Übungen Teilchenphysik f. Fortg. SS 2009, Blatt 8

Ausgabe: 19.6.09, Abgabe: 26.6.09

1) Eichinvariante $SU(3)_C$-Farb-Wechselwirkung (4 Punkte)

Man betrachte die Lagrange-Dichte im Farbraum (Notation wie Skript S. 21). Unter lokalen $SU(3)_C$-Eichtransformationen des Feldes

$$\Psi(x) \;\rightarrow\; \Psi'(x) = G(x)\Psi(x) \;\text{ mit } \mathrm{G(x) = exp(\frac{i}{2}g_s\lambda_j\beta_j(x))},$$

wo λ^a (a = 1,...,8) die acht Generatoren der SU(3) sind, sollen auch Gradiententerme der Lagrange-Dichte invariant bleiben. Dazu verwende man, in Analogie zur QED, die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbf{1} + ig_s B_\mu = \partial_\mu \mathbf{1} + ig_s \frac{1}{2}\lambda_j G^j_\mu,$$

wo B_μ (3x3-Matrix mit 8 Komponenten G^j_μ) das Gluonenfeld darstellt.
a) Wie müssen sich dann die Eichfelder $G^j_\mu(x)$ transformieren? (Hinweis: man betrachte eine infinitesimale Transformation, $\beta(x) << 1$, und verwende die Eigenschaften der λ-Matrizen von Übung 7, Aufgabe 3)
b) Der eichinvariante Feldstärketensor $G^{\mu\nu}$ (mit Komponenten $F^{\mu\nu}_j$) der Gluonen-Eichfelder ist gegeben durch

$$G^{\mu\nu} = [D^\mu, D^\nu]/(ig_s)$$

(Damit ist dann auch der Beitrag $\frac{1}{4}F_{j,\mu\nu}F^{\mu\nu}_j = \frac{1}{2}Sp(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$ eichinvariant). Drücken Sie diesen Tensor aus als Funktion der Felder B^μ durch einsetzen der kovarianten Ableitung, und vergleichen Sie ihn mit dem Feldstärketensor der QED.

2) Die Gluon-Gluon-Kopplung (2 Punkte)

Die unter lokalen $SU(3)_C$-Transformationen eichinvariante Lagrangedichte

$$L = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}Sp(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}),$$

mit D_μ und $G^{\mu\nu}$ wie in Aufgabe 1 definiert, impliziert ebenfalls Gluon-Gluon-Kopplung. Man ermittle die Terme, die eine 3-Gluonen bzw. 4-Gluonen-Kopplung beschreiben. (Hinweis: Sie dürfen das Ergebnis von 1b) benutzen).

3) Λ_{QCD} und laufende Kopplungskonstante (4 Punkte)

In der Vorlesung (Skript Seite 23) wurden zwei verschiedene Formeln für das Laufen der starken Kopplungskonstanten hergeleitet, eine mit Verwendung einer beliebigen Referenzskala, und eine als Funktion einer dimensionsbehafteten Konstanten, Λ_{QCD}.
a) Zeigen Sie durch einsetzen einer geeigneten Beziehung zwischen der Referenzskala und Λ_{QCD} die Äquivalenz der beiden Formeln.

b) Berechnen Sie Λ_{QCD} für $N_f = 3, 4, 5$ unter Verwendung von $\alpha_s(M_Z) = 0.1176$. Bei welcher Quark-Flavourzahl wäre α_s konstant?
c) Überlegen Sie sich graphisch oder mathematisch eine anschauliche Bedeutung von Λ_{QCD} und legen Sie diese dar. Begründen Sie, warum es physikalisch kein Widerspruch ist, die dimensionslose Kopplungskonstante durch einen dimensionsbehafteten Parameter zu parametrisieren. Warum funktioniert dies nicht für die QED?

4) Kinematik der Elektron-Proton-Streuung (2 Punkte)

Zeigen Sie, unter Verwendung der in der Vorlesung gegebenen Definitionen fuer die ep-Schwerpunktsenergie s, den Photon-Impulsübertrag Q^2, die Skalenvariable x, und die Inelastizität y, die Beziehung

$$Q^2 = xys.$$

(Alle Massen sollen vernachlässigt werden).

5) SU(3)-Farbkopplungen und Feynmangraphen (in der Übung)

In der QCD spielen 3 verschiedene grundlegende Kopplungen und ihre Farb-Vorfaktoren eine Rolle.
a) $g \to gg$: $C_A \alpha_s$ mit $C_A = 3$ (Anzahl der Farben)
b) $g \to q\bar{q}$: $T_F \alpha_s$ mit $T_F = \frac{1}{2}$
c) $q \to qg$: $C_F \alpha_s$ mit $C_F = \frac{4}{3}$
Betrachten Sie die führenden Feynmandiagramme für die Prozesse $gg \to gg$, $gg \to b\bar{b}$, $gg \to q\bar{q}$, $gg \to q\bar{q}g$, $gg \to q\bar{q}\gamma$ und $gg \to ggg$ bei LHC-Energien und schätzen Sie die *relativen* Wirkungsquerschnitte ab.