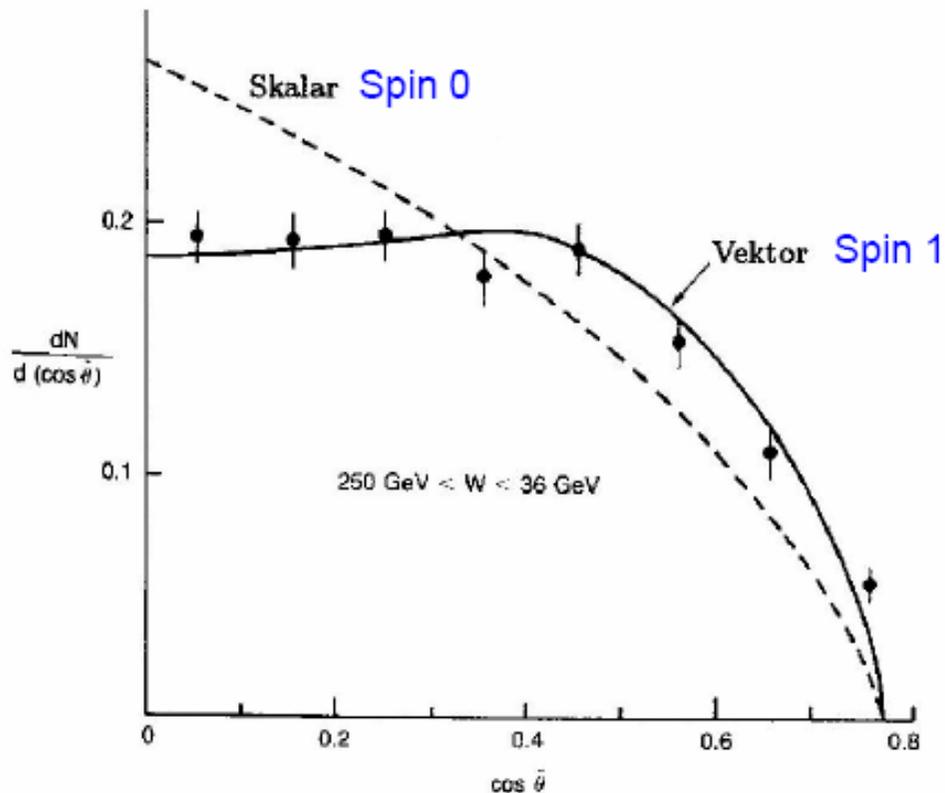
In  $\sim \alpha_s$  [ $\sim 10\%$ ] der Ereignisse wird ein Gluon abgestrahlt  
 $\rightarrow$  Bestätigung der QCD-Vorhersage,  
 $\rightarrow$  Möglichkeit  $\alpha_s$  zu bestimmen



# 5.4 Spin und Farbladung der Gluonen

## Spin der Gluonen:

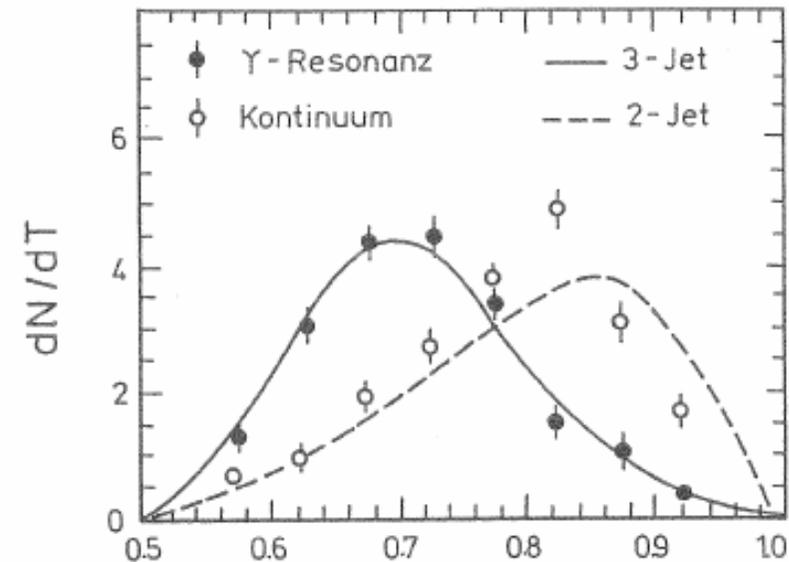
- abgestrahltes Gluon (statistisch) hat kleineren Impuls als die beiden Quarks
- Winkel des höchst-energetischen Jets zur Achse der beiden anderen Jets empfindlich auf Gluon-Spin (Berechnung im Rahmen der QCD) – bereits bei den PETRA-Experimenten gezeigt



→ Spin der Gluonen: 1

## Farbladung der Gluonen:

- $\Upsilon(b\bar{b})$ -Resonanz hat  $J^{PC}=1^{--} \rightarrow gg$ -Zerfall wegen C-Paritätserhaltung in der starken WW verboten
- für Farb-neutrale Gluonen wäre der Zerfall  $\Upsilon \rightarrow g \rightarrow q\bar{q}$  erlaubt
- kann durch Ergebnisse PLUTO-Experiment (DESY 1979) ausgeschlossen werden

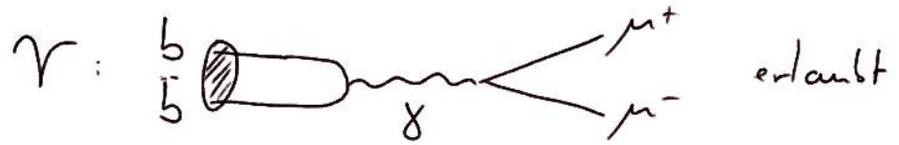


Trust: Maß für Isotropie der erzeugten Teilchen:

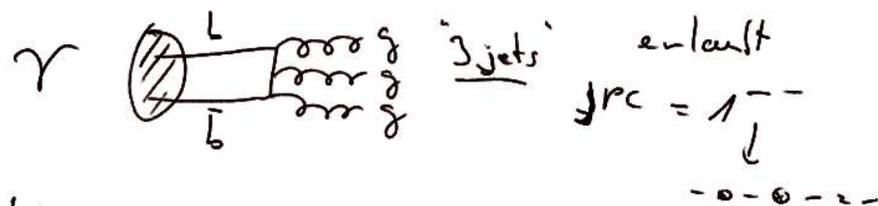
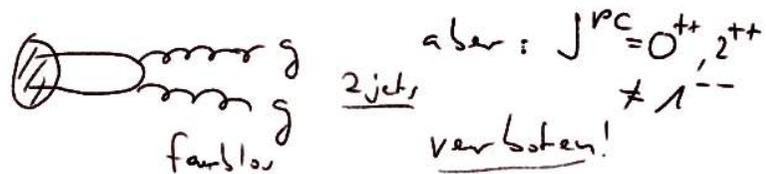
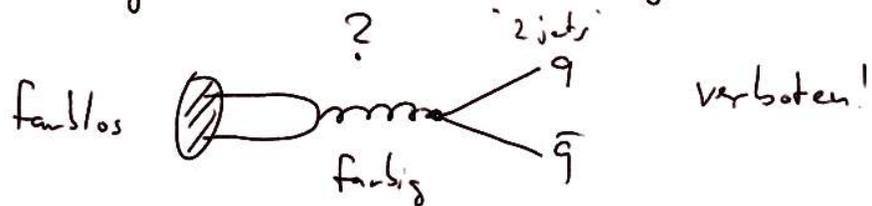
$T = 0.5$  ... isotrop

$T = 1.0$  ... 2 entgegengesetzt fliegende Teilchen  
(Kontinuum: ~90% 2 Jets, 10% > 2 Jets)

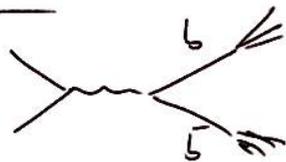
# Farbladung der Gluonen



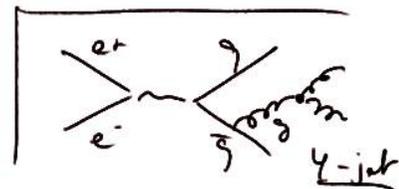
$\Rightarrow$  gleiche Quantenzahlen wie  $\gamma$ :  $J^{PC} = 1^{--}$



Kontinuum:



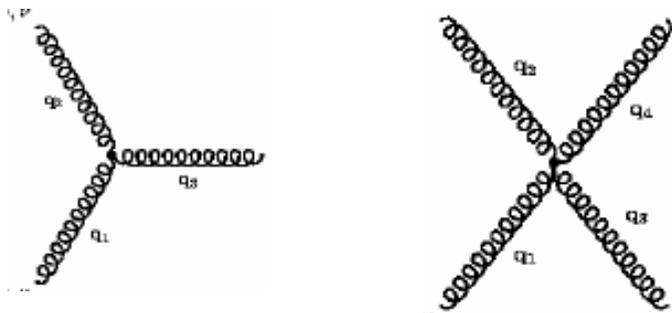
2-jet



# 5.4 Farbladung der Gluonen + Zusammenfassung

## Farbladung der Gluonen (cont.):

Außerdem wurde in zahlreichen Studien zu den Winkelverteilungen in 3-, 4-, und 5-Jet-Ereignissen bei z.B.  $e^+e^-$  (LEP) und  $ep$  (HERA) die Stärke der 3- und 4-Gluonenkopplung wie vorhergesagt gemessen.



## Zusammenfassung:

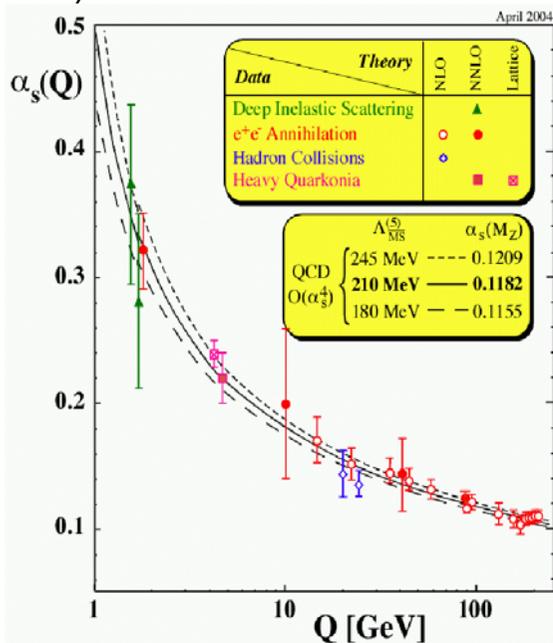
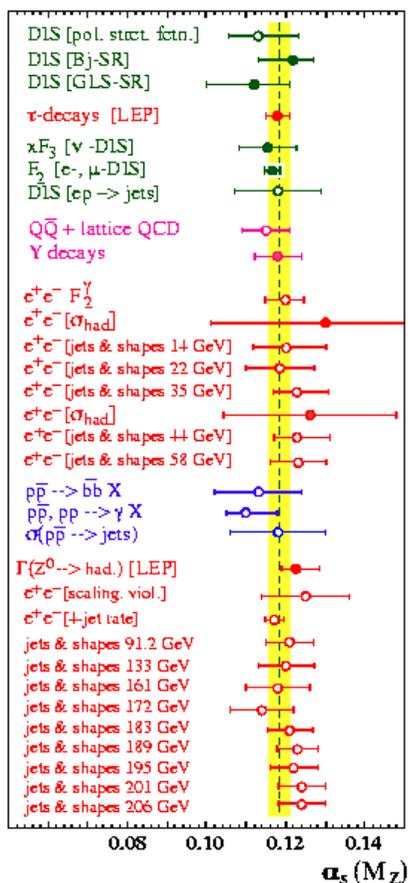
- **QCD**: Eichinvariante Quantenfeldtheorie nach dem Muster der QED (Drehung im 1-dim Ladungsraum  $\rightarrow$  Drehung im 3-dim Farbraum = nicht Abelsche Eichtheorie –  $SU(3)$ )
  - Schleifendiagramme: Gluonenbeiträge  $>$  Quarkbeiträge  $\rightarrow$  Kopplungskonstante nimmt bei kleinen Abständen (Impulsüberträge groß) ab
    - $\rightarrow$  asymptotische Freiheit ( $\rightarrow$  perturbative QCD)
    - $\rightarrow$  Confinement ( $\rightarrow$  nicht-perturbative QCD)
- (komplexe Struktur des Vakuums dank Quantenfluktuationen)
- Experimente bestätigen QCD (davon mehr)

# 5.5 perturbative QCD: SKALENABHÄNGIGKEIT VON $\alpha_s$

**Theorie** (erste Ordnung,  $M_Z = 91.2$  GeV):

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(M_Z^2)}{1 + \frac{(33 - 2n_f)}{12\pi} \alpha_s(M_Z^2) \ln \frac{Q^2}{M_Z^2}}$$

**Entweder** wird Kopplung bei Skala  $Q^2 \neq M_Z^2$  gemessen und dann (zwecks Vergleichbarkeit) mithilfe obiger Gleichung zur Skala  $M_Z^2$  "evolviert".



**Oder** Messungen werden bei "ihrer" Skala dargestellt und mit theoretischer Vorhersage für  $\alpha_s(Q^2)$  für gegebenes  $\alpha_s(M_Z^2)$  (z.B. Weltmittelwert) verglichen.

**Aktuelles Weltmittel**

$\alpha_s(M_Z)=0.1176(20)$  [PDG 2006]  
 $\alpha_s(M_Z)=0.1182(27)$  [Bethke]

**HERA (NLO)**

$\alpha_s(M_Z)=0.1186 \pm 0.0011(\text{exp}) \pm 0.0050(\text{th})$

Der Weltmittelwert hat einen deutlich kleineren (theoretischen) Fehler als der HERA-Wert – hier fließen theoretisch besser verstandene Resultate ein (HERA: nur nächstführende Ordnung QCD – "next-to-leading order", NLO).

HERA liefert aber die Werte mit dem kleinsten experimentellen Fehler (Theorie kann später nachgebessert werden).

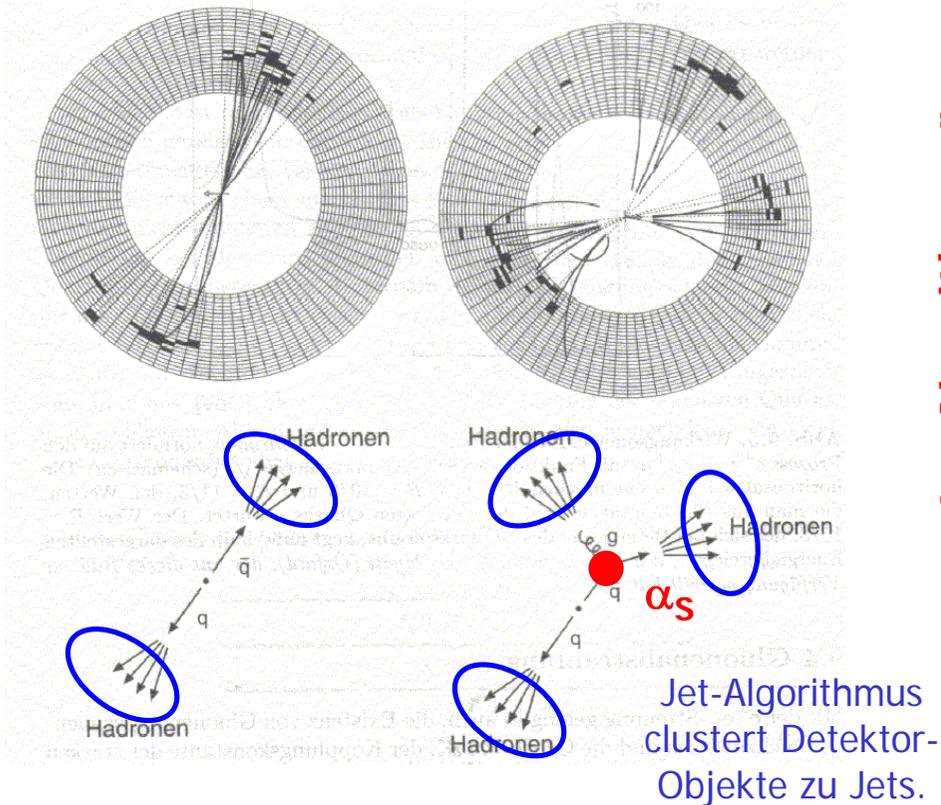
Im Folgenden Diskussion verschiedener exp.

Bestimmungen der starken Kopplung  $\alpha_s$ :

- 3/4-Jet-Raten in  $e^+e^-$ -Kollisionen (LEP)
- Skalenverletzungen in DIS (HERA)
- Jet-Physik in ep-Streuung (Tevatron ähnlich) (nicht erwähnt:  $\tau$ -Zerfall, Z-Zerfall, interne Struktur von Jets, Gittereichtheorie,  $\Upsilon$ -Zerfall, ...)

# 5.5 $\alpha_s$ AUS JETS IN $e^+e^-$ (PETRA, LEP)

Erinnerung: 3-Jet-Ereignisse bei PETRA  $\rightarrow$  Sensitivität auf starke Kopplung  $\alpha_s$ :



"Jet-Algorithmus"

Praktisch leicht anderes Vorgehen: Bestimme für verschiedene  $\sqrt{s}$  die Abhängigkeit von einer bestimmten Variablen, typisch  $y_{cut}$ :

- Definiere "Abstand" zweier Teilchen  $i,j$ :  $y_{ij}$ , für alle Teilchen im Ereignis:

$$y_{ij} = \frac{2 \min(E_i^2, E_j^2)}{s} (1 - \cos \theta_{ij})$$

- Falls ein  $y_{ij} < y_{cut}$ , mit  $y_{cut}$  vordefiniert, dann kombiniere Teilchen  $i,j$  zu neuem "Teilchen"  $ij$ :

$$p_{ij}^\mu = p_i^\mu + p_j^\mu$$

- Neues Clustering mit den "Teilchen"  $ij$ . Clustering endet, falls alle  $y_{ij} > y_{cut}$ . Die dann verbleibenden "Teilchen" sind Jets.
- Damit hängt aber Anzahl der Jets von  $y_{cut}$  ab:
  - $y_{cut}$  klein  $\rightarrow$  Jets werden nicht lange geclustert  $\rightarrow$  eher mehr Jets.
  - $y_{cut}$  gross  $\rightarrow$  eher weniger Jets.

3-Jet-Rate naiv in nächstführender Ordnung QCD:

$$R_3(\sqrt{s}) = \frac{\sigma_3}{\sigma_{total}} \approx \frac{\alpha_s + \alpha_s^2}{1 + \alpha_s} \propto \alpha_s(\sqrt{s})$$

Relevante Energieskala:  $\mu \sim \sqrt{s}$ .

Betrachte  $R_3$  (oder  $R_4$ ) als Funktion von  $y_{cut}$  ( $\rightarrow$ )

$$R_4(y_{cut}) \propto A(y_{cut})\alpha_s^2 + B(y_{cut})\alpha_s^3$$

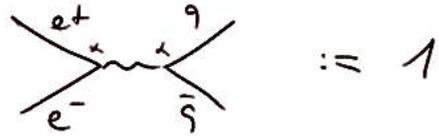
$\rightarrow$  in  $R_4$  höhere Sensitivität für Kopplung als in  $R_3$ !

# $\alpha_s$ AUS JETS IN $e^+e^-$

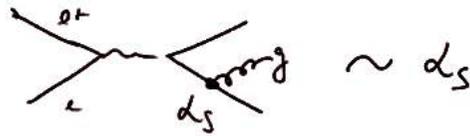
$e^+e^- \rightarrow jets$

002

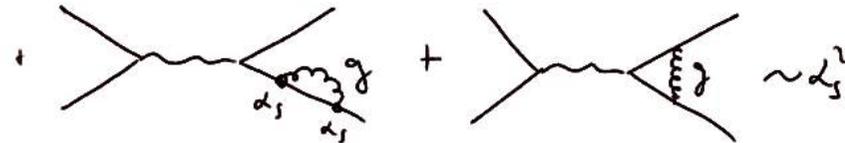
(A) 0. Ordnung



(B) 1. Ordnung



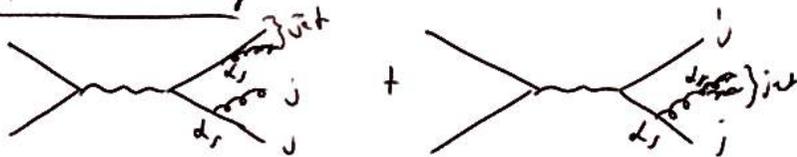
(C)



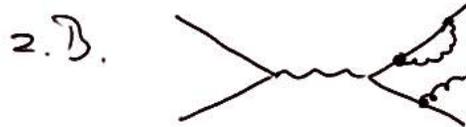
aber: Interferenzen:  $\sim \sqrt{1 \cdot d_s^2} \approx d_s$

(D)

2. Ordnung



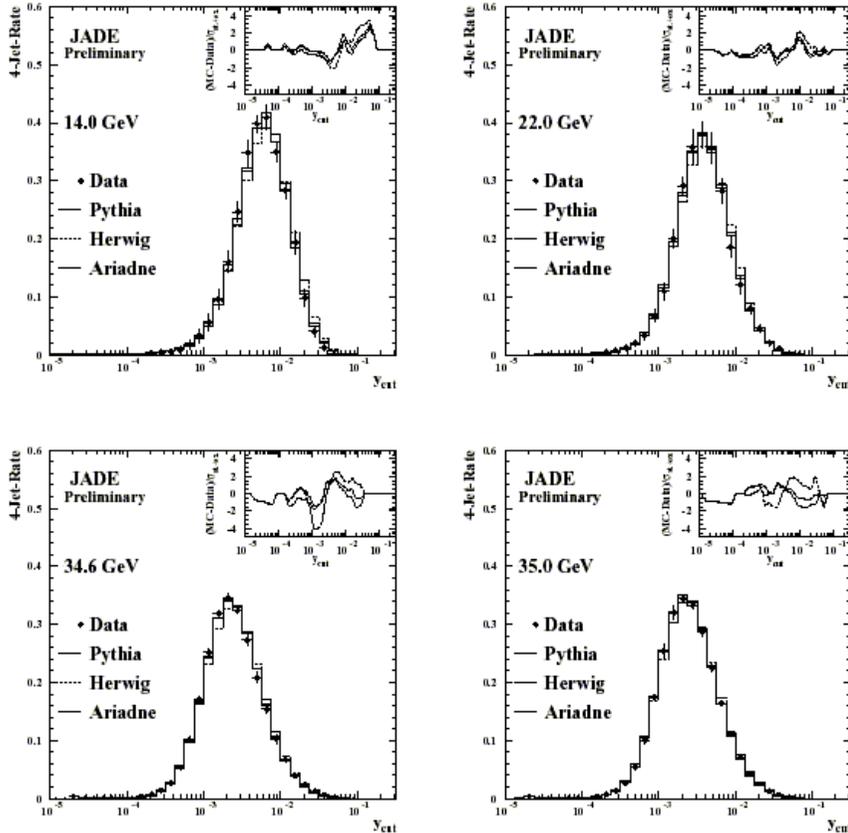
+ Interferenzen mit (B)  $\sim d_s^2$



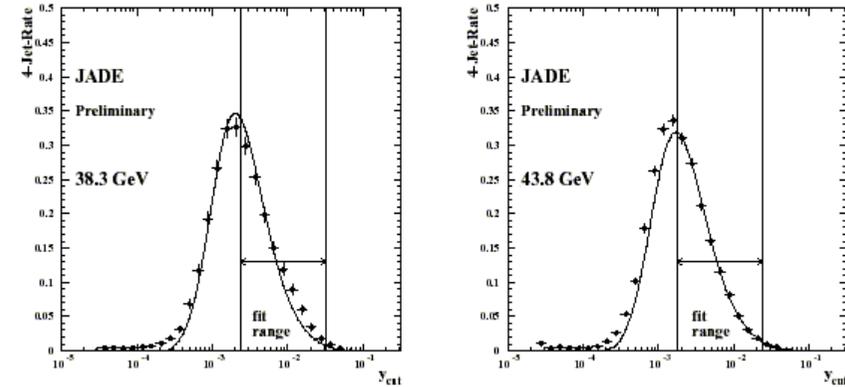
# 5.5 $\alpha_s$ AUS JETS IN $e^+e^-$ (PETRA, LEP)

Ergebnisse JADE (PETRA):

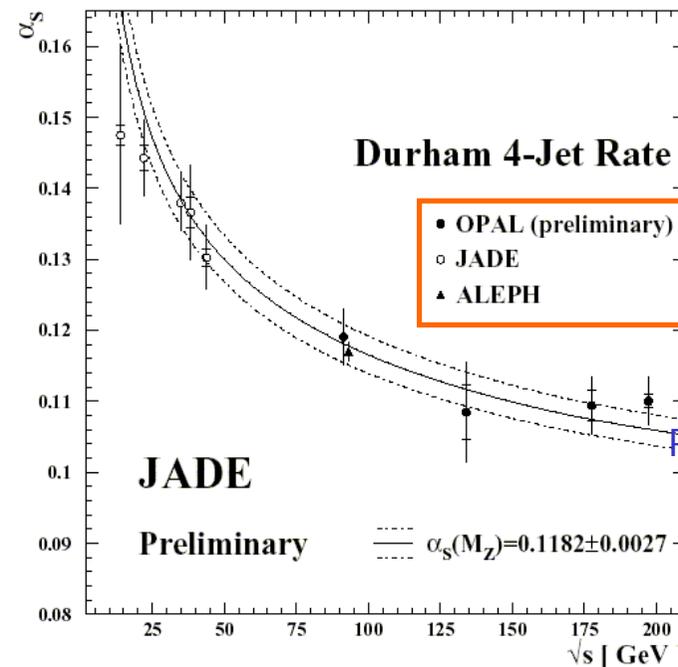
$R_4$  als Funktion von  $y_{cut}$  für verschiedene  $\sqrt{s}$ .



Theorie (Kurven) hängen von  $\alpha_s$  ab  $\rightarrow$  Anpassung (Fit) der Theorie an Daten in bestimmten Messbereichen durch Variation von  $\alpha_s$  ( $\rightarrow$ ).



Ergebnis:  
Kopplung als Funktion der Schwerpunktsenergie!



Kombination von PETRA und LEP!!!  
Alte JADE-Daten neu belebt!!!!

# 5.5a Übersicht: Eigenschaften der Quarks

**Quarks:** Spin:  $\frac{1}{2}$ , A (Baryonenzahl):  $+\frac{1}{3}$ , Parität:  $P = +1$

**Antiquarks:** Spin:  $\frac{1}{2}$ , A (Baryonenzahl):  $-\frac{1}{3}$ , Parität:  $P = -1$

	"leicht"			"schwer" ( $m > \Lambda_{\text{QCD}}$ )		
Quark <sup>*)</sup>	d	u	s	c	b	t
Ladung/e	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3
$I_3$	-1/2	+1/2	0	0	0	0
Strange	0	0	-1	0	0	0
Charm	0	0	0	+1	0	0
Bottom	0	0	0	0	-1	0
Top	0	0	0	0	0	+1
„nackte“ Masse <sup>**)</sup>	~.008 GeV	~.004 GeV	~0.15 GeV	~1.1 GeV	~4.2 GeV	~175 GeV
Masse im Hadron <sup>**)</sup>	~.344 GeV	~0.340 GeV	~0.51 GeV	~1.5 GeV	~4.7 GeV	***)

<sup>\*)</sup> additive Quantenzahlen ändern das Vorzeichen Quarks  $\rightarrow$  Antiquarks

<sup>\*\*)</sup> modellabhängig

<sup>\*\*\*)</sup> Lebensdauer so kurz (schwacher Zerfall!), dass es keine gebundenen Zustände gibt

# 5.6 TIEFUNELASTISCHE ep-STREUUNG

Normalerweise "historischer" Weg:

- Rutherford mit Spin-1/2-Geschossen (elastisch)
- Spin des Targets (→ Mott-WQS)
- Ausdehnung des Targets (→ Formfaktoren, Rosenbluth-Formel)
- Übertragung auf den inelastischen Fall

Jetzt anders:

- Das Proton hat (punktförmige) Konstituenten!
- inelastische ep-Streuung = elastische Streuung an einem der Konstituenten.
- grosser Energieübertrag des Elektrons  $v \equiv E - E'$ , entspricht kurzer Zeitdauer der Wechselwirkung → inkohärente Streuung an einzelnen "Partonen".
- Annahme: Partonen haben Spin-1/2 → Anwendung der Erfahrung aus  $e\mu$ -Streuung:

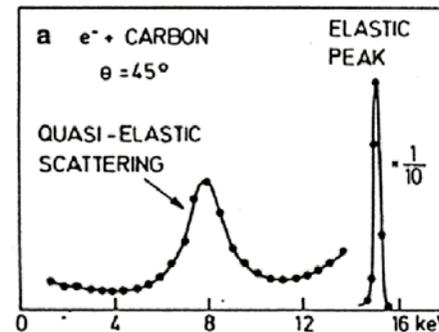
$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \left( 1 - \frac{Q^2}{\tilde{s}} + \frac{1}{2} \frac{Q^4}{\tilde{s}^2} \right)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad \tilde{s} = s - M_\mu^2$$

Von diesem Ausdruck ausgehend soll jetzt der WQS der ep-Streuung abgeleitet werden.

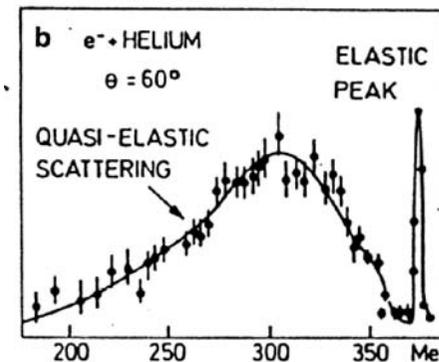
Plausibilität der Annahme von Konstituenten (Anleihe bei Atom/Kern-Physik):

Streuung von Elektronen an Atomen:



Elastische Streuung an einzelnen Hüllenelektronen

Streuung von Elektronen an Kernen:

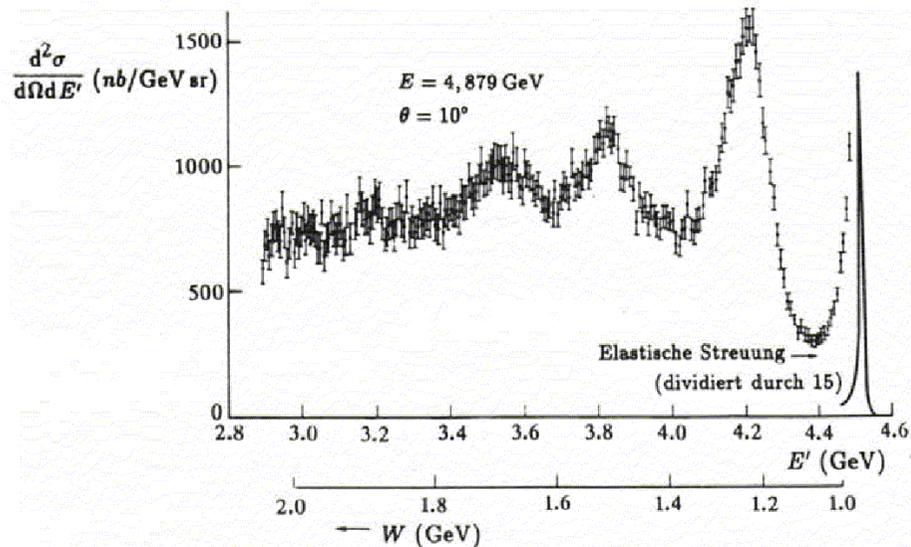


Elastische Streuung an einzelnen Kernbestandteilen (p,n)

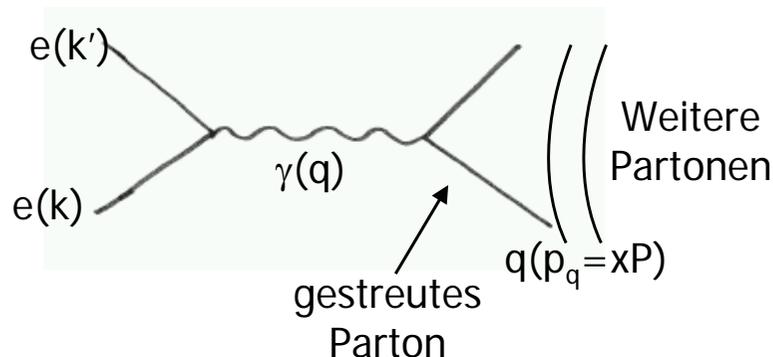
Inelastische Streuung an ausgedehntem Objekt = elastische Streuung an Bestandteil + Fermi-Verschmierung!

# 5.6 TIEFUNELASTISCHE ep-STREUUNG

Anwendung auf ep-Streuung (4.9-GeV-Elektronen auf Wasserstoff-Target):



→ Es gibt (punktförmige) Konstituenten im Proton!  
 → Modifikation des eμ-Bildes (P=Impuls des Protons):



Historische (aus der Hadronspektroskopie motivierte) Annahme:

- Es gibt drei Konstituenten mit Spin-1/2 (Valenzquarks u, u, d).
- Ladungen:  $Q_u=2/3$ ,  $Q_d=-1/3$ .
- Diese tragen Bruchteile  $x_i$ ,  $i=1,2,3$ ,  $0 < x_i < 1$ , des Protonimpulses.

Modifikation des eμ-WQS:

$$\left. \frac{d\sigma}{dQ^2} \right|_{eq} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \left( 1 - \frac{Q^2}{\tilde{s}_q} + \frac{1}{2} \frac{Q^4}{\tilde{s}_q^2} \right) Q_q^2$$

el. Quark-Ladung

Da die Streuung aufgrund kurzer Zeitdauer der WW inkohärent erfolgt:

$$\sigma_{ep} = \sum_i \sigma_{eq_i}$$

Problem: Was ist  $s_q$ ?

$$\tilde{s}_q = (k + p_q)^2 = (k + xP)^2 = k^2 + x^2 P^2 + 2xkP \approx 2xkP$$

$$s = (k + P)^2 = k^2 + P^2 + 2kP \approx 2kP$$

Also gilt:  $\tilde{s}_q = x s$

Definiere W'keit, Quark i im Impulsintervall  $x, x+dx$  zu finden, mit  $f_i(x)dx$  ("Partonverteilung") → WQS

# 5.6 TIEFUNELASTISCHE ep-STREUUNG

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} \right|_{ep} &= \sum_{i=1}^3 \left. \frac{d\sigma}{dQ^2} \right|_{eq_i} \cdot Q_{q_i}^2 \cdot f_i(x) = \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \left( 1 - \frac{Q^2}{\tilde{s}_q} + \frac{1}{2} \frac{Q^4}{\tilde{s}_q^2} \right) \cdot \sum_{i=1}^3 Q_{q_i}^2 \cdot f_i(x) \end{aligned}$$

Definition der **Inelastizität**  $y$ :

$$y = \frac{Pq}{Pk} \approx \frac{Q^2}{\tilde{s}_q}$$

Es gilt:

$$\frac{dy}{dQ^2} = \frac{1}{\tilde{s}_q} \Rightarrow \frac{d\sigma}{dy} = \tilde{s}_q \cdot \frac{d\sigma}{dQ^2}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\sigma}{dy dx} \right|_{ep} &= \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \left( 1 - y + \frac{1}{2} y^2 \right) \tilde{s}_q \cdot \sum_{i=1}^3 Q_{q_i}^2 \cdot f_i(x) \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \left( 1 - y + \frac{1}{2} y^2 \right) xs \cdot \sum_{i=1}^3 Q_{q_i}^2 \cdot f_i(x) \end{aligned}$$

Definiere<sup>(\*)</sup>: Strukturfunktionen  $F_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} F_2(x) &\equiv x \cdot \sum_i Q_i^2 \cdot f_i(x) \\ F_2(x) &= 2xF_1(x) \end{aligned}$$

Dann:

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dy dx} \right|_{ep} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} s \left( (1-y)F_2(x) + xy^2 F_1(x) \right)$$

Anmerkungen:

(\*) Wenn man den Wirkungsquerschnitt der elastischen ep-Streuung mit den Formfaktoren  $W_{1,2}$  betrachtet, dann kann man Formgleichheit zwischen elastischer und inelastischer Streuung mit diesen Definitionen erreichen. Dabei entsprechen  $W_{1,2}$  den Termen der elektrischen und magnetischen WW. Das sieht man schon im Elektron-Myon-WQS:

$$\sigma \propto \left( 1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

– Die Bedingung  $F_2(x) = 2xF_1(x)$  heisst Callan-Gross-Beziehung.

Sie gilt nur für Spin-1/2-Partonen. Im Falle von Spin-0-Teilchen wäre  $F_1=0$  (keine Spin-Spin-WW).

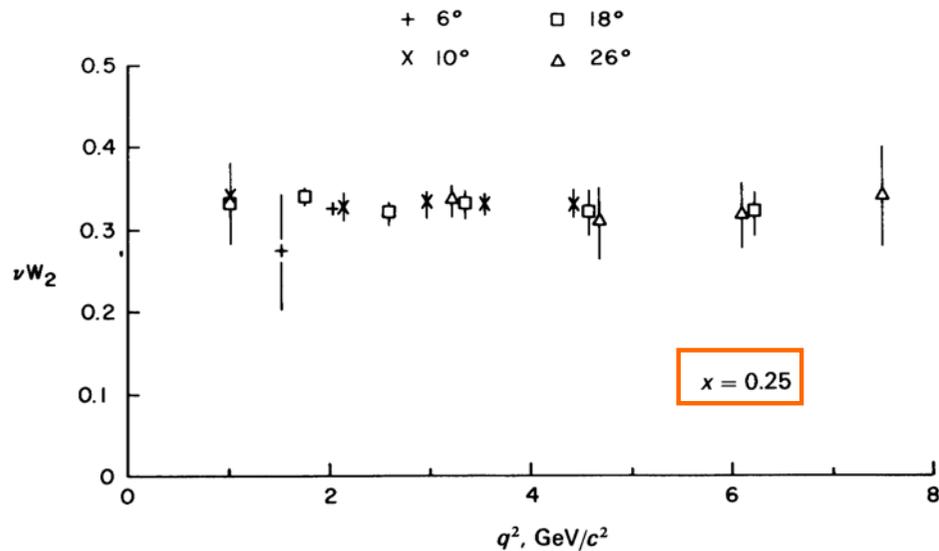
– Es gilt:  $F_2(x) \propto \sum_i Q_i^2$

$F_2$  beschreibt also "nur" die elektrische Struktur des Protons. In voller Rechnung mit schwacher WW und Interferenzen treten weitere Strukturfunktionen auf ( $F_3$ ), die auch schwache Anteile beschreiben.

– Prozess vollständig beschrieben durch  $x, y, Q^2$  (s, t, u).  $F_2$  hängt aber nur von  $x$  ab ("Scaling" – Skalenverhalten – auf jeder Größenskala sieht Struktur gleich aus – Struktur hängt nur von dimensionsloser Variable  $x$  ab).  $F_2$  unabhängig von Auflösungsvermögen der Photonsonde  $Q^2$ . Grund: "Es gibt nur drei Quarks im Proton".

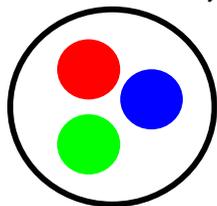
# 5.6 SCALING VON $F_2 = F_2(x)$

Anmerkung:  $\nu W_2 \sim F_2$ .

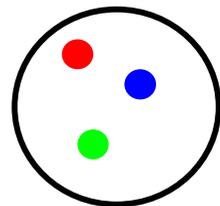


Für diese frühen Messungen der Strukturfunktion in fixed-target-Experimenten zeigte sich also wirklich das Skalenverhalten im Bereich  $x=0.25$ !

Erklärung: Unabhängig von Auflösung (Wellenlänge des Photons  $\lambda \sim 1/Q$ )



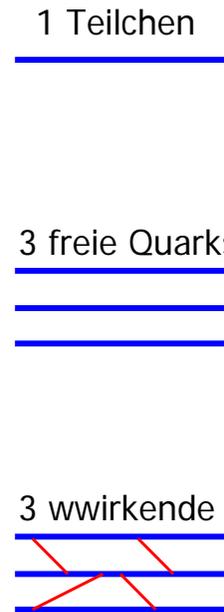
Hohe Auflösung



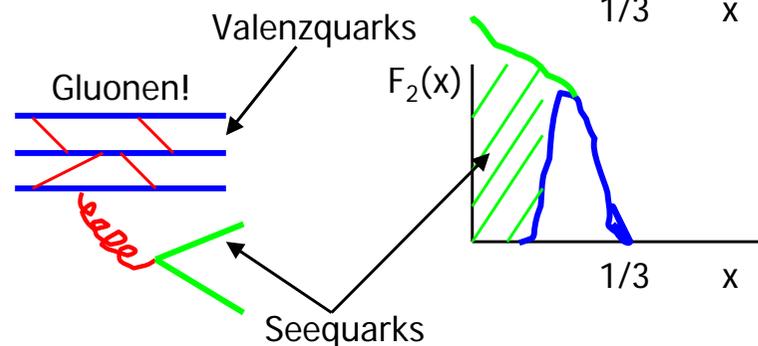
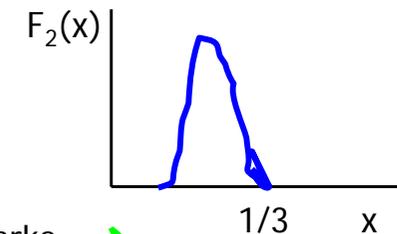
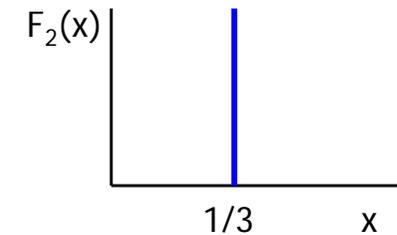
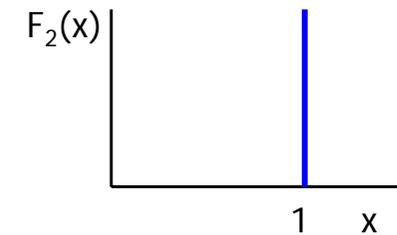
Niedrige Auflösung

Beide Male genau 3 Quarks! (in diesem  $Q^2/x$ -Bereich)

Proton =

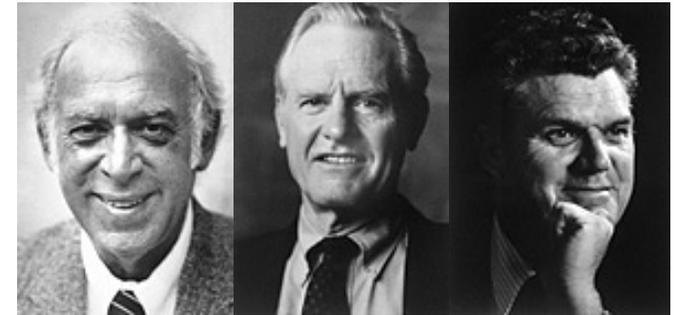
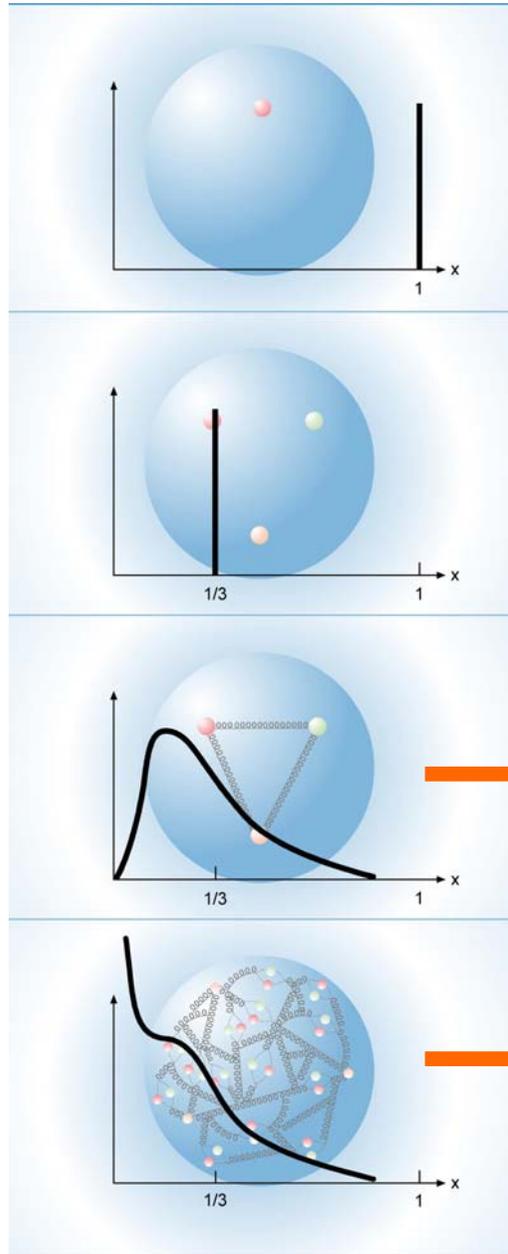


$F_2(x) =$



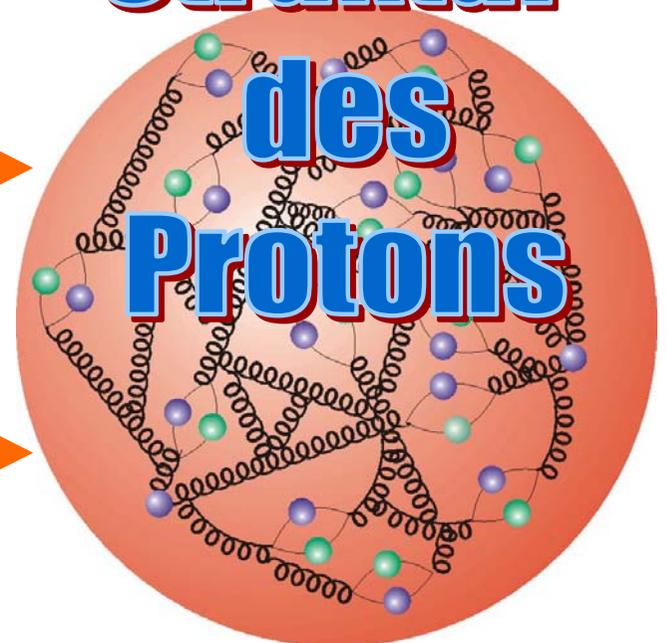
## 5.6 SCALING VON $F_2 = F_2(x)$

- $E \sim \text{MeV}$   
sehe Proton als Ganzes
- statisches Quarkmodell,  
Valenzquarks  
( $m \sim 350 \text{ MeV}$ )
- $E \sim m_p \sim 1 \text{ GeV}$   
sehe Valenzquarks  
und ihre Bewegung  
("scaling")
- $E \gg 1 \text{ GeV}$   
Quark- und Gluon-"See"  
wird sichtbar  
-> Skalenverletzung!



Jerome I. Friedman   Henry W. Kendall   Richard E. Taylor  
(Nobel 1990)

**Struktur  
des  
Protons**



# Wie bestimmt man die Protonstruktur?

Mikroskop:

niedrige Auflösung

-> kleines Instrument

hohe Auflösung

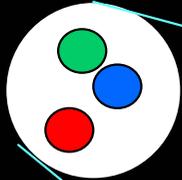
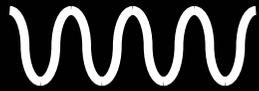
-> großes Instrument

**HERA =  
gigantisches  
Elektronen-  
Mikroskop**

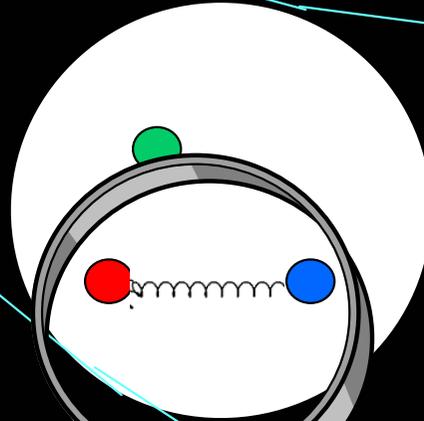


# Im Proton

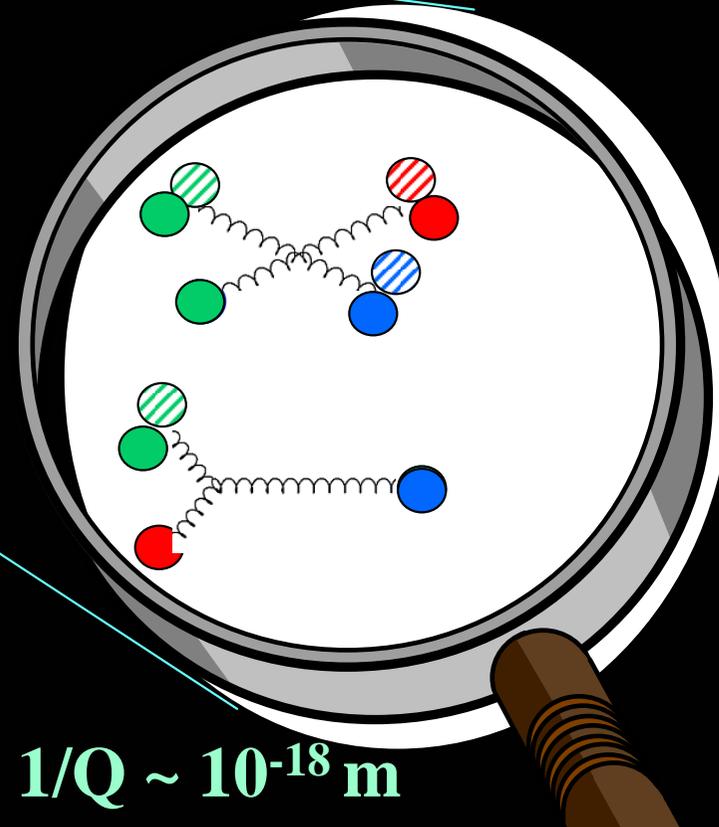
kleines  $Q^2$  ( $\lambda$  gross)



mittleres  $Q^2$  (mittleres  $\lambda$ )



grosses  $Q^2$  ( $\lambda$  klein)



Heisenberg'sche Unschärferelation erlaubt Erzeugung von Gluonen und  $q\bar{q}$ -Paaren für kurze Zeit.

Bei immer größerer Auflösung emittieren die quarks Gluonen, die wieder Gluonen emittieren, die Quarks emittieren, die .....

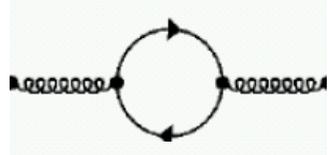
bei höchstem  $Q^2$ ,  $\lambda \sim 1/Q \sim 10^{-18}$  m

# 5.6 SKALENVERLETZUNG UND QCD

Die Existenz von Gluonen im Proton liefert Abhängigkeit von  $F_2$  von  $Q^2$ :  $F_2 = F_2(x, Q^2)$ !

Laut Heisenberg sind virtuelle Prozesse (mit Gluonen) auf kleinen zeitlichen/räumlichen Skalen erlaubt:

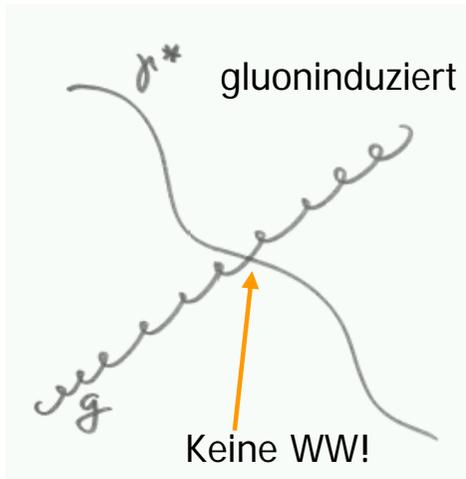
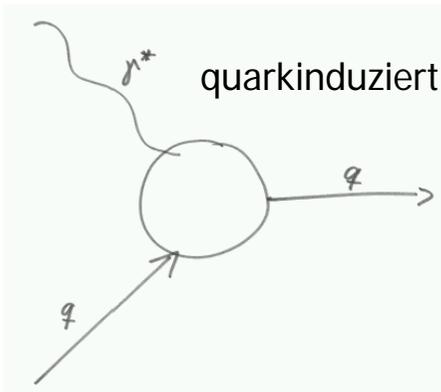
-  $g \rightarrow qq \rightarrow g$



-  $g \rightarrow gg \rightarrow g$

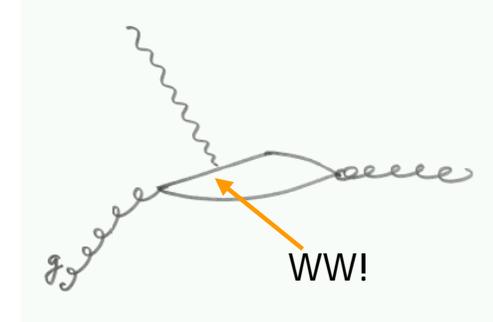
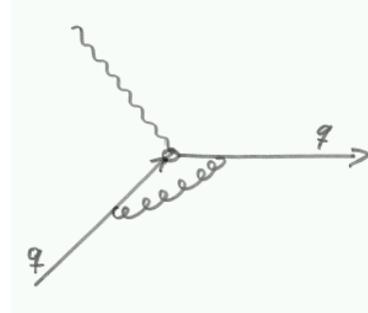


Falls kleines  $Q^2$ , schlechte Auflösung, nur grosse Strukturen sichtbar:

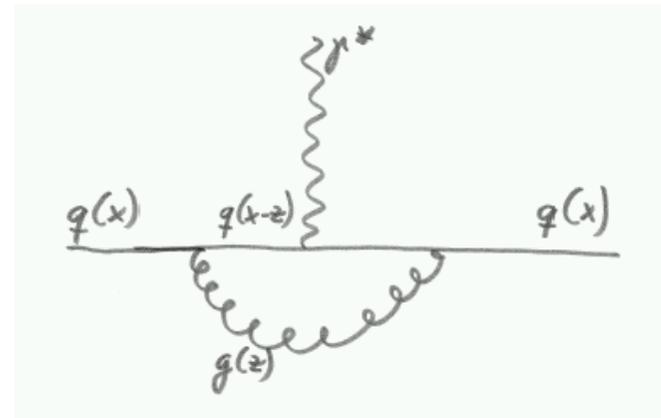


→ das Photon "sieht" nur das ursprüngliche Quark!  
 → Struktur von Valenzquarks bestimmt!

Falls hohes  $Q^2$ , gute Auflösung, auch kleine Raum/Zeit-Strukturen auflösbar:



- 1. Das Photon koppelt auch an das Gluon!
- 2. Die Kopplung an das Quark erfolgt bei einem anderen  $x$ -Wert  $z < x$ :

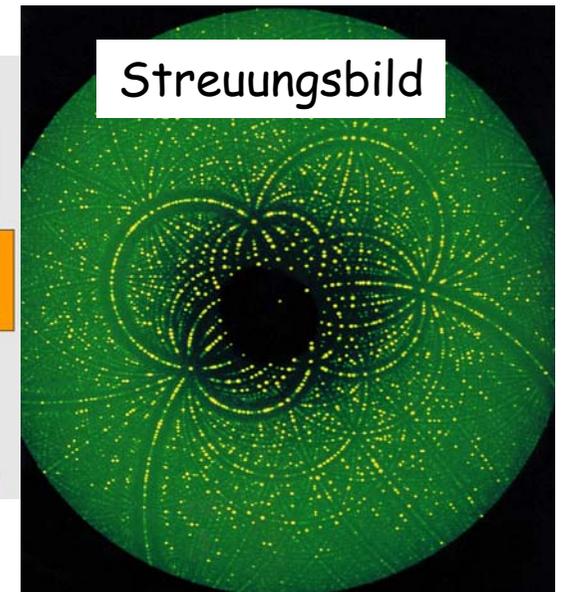
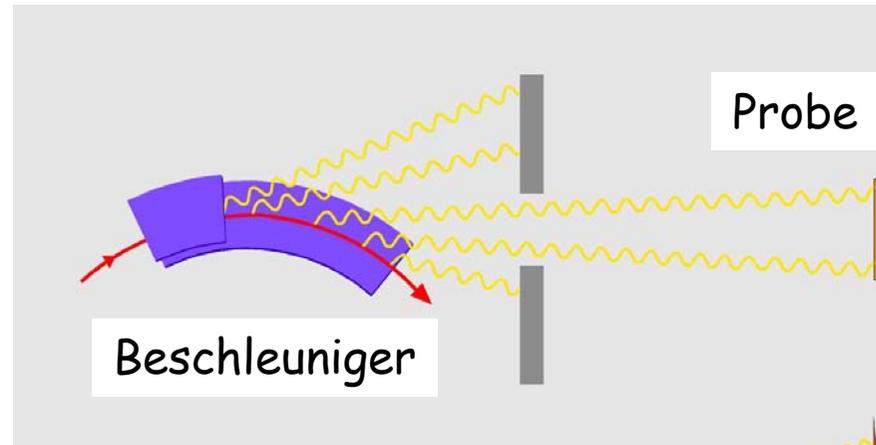


Salopp:  $F_2(x)$  sinkt falls  $Q^2$  steigt!  
 $F_2(z < x)$  steigt, falls  $Q^2$  steigt!

→  $F_2 = F_2(x, Q^2)$ !!! Skalenverletzungen!

# Wie vermisst man die Struktur eines Objekts?

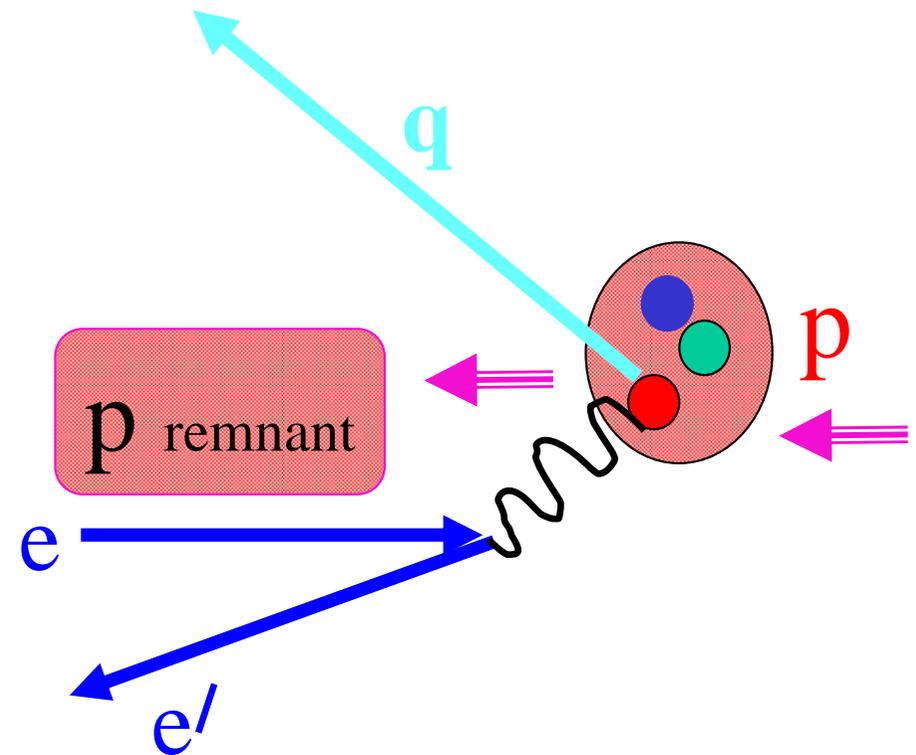
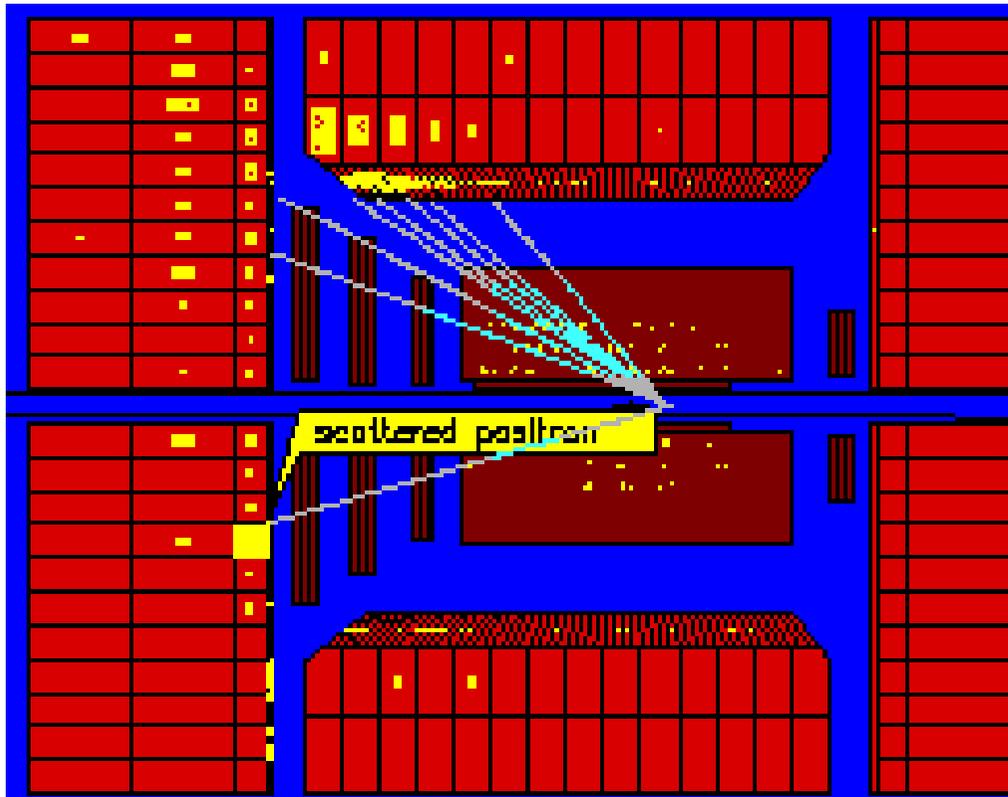
z.B. Röntgen-  
Strahlung  
(Hasylab)  
 $E \sim \text{keV}$



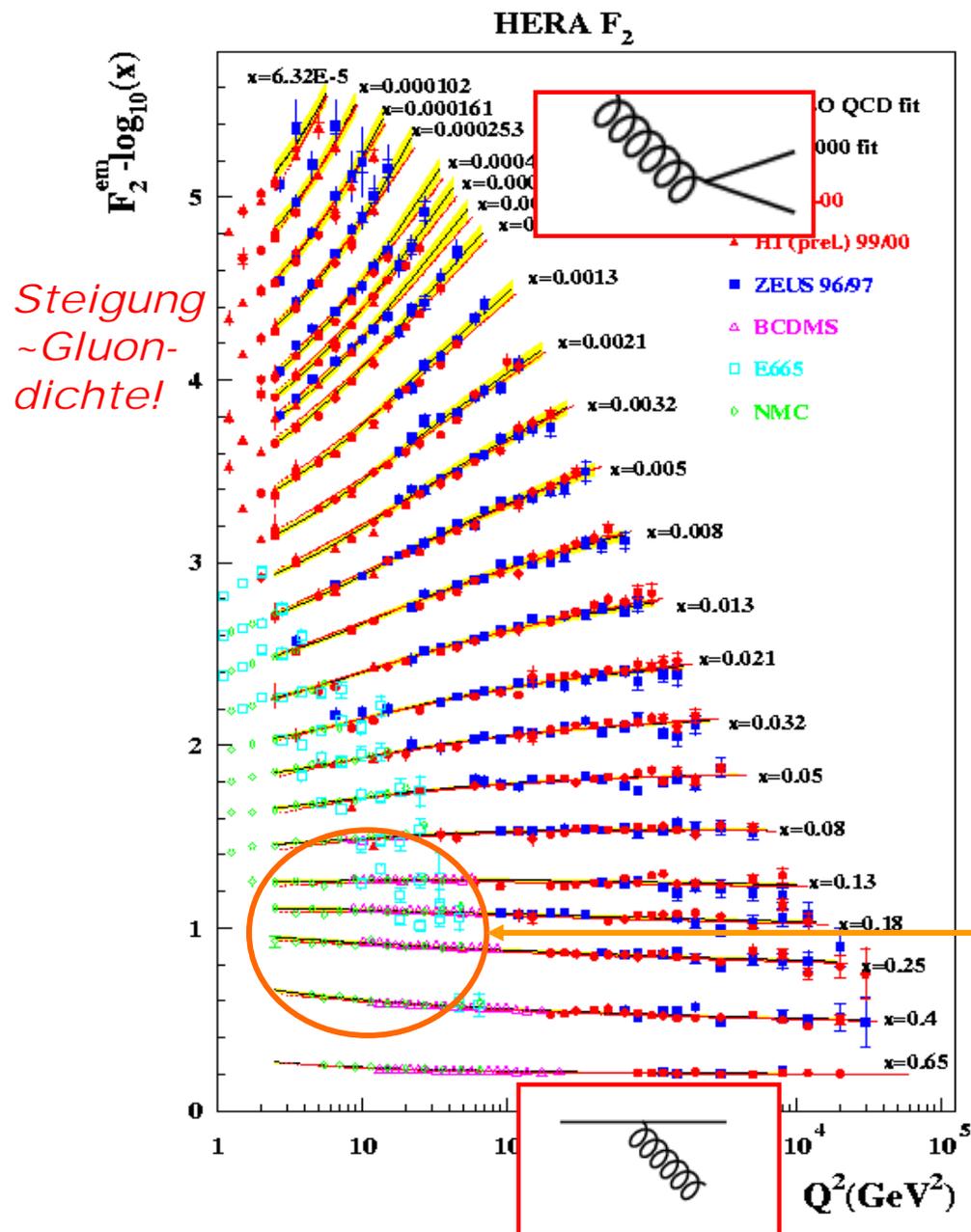
-> Struktur eines  
Biomoleküls



# Tief unelastische ep-Streuung bei HERA

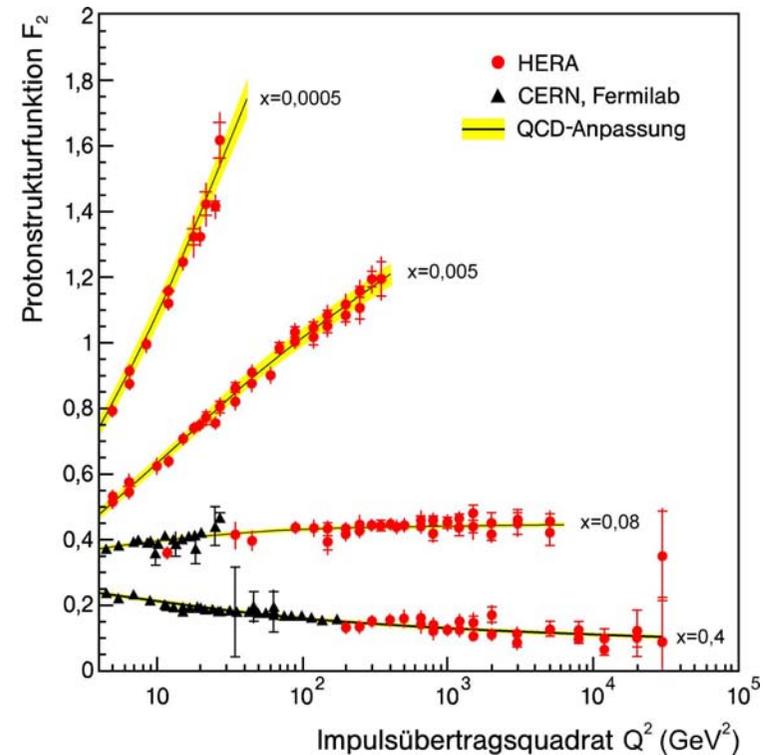
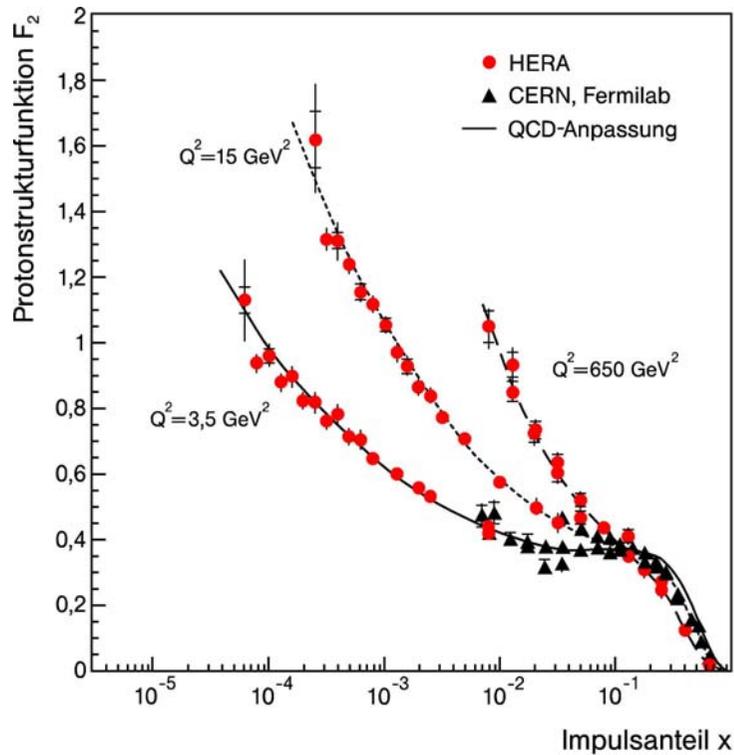


# 5.6 F<sub>2</sub> HEUTE (HERA)



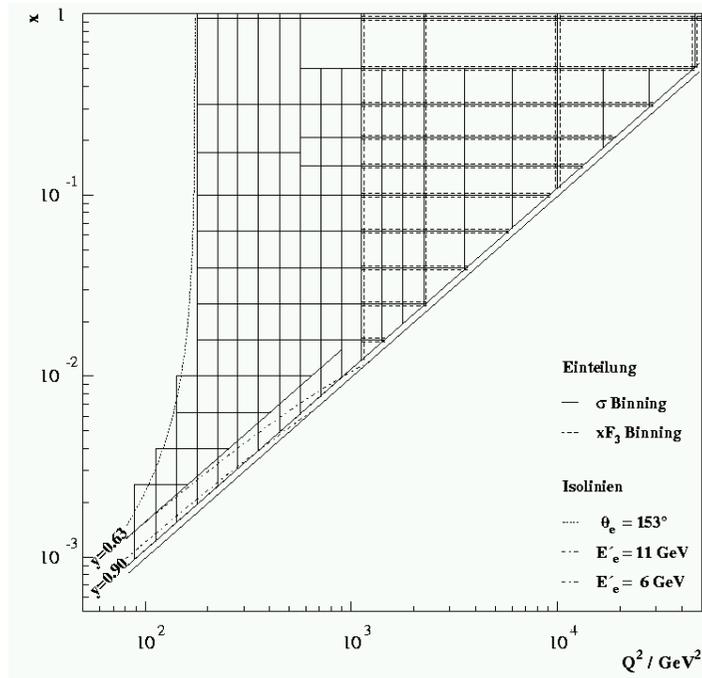
- Mehrere hundert Datenpunkte mit Genauigkeit 2%. Wunderbar von Theorie beschrieben!
- Klare Beobachtung von Skalenverletzungen bei grossen und kleinen  $x$ 
  - grosse  $x$ : Valenzquarks  $q(x)$  strahlen Gluonen ab, die wiederum in  $qq$ -Paare ( $q'(z < x)$ ) zerfallen. Von diesen Paaren sieht man mit steigendem  $Q^2$  mehr  $\rightarrow$  falls  $Q^2$  steigt, sinkt der Anteil der Quarks mit grossem  $x$ !
  - kleine  $x$ : Abgestrahlte Gluonen strahlen weitere Gluonen ab, und alle Gluonen zerfallen in Quark-Paare mit sehr kleinen  $x$ , von denen man mit steigendem  $Q^2$  mehr und mehr sieht  $\rightarrow F_2$  bei kleinen  $x$  steigt mit  $Q^2$  an.
- Die frühen fixed-target-Experimente haben zufällig bei den  $x$ -Werten gemessen, bei denen  $F_2$  flach in  $Q^2$  ist.

# 5.6 SKALENVERLETZUNG UND QCD



# 5.6 $F_2$ : VORGEHEN; SKALENVERLETZUNGEN

– Unterteile  $x$ - $Q^2$ -Ebene in "vernünftige" Bins:



Kinematik der ep-Streuung

$$y = \frac{Pq}{Pk}$$

$$Q^2 = -(k' - k)^2$$

$$x = \frac{Q^2}{2Pq}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{2\pi\alpha^2}{x(Q^2)^2} F_2(x, Q^2)$$

– Merke, dass bei kleinen  $y$ :

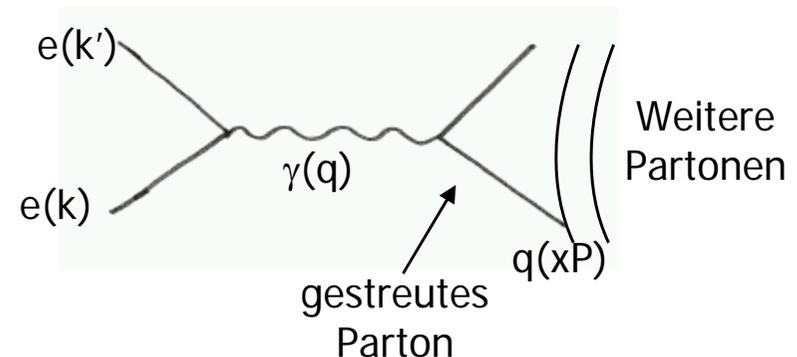
$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{2\pi\alpha^2}{x(Q^2)^2} F_2(x, Q^2)$$

– Also:

$$F_2(x, Q^2) \approx \left( \frac{2\pi\alpha^2}{x(Q^2)^2} \right)^{-1} \frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx}$$

$x, Q^2$  gemessen!

Zählen!



# 5.6 F<sub>2</sub>: SKALENVERLETZUNGEN

Verhalten von F<sub>2</sub> mit Q<sup>2</sup> (halb)quantitativ:

- Betrachte Änderung der Dichte von Quarks q(x, Q<sup>2</sup>) mit Impulsbruchteil x bei kleiner Änderung von Q<sup>2</sup> → Q<sup>2</sup> + dQ<sup>2</sup>. (z > x). Man sieht etwas mehr von Prozessen wie

$$u(z) \rightarrow u(x) + g(z-x)$$

$$g(z) \rightarrow u(x) + \bar{u}(z-x)$$

- z kann Werte zwischen x und 1 haben:

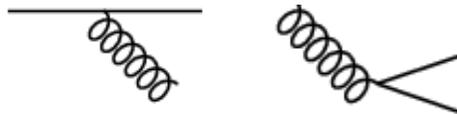
$$\int_x^1 \frac{dz}{z}$$

- Damit kann man zeigen, dass:

$$\partial u(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[ P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) u(z, Q^2) + P_{qg}\left(\frac{x}{z}\right) g(z, Q^2) \right] \partial \ln Q^2$$

Kopplung

Splitting-Funktionen (pQCD): W'keit, dass Parton mit z anderes Parton mit x abstrahlt.



Änderung von u bei x proportional zur Dichte der Quarks/Gluonen, die abstrahlen können.

- Unter der Annahme von nur u,d-Quarks (ist einfacher) und mit

$$F_2(x, Q^2) \equiv x \cdot \sum_i Q_i^2 \cdot f_i(x, Q^2)$$

$$= x \cdot \left( \frac{4}{9} u(x, Q^2) + \frac{4}{9} \bar{u}(x, Q^2) + \frac{1}{9} d(x, Q^2) + \frac{1}{9} \bar{d}(x, Q^2) \right)$$

folgt für F<sub>2</sub>:

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \cdot \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{x}{z} \left[ P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) F_2(z, Q^2) + 2z P_{qg}\left(\frac{x}{z}\right) g(z, Q^2) \sum_i Q_i^2 \right]$$

Man kann zwei Grenzfälle isolieren:

- große x: Gluondichte g(z) für z > x verschwindet →

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} \approx \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{x}{z} P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) F_2(z, Q^2)$$

- kleine x: Gluondichte dominiert das Proton →

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{x}{z} 2z P_{qg}\left(\frac{x}{z}\right) g(z, Q^2) \sum_i Q_i^2$$

# 5.6 PARTONVERTEILUNGEN AUS $F_2$

Typische Parametrisierungen der Abhängigkeit von  $F_2$  Ergebnis (Beispiel):  
 von den Partonverteilungen  $f_i(x, Q^2)$ :

$$q_v = A \cdot x^B \cdot (1-x)^C \cdot (1-Dx)$$

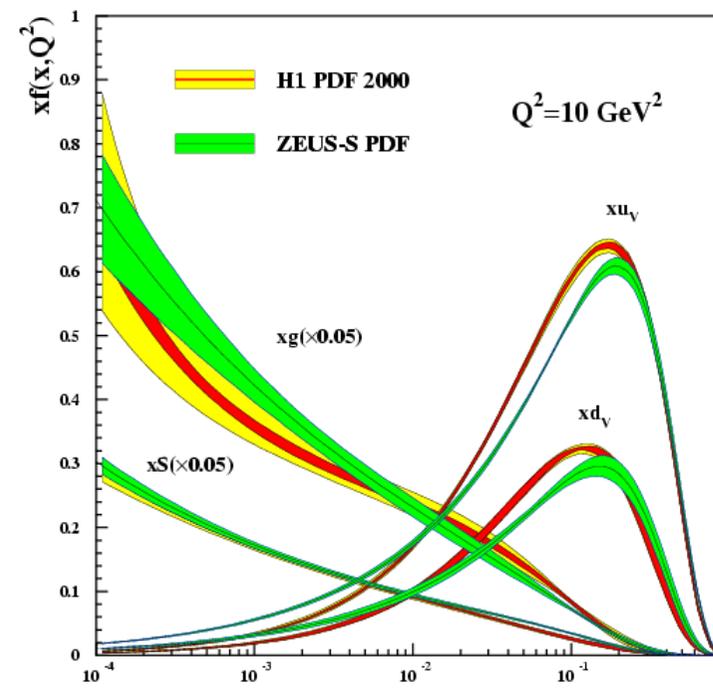
$$q_s = E \cdot x^F \cdot (1-x)^G \cdot (1+Hx + Ix^2 + Jx^3)$$

Durch Variation der Parameter kann die Vorhersage von  $F_2$  an die Daten angepasst werden. Der optimale Parametersatz liefert dann die Partonverteilungen (PDFs) des Protons.

(Anmerkung: Der theoretische Ansatz verlangt, dass die PDFs bei einer kleinen Startskala  $Q_0^2$  angenommen und dann mithilfe der Evolutionsgleichungen zu hohen Skalen  $Q^2 > Q_0^2$  entwickelt werden.)

Probleme:

- Anzahl der Parameter gross!
- Auswahl der Datensätze (fixed-target, Neutrino, Myon, HERA, Drell-Yan etc.).
- Abschätzung der Unsicherheiten.
- ...

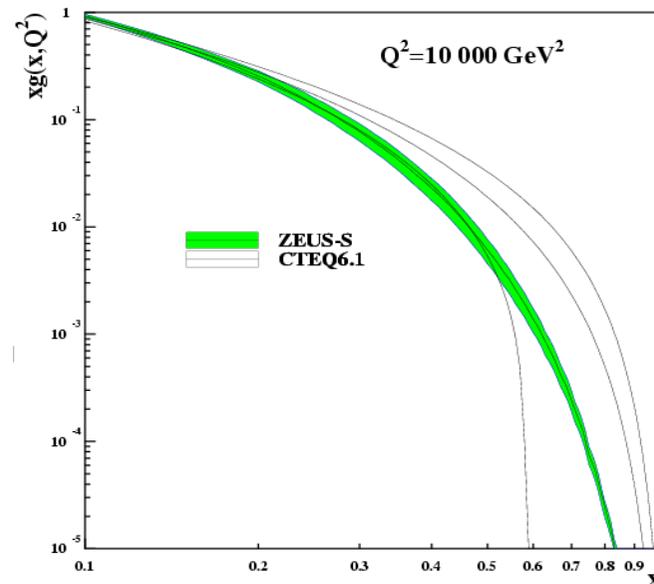
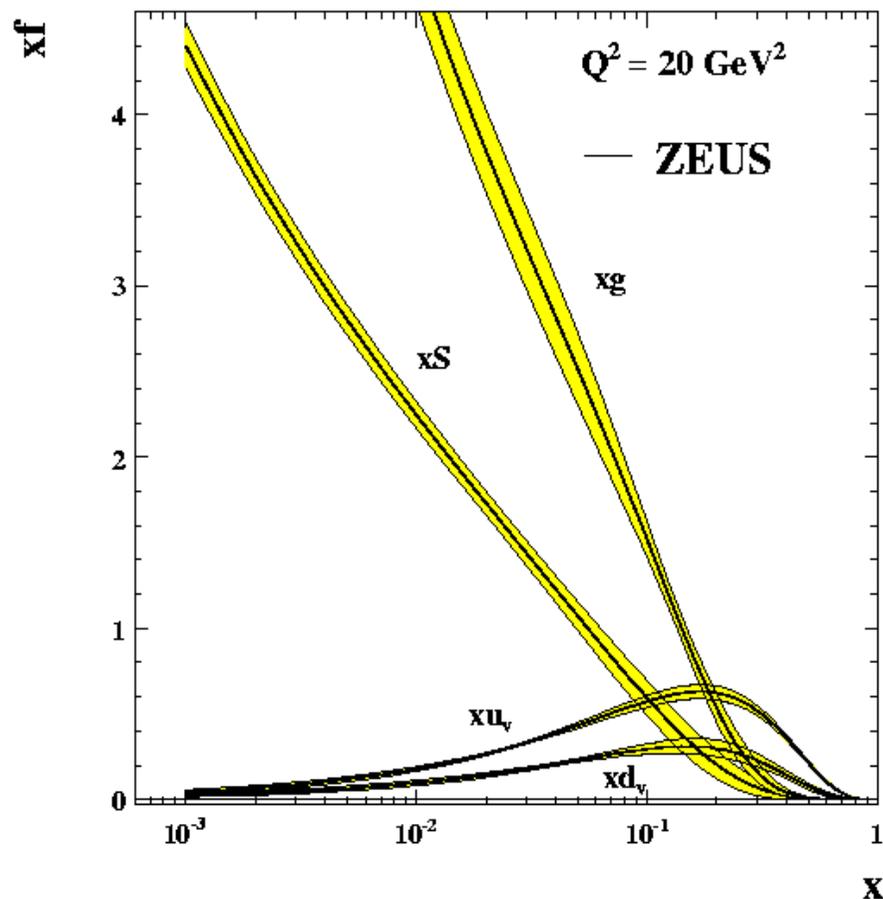


- Unterschiede durch verschiedene Datensätze und verschiedene Parametrisierungen.
- Verschiedene Gruppen: CTEQ, MRST, Alekhin, H1, ZEUS
- Unsicherheiten von wenigen Prozent (u bei moderaten x) bis 100% (g bei hohen x)  
 → Problem für LHC!

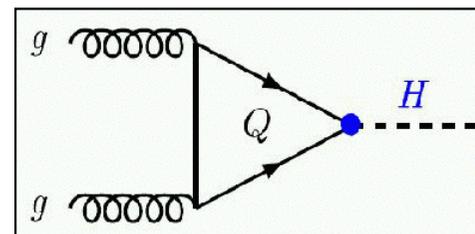
# 5.6 PARTONVERTEILUNGEN AUS $F_2$

“Ehrlichere” Darstellung: Man beachte das starke Ansteigen des Sees und der Gluonen zu kleinen  $x$  hin!

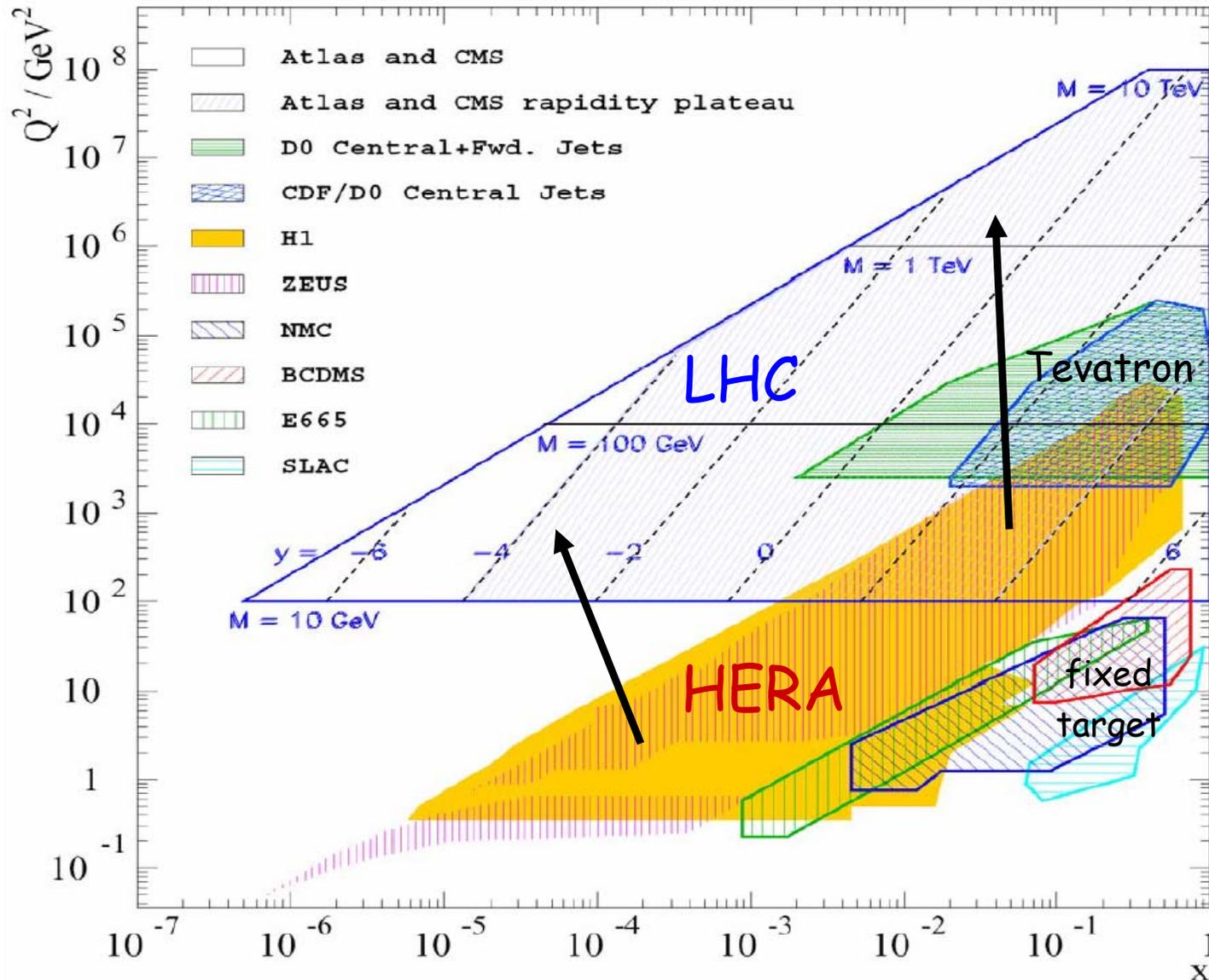
Zur Unsicherheit der Gluondichte:



Relevanz für z.B. Higgs-Produktion bei LHC?



# Kinematische Regionen: HERA im Vergleich mit LHC



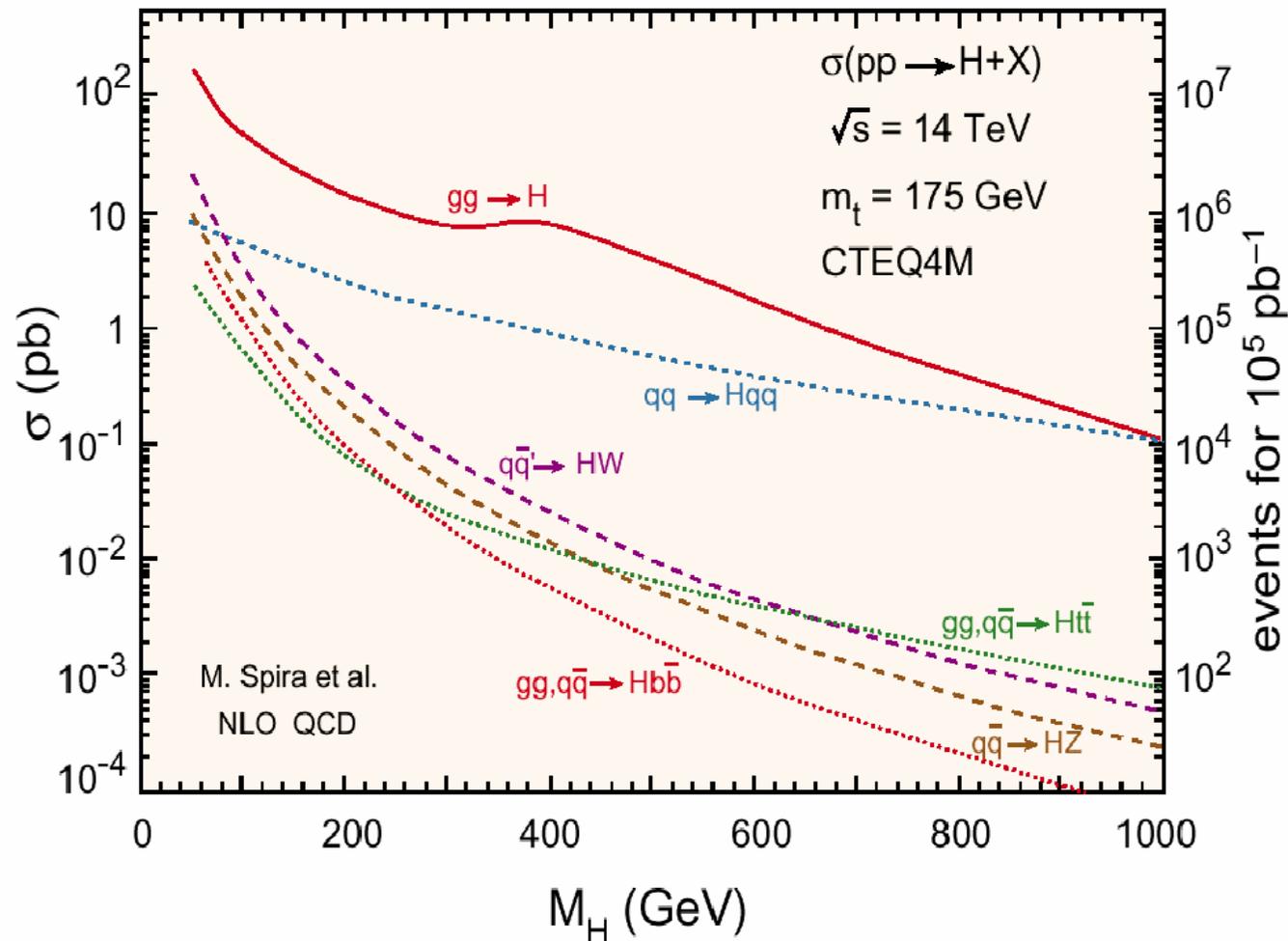
- Protonstruktur direkt gemessen für großen Teil des LHC-Phasenraums

- QCD-Evolution erfolgreich

-> sichere Extrapolation zu großem  $Q^2$  oder niedrigem  $x$

-> gute LHC-Vorhersagen

# Beispiel: Higgs-Wirkungsquerschnitt am LHC



Higgs = essentiell für  
Verständnis der Massen!  
(später)

**Kenntnis der Gluon- und Quark-Verteilungen essentiell!**

# 5.6 $\alpha_s$ IN SKALENVERLETZUNGEN VON $F_2$

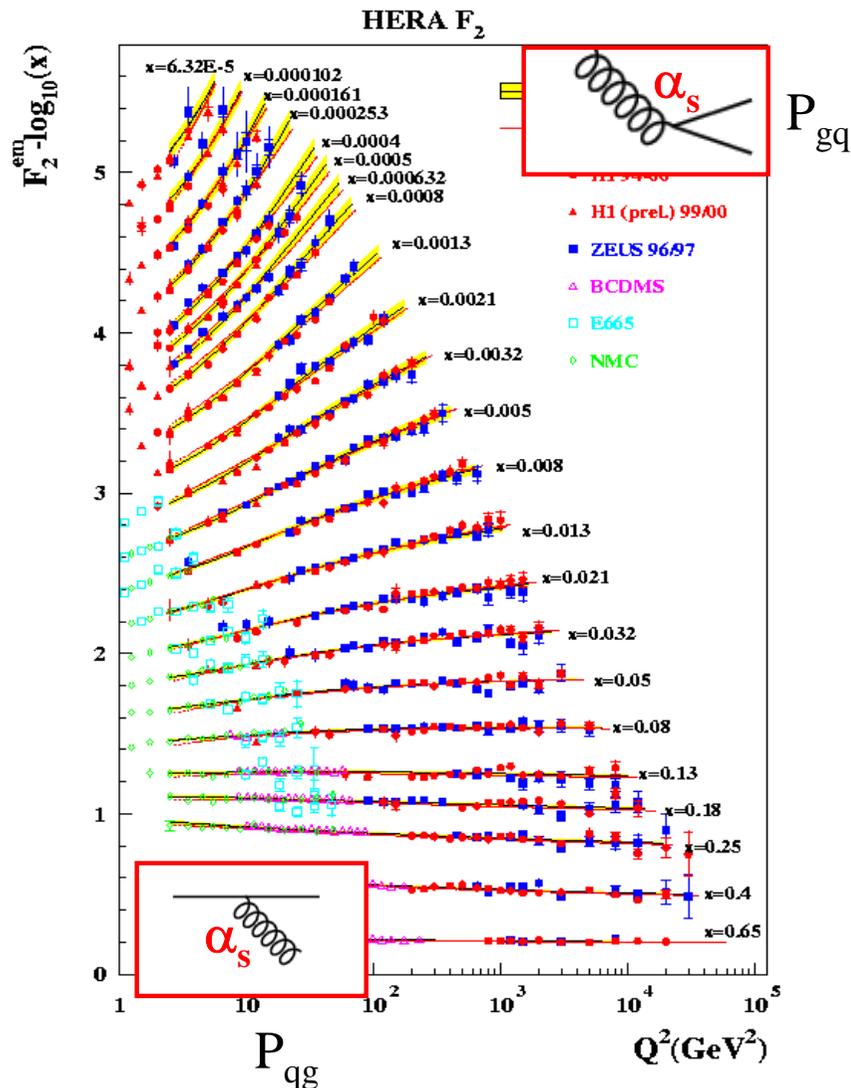
Erinnerung: Strukturfunktion  $F_2$ :

$$\sigma_{ep} \propto F_2(x, Q^2) \approx x \sum_{i=q, \bar{q}} f_i(x, Q^2) \cdot q_i^2$$

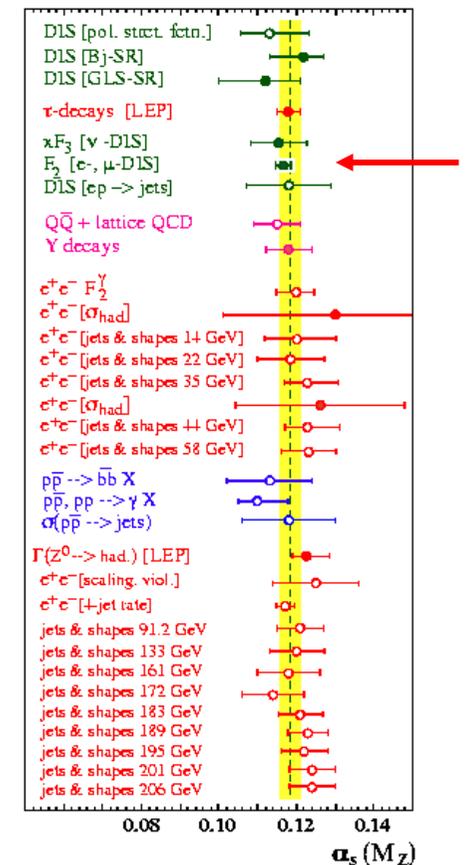
Wiederholung Theorie:

*Steigung*  $\frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} \propto -\alpha_s \cdot P_{qg} \cdot F_2(x, Q^2) + \alpha_s \cdot P_{gq} \cdot g(x, Q^2)$

Bei bekannter Strukturfunktion  $F_2$  (und ihrer Ableitung), bekannter Gluondichte  $g$  und bekannten Splitting-Funktionen  $P$  kann  $\alpha_s(Q^2)$  extrahiert werden (beachte:  $Q^2$  ist einzige harte Skala im Prozess).



Ergibt einen sehr genauen Wert für die starke Kopplung!



# 5.6 QPM UND SUMMENREGELN

Umbenennung:  $u(x)dx$ ,  $d(x)dx$  etc. ist Wahrscheinlichkeit, ein  $u, d$ -Quark mit Impulsanteil  $x$  zu finden.

Wir unterscheiden Valenzquarks  $uud$  und Seequarks aus Fluktuationen:  $uu, dd, ss, \dots$ . Damit und den als bekannt angenommenen Quarkladungen kann man die Strukturfunktion des Protons  $F_2^{ep}$  schreiben als:

$$F_2^{ep}(x) = x \left\{ \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \right\}$$

Annahme von Isospin-Invarianz ergibt beim Übergang zum Neutron:

$$u^n(x) = d^p(x) \equiv d(x), \quad d^n(x) = u^p(x) \equiv u(x)$$

$$s^n(x) = s^p(x) \equiv s(x)$$

Also:

$$F_2^{en}(x) = x \left\{ \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \right\}$$

Integration über  $x$  ergibt einige "Summenregeln":

$$\int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{3} [u(x) - \bar{u}(x)] - \frac{1}{3} [d(x) - \bar{d}(x)] \right\} = 1 \quad (p)$$

$$\int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{3} [d(x) - \bar{d}(x)] - \frac{1}{3} [u(x) - \bar{u}(x)] \right\} = 0 \quad (n)$$

Addition/Subtraktion dieser beiden Gleichungen:

$$\int_0^1 dx [u(x) - \bar{u}(x)] = 2 \quad \int_0^1 dx [d(x) - \bar{d}(x)] = 1$$

Da das Proton die Strangeness 0 hat muss gelten:

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0$$

Interessant: Impulssummenregel:

$$\int_0^1 dx \cdot x \cdot \{u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)\} = 1 - \varepsilon$$

Laut QPM sollte  $\varepsilon$  0 sein. Vernachlässigung von  $s$ :

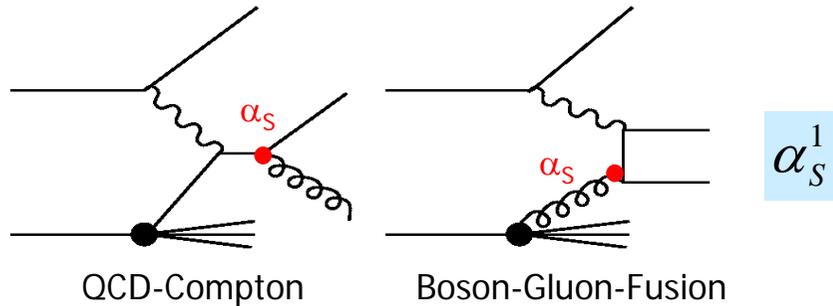
$$F_2^{eN} = \frac{1}{2} (F_2^{ep} + F_2^{en}) = \frac{5}{18} x [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x)]$$

$$\frac{18}{5} \int_0^1 F_2^{eN}(x) dx = 1 - \varepsilon$$

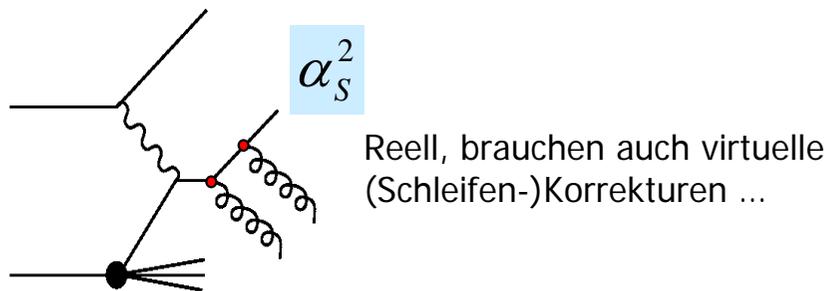
Experimentell: Wert des Integrals ca. 0.5! Den restlichen Impuls tragen die Gluonen! Da sie elektrisch neutral sind, tragen sie nicht zur EM-Struktur (also zu  $F_2$ ) bei.

# 5.6a $\alpha_s$ AUS JETS IN DIS

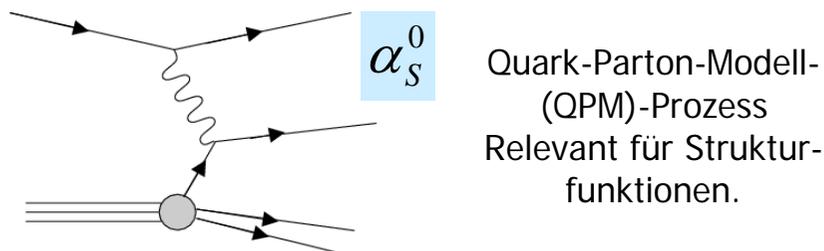
Wir betrachten folgende Prozesse in ep-Streuung



... und die Korrekturen höherer Ordnungen:



“Uninteressant” hingegen ist:



Wirkungsquerschnitt: Reihenentwicklung in  $\alpha_s$ :

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_s^n \cdot C_n = \overset{NLO}{\alpha_s^1 \cdot C_1 + \alpha_s^2 \cdot C_2}$$

Beitrag n=0 liefert kein  $\alpha_s$ . Experimentell: Breit-Bezugssystem!

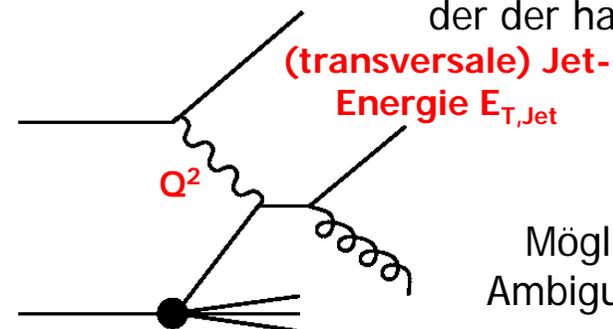
Koeffizienten  $C_n$  berechnen (später)

NLO=niedrigste (nullte)+erste Ordnungen

Vier wichtige Fragen:

1. Was ist die relevante Skala  $\mu$  für  $\alpha_s$ ?
2. Wie kann man die Prozesse der Ordnung  $\alpha_s^0$  ausschliessen (wenn man will)?
3. Was sind die Koeffizienten  $C_n$  (später)?
4. Wie sehen solche Ereignisse im Detektor aus?

Zu 1.) Relevante Skala: Wähle hohe Energieskala, bei der der harte Prozess abläuft.



Möglichkeiten:  $Q^2, E_T^2$   
Ambiguität – theo. Fehler!

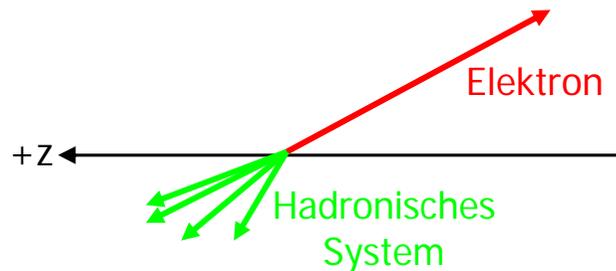
# 5.6a $\alpha_s$ AUS JETS IN DIS: $E_T$ , BREIT-SYSTEM

Zu 2.) Warum betrachtet man bei Hadron-Collidern wie HERA oder Tevatron immer die transversale Energie  $E_T$ ?

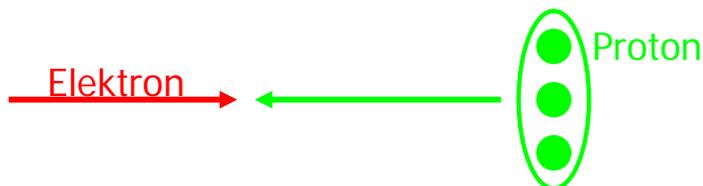
- Im Anfangszustand ist die Summe der Transversalenergien = 0:



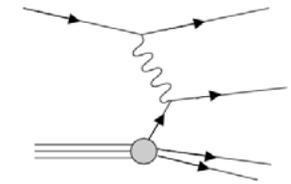
- Nach der Wechselwirkung gibt es Impulse senkrecht zur z-Achse (z.B. gestreutes Elektron) – diese charakterisieren also die Wechselwirkung!



- Aber man weiss nicht, welcher Bruchteil der (rein longitudinalen) Protonenergie in die Wechselwirkung floss (Quark-Bild!) – die Schwerpunktsenergie ist letztlich unbekannt!



Noch zu 2.) Wie unterdrücke ich experimentell die Anteile der Ordnung  $\alpha_s^0$ ?

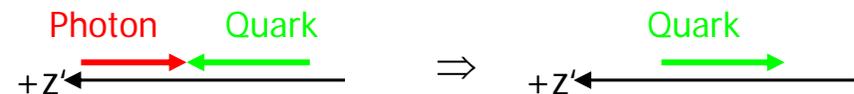


QPM-Ereignis im Labor-System:



→ das Quark (= der Jet) hat Transversalimpuls!

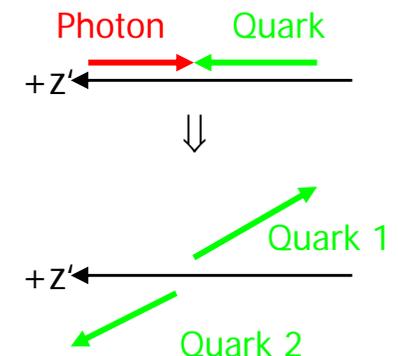
Jetzt Lorentz-Boost so, dass Photon und Quark auf der z'-Achse liegen:



Breit-Bezugssystem ("brickwall system"):

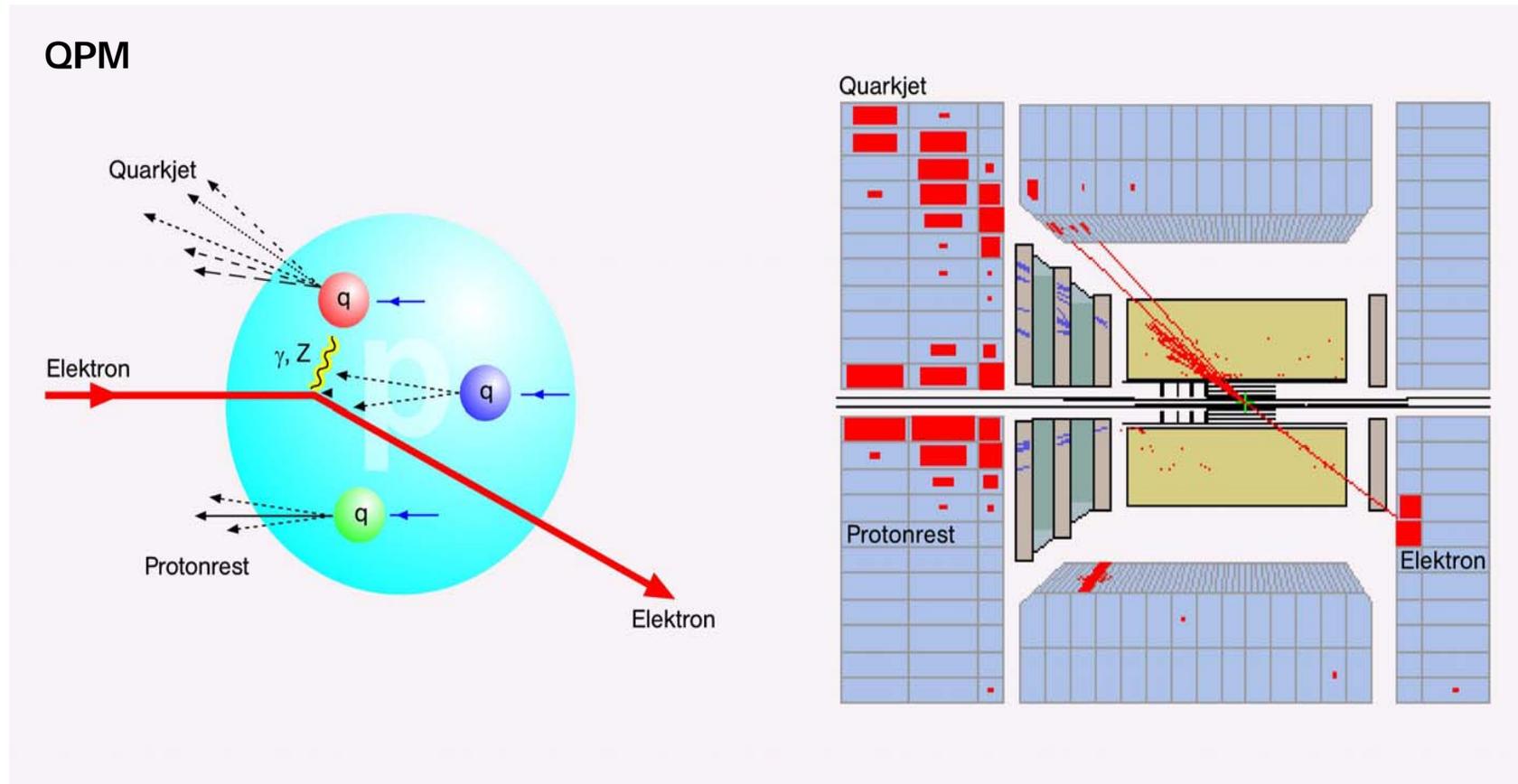
$$2x\vec{P} + \vec{q} = 0$$

QPM-Ereignisse geben KEINEN hadronischen (Jet)-Transversalimpuls relativ zu z' →  $E_T$ -Cut selektiert also "QCD"-Ereignisse (QCDC, BGF), denn:



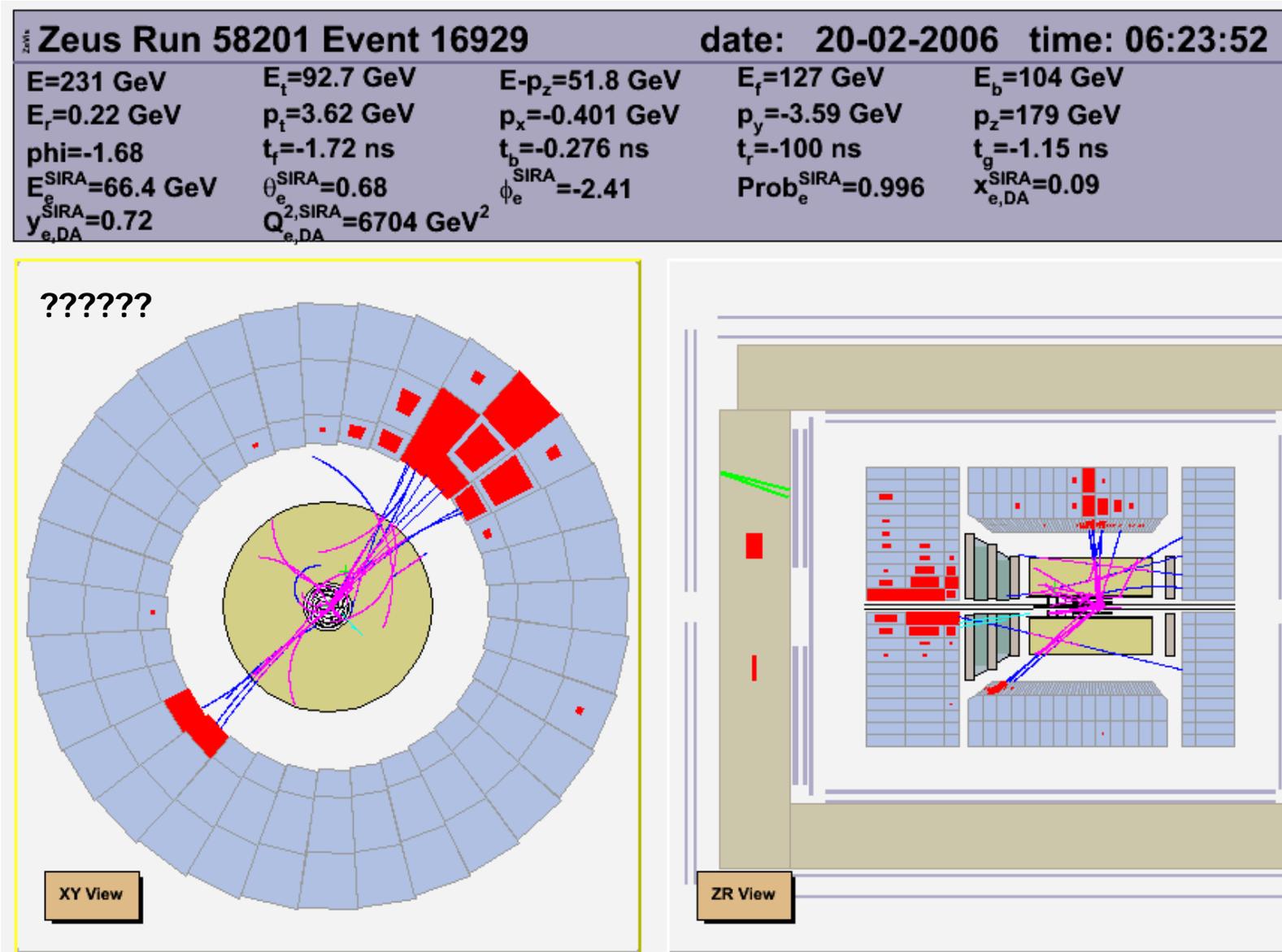
# 5.6a $\alpha_s$ AUS JETS IN DIS: EREIGNISSE

Zu 4.) Wie sehen solche Ereignisse im Detektor aus?



# 5.6a $\alpha_s$ AUS JETS IN DIS: EREIGNISSE

Zu 4.) Wie sehen solche Ereignisse im Detektor aus?



# 5.6a $\alpha_s$ AUS JETS IN DIS

Zu 3.) Was sind die Koeffizienten  $C_n$ ?

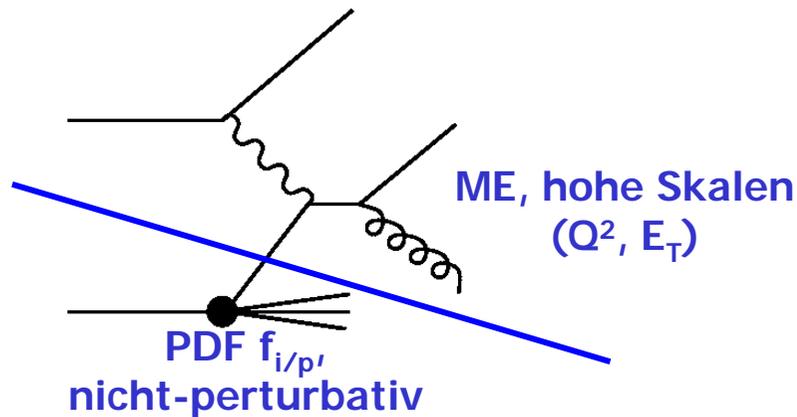
$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_s^n \cdot C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_s^n \cdot PDF \otimes ME$$

Partonverteilungen

Faltung

Matrixelement  
(WQS) der Parton-  
Parton-Steuerung

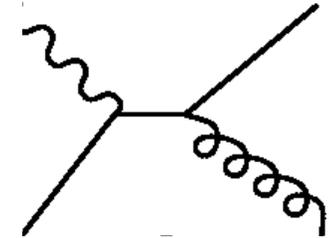
Faltung der "weichen" Anteile (PDF) und der harten (ME)  $\rightarrow$  **Prinzip der Faktorisierung!**



$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_s^n \cdot C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_s^n \cdot PDF \otimes ME = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_s^n \cdot \sum_i f_{i/p} \otimes \hat{\sigma}_{i,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_s^n \cdot \sum_i \int dx f_{i/p} \hat{\sigma}_{i,n} \end{aligned}$$

Salopp gesagt: Man kann beweisen (Faktorisierungstheoreme), dass man nur

- ME berechnen muss (leicht in pQCD, hängt von einlaufendem Impuls  $x$  ab)



- PDFs kennen muss (z.B. aus  $F_2$ )



- und dann beides "zusammenkleben" kann, um zum WQS zu kommen.

Die Faktorisierungseigenschaft ist sehr fundamental und keineswegs selbstverständlich!

# 5.6a $\alpha_s$ AUS JETS IN DIS: EXTRAKTION

Wie wird nun die starke Kopplung gemessen?

Einfachste Methode:

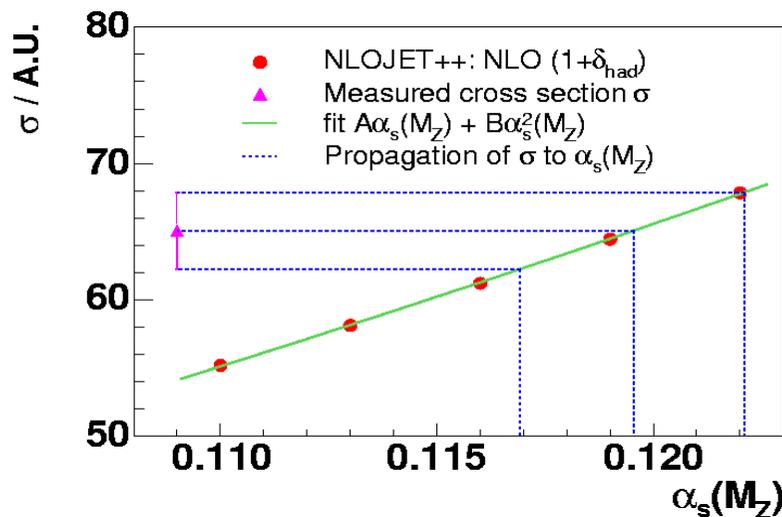
- Berechne den Wirkungsquerschnitt  $\sigma_i$  für jede Observable  $i$  als Funktion von  $\alpha_s(M_Z)$ .

$$\sigma_i^{theo}(\alpha_s(\mu_R^2)) = C_1 \cdot \alpha_s(\mu_R^2) + C_2 \cdot \alpha_s^2(\mu_R^2)$$

$$\sigma_i^{theo}(\alpha_s(M_Z^2)) = C'_1 \cdot \alpha_s(M_Z^2) + C'_2 \cdot \alpha_s^2(M_Z^2)$$

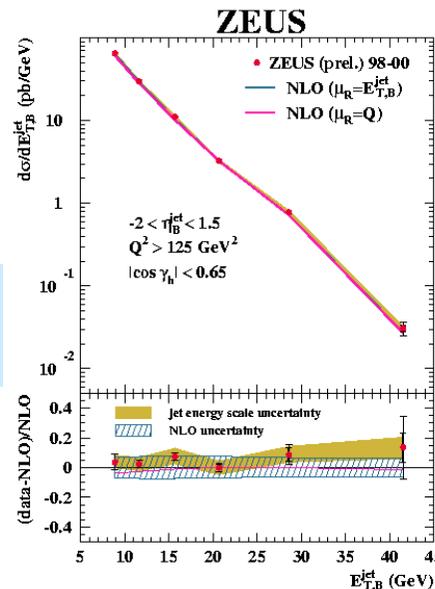
$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(M_Z^2)}{1 + \frac{(33 - 2n_f)}{12\pi} \alpha_s(M_Z^2) \ln \frac{Q^2}{M_Z^2}}$$

- Interpoliere die quadratische Funktion in  $\alpha_s(M_Z)$ :



- Bestimme das zum gemessenen  $\sigma_i^{data}$  gehörende  $\alpha_s(M_Z)$ .
- Kombiniere ggf. verschiedene  $\alpha_s(M_Z)$ -Werte.
- Oder evolviere zur "richtigen" Skala  $\mu^2$ .

Ergebnisse solcher Analysen bei HERA:

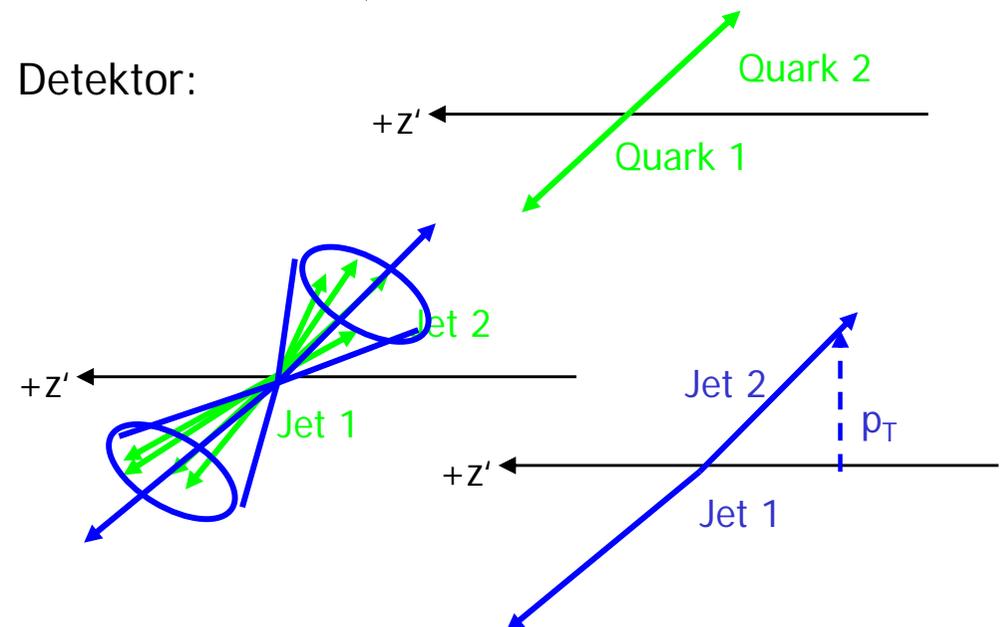


Gemessener Wirkungsquerschnitt für Produktion von 1+ Jets in einem bestimmten kinematischen Bereich.

Daten verglichen mit QCD-Rechnung in nächstführender Ordnung, NLO.

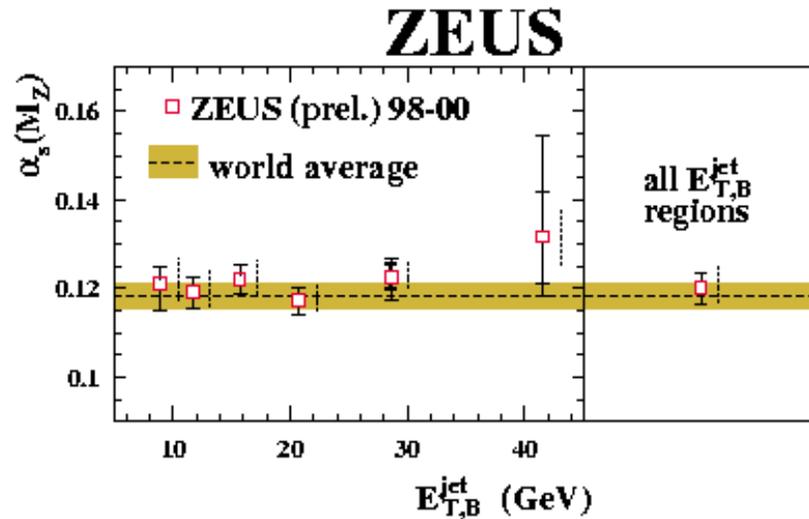
Unten: Verhältnis (Daten-NLO)/NLO Mass für Qualität der Beschreibung der Daten durch Theorie.

Detektor:

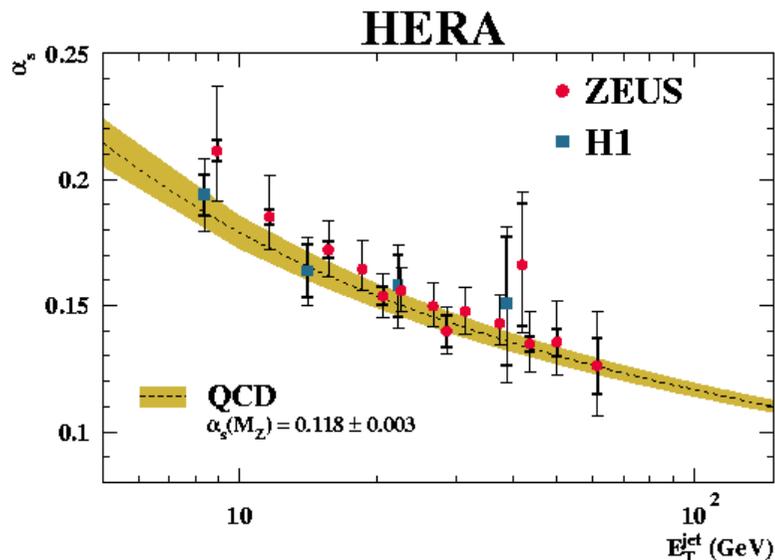


# 5.6a $\alpha_s$ AUS JETS IN DIS: EXTRAKTION

Resultierende  $\alpha_s(M_Z)$ -Werte und ihre Kombination:



Evolviert zur Skala  $E_T$ :



Man sieht also:

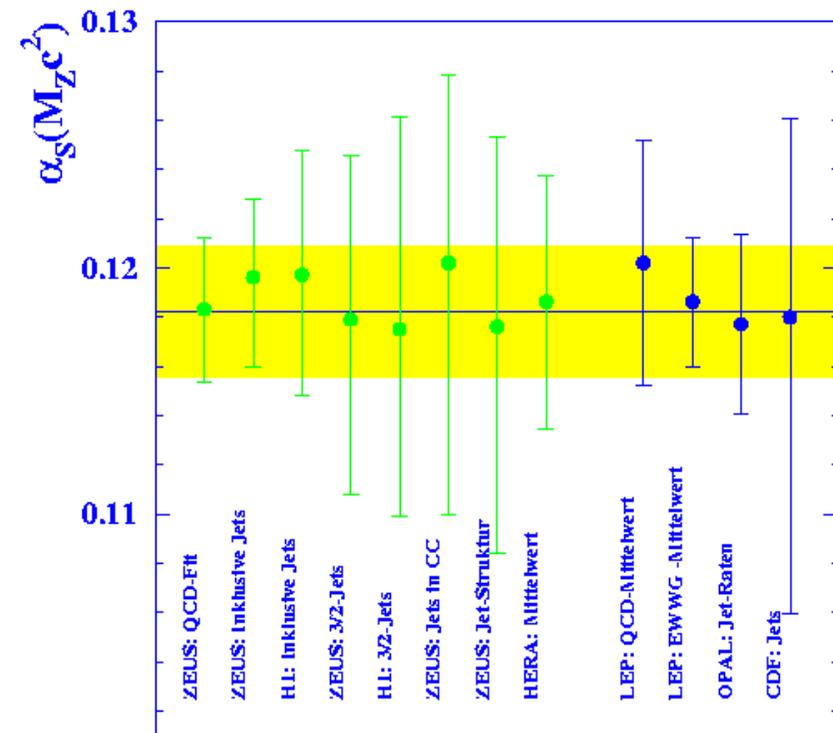
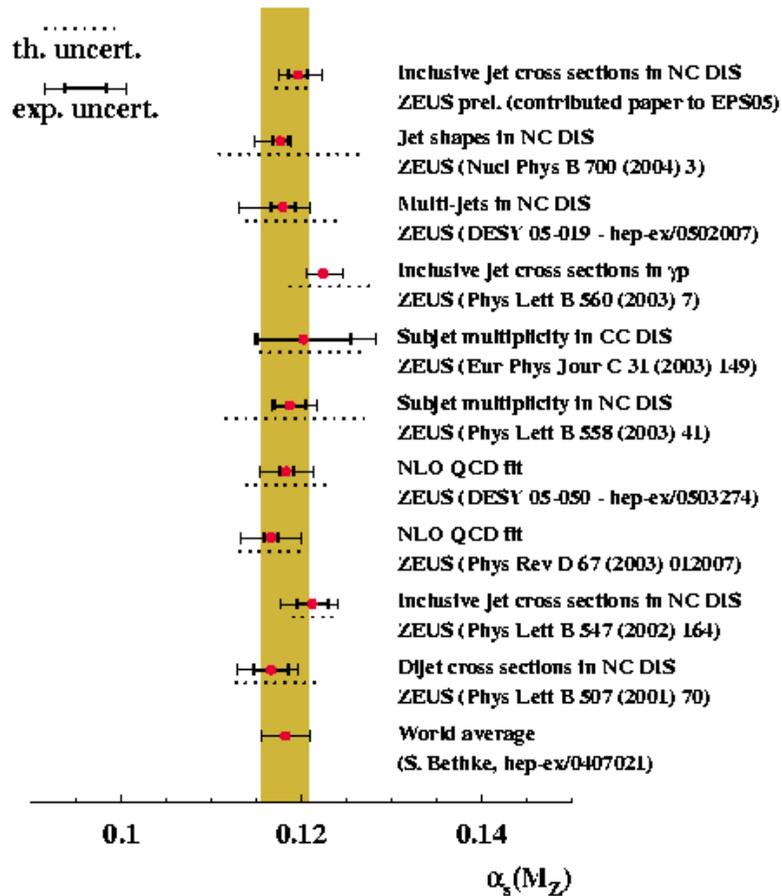
1. Die Werte verschiedener HERA-Messungen stimmen gut miteinander überein (Ufffff!)
2. Die Energieabhängigkeit wird gut von der Theorie (QCD in NLO) beschrieben:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \left[ 1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \left( \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right)}{\ln \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \right]$$

Führende Ordnung (LO)

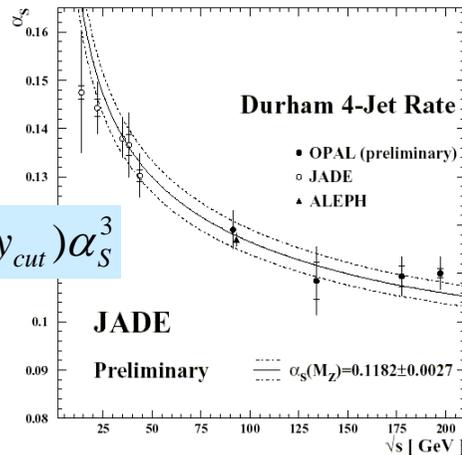
$\beta_0 = 11 - 2/3n_f$ ,  $\beta_1 = 51 - 19/3n_f$   
(Renormierungsgruppengleichung)

# 5.6a $\alpha_s$ bei HERA



# ZUSAMMENFASSUNG

Paradigmatische Bestimmung der starken Kopplung in der Elektron-Positron-Vernichtung in 4 Jets:



$$R_4(y_{cut}) \propto A(y_{cut})\alpha_s^2 + B(y_{cut})\alpha_s^3$$

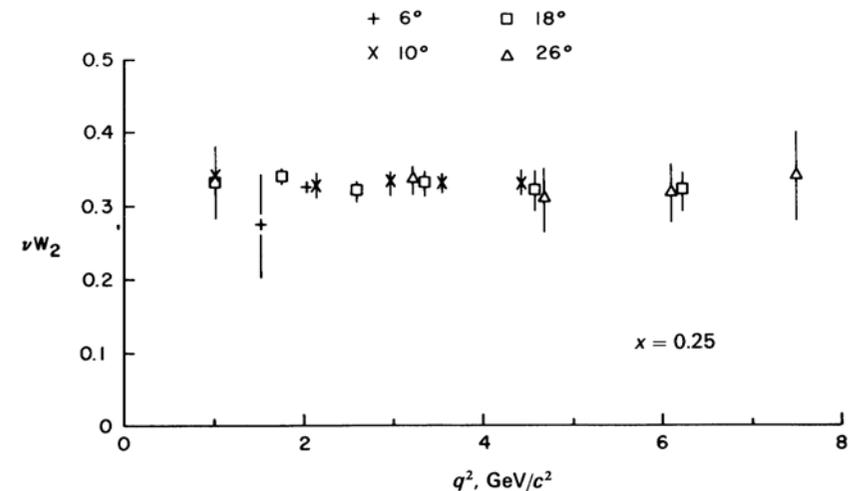
Mit Definition der kinematischen Variablen  $x, y, Q^2$  und der Strukturfunktionen  $F_2$  etc.:

$$F_2(x) \equiv x \cdot \sum_i Q_i^2 \cdot f_i(x)$$

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dydx} \right|_{ep} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} s \left( (1-y)F_2(x) + xy^2F_1(x) \right)$$

$F_2$  unabhängig von  $Q^2$  – Skalenverhalten!



Tiefunelastische Streuung: Aus der Hadronspektroskopie motivierte Annahmen:

- Es gibt drei Konstituenten mit Spin-1/2 (Valenzquarks  $u, u, d$ ).
- Ladungen:  $Q_u = 2/3, Q_d = -1/3$ .
- Diese tragen Bruchteile  $x_i, i=1,2,3, 0 < x_i < 1$ , des Protonimpulses.

Modifikation des  $e\mu$ -WQS:

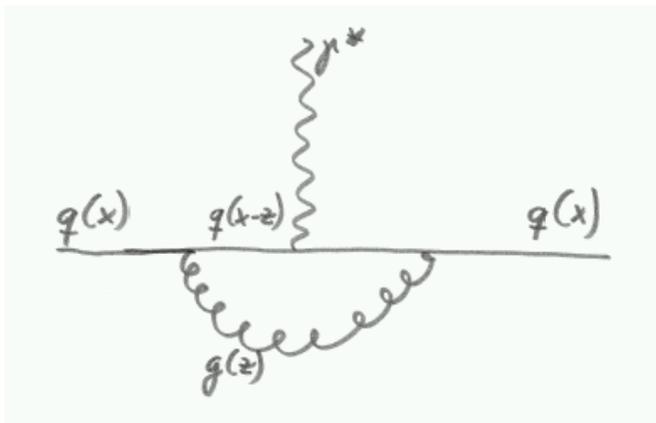
$$\left. \frac{d\sigma}{dQ^2} \right|_{eq} = \frac{4\pi\alpha^2}{(Q^2)^2} \left( 1 - \frac{Q^2}{\tilde{s}_q} + \frac{1}{2} \frac{Q^4}{\tilde{s}_q^2} \right) \cdot Q_q^2$$

$$\sigma_{ep} = \sum_i \sigma_{eq_i}$$

# ZUSAMMENFASSUNG

Durch Gluonen und Quantenfluktuationen kommt es zu Skalenverletzungen.

Grund: Bei verändertem Auflösungsvermögen  $Q^2$  sieht man mehr/weniger Strukturen auf kleinen Skalen.



Aktuelle präzise Messungen von  $F_2$  von HERA sehr gut mit QCD-Theorie verträglich!

wichtig für LHC!

