Übungen Teilchenphysik f. Fortg. SS 2009, Blatt 7

Ausgabe: 12.6.09, Abgabe: 19.6.09

1) reduzible Gruppendarstellung (in der Übung)

In der Vorlesung wurde eine reduzible Matrixdarstellung der Permutationsgruppe S_3 gegeben. Führen Sie, wie dort angedeutet, eine Variablentransformation durch, die diese Darstellung Block-diagonalisiert, und geben Sie die Matrizen explizit in dieser Darstellung an. Interpretieren Sie das Ergebnis.

2) Baryon-Multipletts (4 Punkte)

Beginnen Sie mit der Quark-Darstellung des Δ^{++}-Baryons. (Die Spin- und Farbfreiheitsgrade sollen hierbei nicht beachtet werden). Wenden Sie die Flavour-SU(3)-Schiebeoperatoren

$$I^+ : u \to 0, d \to u, s \to 0$$

$$I^- : u \to d, d \to 0, s \to 0$$

$$U^+ : u \to 0, d \to 0, s \to d$$

$$U^- : u \to 0, d \to s, s \to 0$$

auf diesen Zustand an, und erzeugen Sie damit alle Zustände des Spin 3/2 Baryon-Dekupletts. Machen Sie sich jeweils Gedanken um die geeignete Normierung der Wellenfunktion.

3) Eigenschaften der $\mathbf{SU(3)}_C$-Generatoren (3 Punkte)

Man kann eine allgemeine SU(3)-Transformation $G(x)$ in der Form

$$G(x) = e^{\lambda^a \alpha_a(x)}$$

schreiben, wobei die Summation über die acht Generatoren λ^a, $a = 1, ..., 8$ impliziert ist. Die (festen) Matrizen λ^a stellen eine Basis dar, in der die 8 Komponenten $\alpha_a(x)$ die jeweilige SU(3)-Transformation eindeutig charakterisieren. Bei der Farb-SU(3)$_C$, wenn $G(x)$ auf die drei-Farb-komponentige Wellenfunktion eines Quarks wirkt, sind die λ^a 3x3 komplexe Matrizen und entsprechen den 8 Gluonen. Die Eigenschaften der Matrizen λ^a lauten dann:

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \lambda_a^\dagger = \lambda_a \\
&(2) \qquad Sp(\lambda^a) = 0 \\
&(3) \qquad Sp(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab} \\
&(4) \qquad [\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda_c \\
&(5) \qquad \{\lambda^a, \lambda^b\} = \frac{4}{3}\delta^{ab}\mathbf{1} + 2id^{abc}\lambda_c.
\end{aligned}
$$

Machen Sie sich Gedanken über die "Metrik" des Farbraumes, und entsprechend über die (Un)Bedeutung der unteren und oberen Indizes.

Die Eigenschaften (1) bzw. (2) bedeuten, dass G unitär bzw. unimodular ist, während (4) bzw. (5) die Struktur der Lie-Algebra definieren, wobei die 512 reellen Zahlen f^{abc} und d^{abc} die Strukturkonstanten sind. Zeigen Sie unter Verwendung der anderen 4 Relationen, dass die "Orthogonalitätsrelation" (3) erfüllt ist.

4) Bestimmung der Strukturkonstanten der $\mathbf{SU(3)}_C$ (5 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Relationen (3),(4) die antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{abc} der $SU(3)_C$ unter Benutzung der in der Vorlesung gewählten Darstellung der λ^a.