4. Vorlesung

Zusammenfassung: semiklassische Betrachtungen

+ 2. Übungsaufgabe

4. Effektive Photon-Masse
   - Lagrange-Formalismus und Proca-Gleichung

     Literatur: z.B. Ebert, Eichtheorien; Jackson, Classical Electrodynamics
5. Masse in der Quantenelektrodynamik
   - Kurzeinführung in die QED (Erinnerung)

     Literatur: z.B. Bjorken-Drell, Relativistische Quantenmechanik
     - Lagrange-Funktion, Massenterm, Photonfeld und Wechselwirkung

       siehe auch Vorlesung „Teilchenphysik f. Fortgeschrittene"
   - Renormierung und ihre Interpretation
     - Regularisierung über Abschneideparameter
     - Dimensionale Regularisierung
   - Die „laufende" Elektronmasse
   - Die Elektronmasse: was wissen wir wirklich?

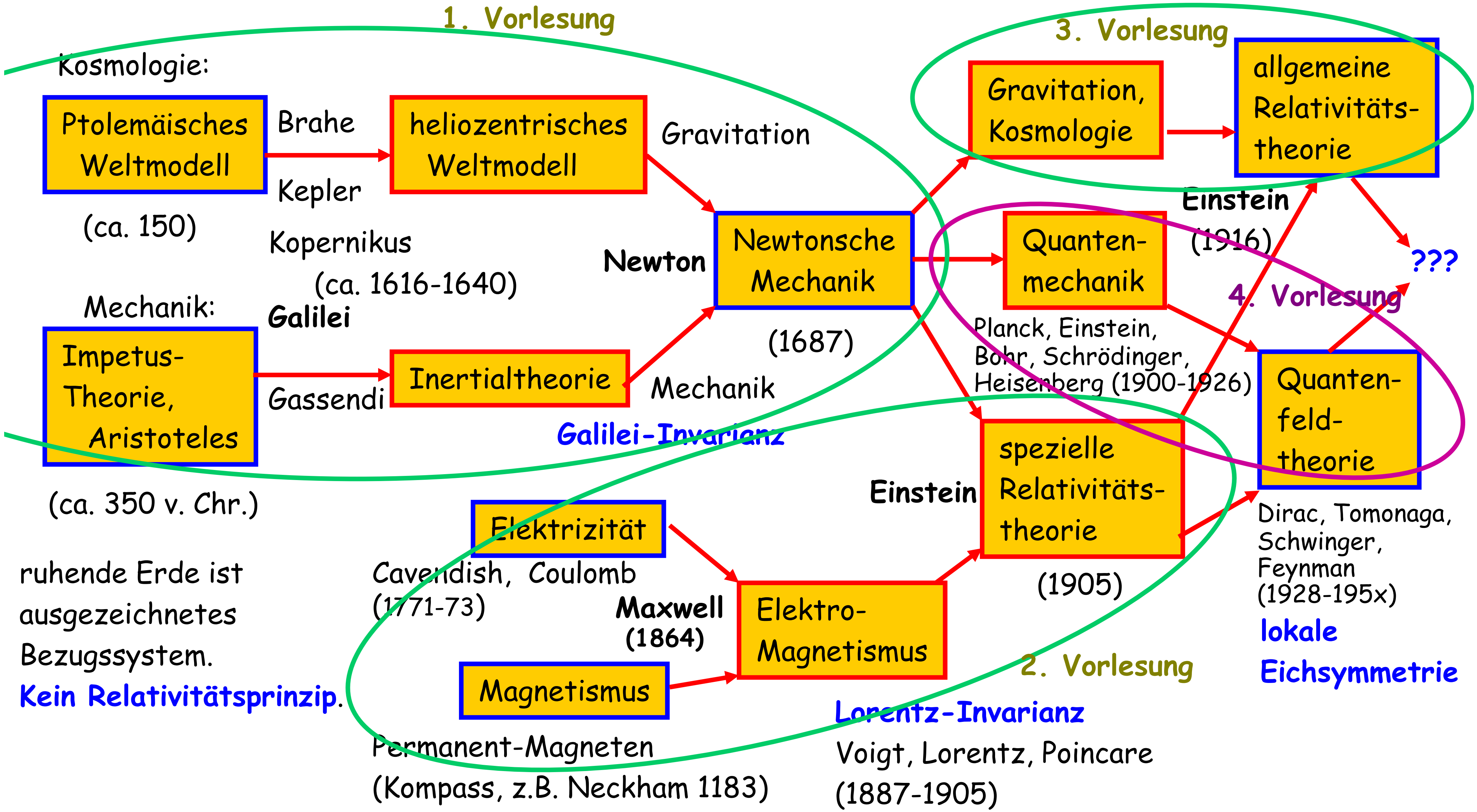
Zusammenfassung der semi-klassischen Betrachtungen

Masse = Energie, und Energie = Masse

- ⇒ Jedes zusammengesetzte mechanische System hat eine Masse.
- ⇒ Massive Systeme können aus masselosen Teilchen aufgebaut sein (kinetische Energie, siehe auch Aufgabe 1).
- ⇒ Elektromagnetische Feldenergie trägt zur Masse eines Systems von geladenen Teilchen bei (potentielle Energie, siehe auch Aufgabe 2).
- ⇒ Jedes elektromagnetisch geladene Teilchen (Ladung oder magnetisches Moment) ist notwendigerweise massiv.
- ⇒ Jedem geladenen Teilchen kann ein „klassischer Radius“ $r = \alpha/m$ zugeordnet werden (Annahme: Gesamtmasse = Feldenergie). Dieser spielt eine Rolle in vielen semiklassischen Berechnungen, entspricht aber nicht der tatsächlichen „Größe“ eines Teilchens.

  -> quantenmechanische Aspekte können meist nicht vernachlässigt werden. Dies gilt insbesondere für „elementare Teilchen“.

Raum-Zeit-Symmetrien und die Vereinheitlichung der Kräfte



4. Die effektive Photon-Masse

- Freies Photon ist masselos.
- Aber: Photon in Materie (im äusseren elektrischen Feld) kann effektive Masse bekommen.
- Im allgemeinen: Gruppengeschwindigkeit der Photonen in Materie (z.B. Glas) $\neq$ c. => effektive Masse
  - woher kommt diese Masse? (Energie)

    => Anregung (kinetische Energie) der Elektronen im Medium + Feldenergie (potentielle Energie) des Mediums
  - Photonen mit effektiver Masse bescrieben durch Proca-Gleichung (Klein-Gordon-Gleichung für Vektorfeld)

    => Kurzeinführung in Feldtheorie

Der Lagrange-Formalismus

- ***siehe auch Vorlesung "Teilchenphysik f. Fortgeschrittene", C. Hagner + A.G.***

Klassische Mechanik: Lagrange-Funktion → Euler-Lagrange-Gleichung → Bewegungsgleichungen.
Lagrange-Funktion: L=L(q,∂_tq)
verallg. Koordinaten q, ∂_tq.

Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(\partial_t q)} = 0$$

→ Bewegungsgleichungen!

Beispiel: Punktteilchen:

$$L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - V = \frac{1}{2}m(\partial_t x)^2 - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -F$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_t q)} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t x)} = m(\partial_t x) = p$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(\partial_t q)} = \frac{d}{dt}p$$

Ergebnis: Newtons Gesetz: $F = \frac{d}{dt}p$

Ausweitung auf Felder (allgemein ϕ):
– Verallgemeinerte Koordinaten: L=L(ϕ, $\partial_\mu\phi$).
– Lagrange-Funktion → Lagrange-Dichte
Anmerkung: Wirkung $S = \int d^4x L,\quad [L] = \mathrm{GeV}^4$
– Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

Beispiel Klein-Gordon-Gleichung:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -m^2\phi$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \partial_\mu(\partial^\mu\phi) = \partial_\mu\partial^\mu\phi$$

... es folgt also: $\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0$

... was der ersten Definition der Klein-Gordon-Gleichung enstspricht:

Der elektromagnetische Feldtensor

- ***siehe auch Vorlesung "Teilchenphysik f. Fortgeschrittene", C. Hagner und A.G.***

Am Beispiel der Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Da das B-Feld divergenzfrei ist, kann man es als Rotation eines Vektorfeldes schreiben:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Einsetzen in Gleichung für rot(E):

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \;\Rightarrow\; \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi$$
$$\Rightarrow\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Aber: ϕ und A sind nicht eindeutig festgelegt: Mit beliebiger skalarer Funktion χ und

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\chi, \qquad \phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

ergeben sich die gleichen Felder E und B.

Fasst man ϕ und A zusammen (Viererpotential), dann lautet diese Eichtransformation:

$$A^\mu=\left(\phi,\vec{A}\right) \quad\Rightarrow\quad A^\mu\to A'^\mu=A^\mu-\partial^\mu\chi$$

Da auch die Maxwell-Gleichungen (form-)unverändert bleiben

→Eichinvarianz der Elektrodynamik.

Einfacher in kovarianter Schreibweise mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Maxwell-Gleichungen lauten damit:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}=0$$
$$\partial^\mu F_{\mu\nu}=j_\nu$$

Bemerkungen:

- Durch Differenzieren der zweiten Gleichung folgt die Kontinuitätsgleichung.
- Einsetzen der Definition von $F_{\mu\nu}$ in zweite Gleichung ergibt Wellengleichung für A^μ.
- Oft Wahl (Lorentz-Eichung, später nützlich):

$$\partial_\mu A^\mu=0$$

Proca-Gleichung und Eich-Invarianz

Die Wellengleichung des Photons lautet (Lorentz-Eichung):

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$$
$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu\right) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu$$

Lorentz-Eichung:
$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Wellengleichung des Photons im Vakuum:
$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$$

Dieser Ausdruck ist invariant gegenüber der Transformation: $A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$ -> $\partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial_\mu \partial^\mu \chi = 0$

Die Wellengleichung eines massiven Vektorbosons oder Feldes W mit Masse M_W hingegen ... im Vakuum

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + M_W^2\right) W^\nu - \partial^\nu \left(\partial_\mu W^\mu\right) = 0$$

Proca-Gleichung

... ist NICHT invariant (rechnen!) – für massive Vektorbosonen gibt es keine Eichinvarianz!

Alternativer Weg: $L(A_\mu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ $= \frac{1}{2} (E^2 - B^2)$

Ein Masseterm des Feldes A zerstört Invarianz:

$$\frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu \to \frac{1}{2} m_A^2 (A_\mu A^\mu + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \ldots)$$

- Lagrange-Funktion für massives Photon ist nicht eichinvariant!
  - trotzdem nützlich für "effektive" Anwendungen

warum ist Eichinvarianz wichtig?

- Nöther-Theorem:

  Invarianz der Lagrange-Dichte bezüglich "Eichung"

  => erhaltene Ladung/Strom

  hier: elektrische Ladung/Strom

bekanntes Beispiel: Invarianz gegenüber Translation -> Impulserhaltung

- Bedingung für Renormierbarkeit!

  (Eliminierung von Divergenzen)

5. Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik

- *siehe auch Vorlesung "Teilchenphysik f. Fortgeschrittene", C. Hagner + A.G.*

Die vollständige Lagrange-Dichte der QED (Elektron, Positron, Photon) lautet:

$$L = \overline{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi - q\overline{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

invariant bzgl. "Phaseneichung":

$\psi \rightarrow \psi' = \psi\, e^{i\chi(x)}$

$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu\prime} = A^{\mu} - \partial^{\nu}\chi$

Kinetischer Term der Leptonen

Massen-Term der Leptonen

Wechsel-wirkung, Kopplung q

Kinetischer Term der Photonen

kein Massenterm erlaubt!

erlaubt!
(in der QED)

Maxwell-Gleichungen

freie Dirac-Gleichung für Elektron

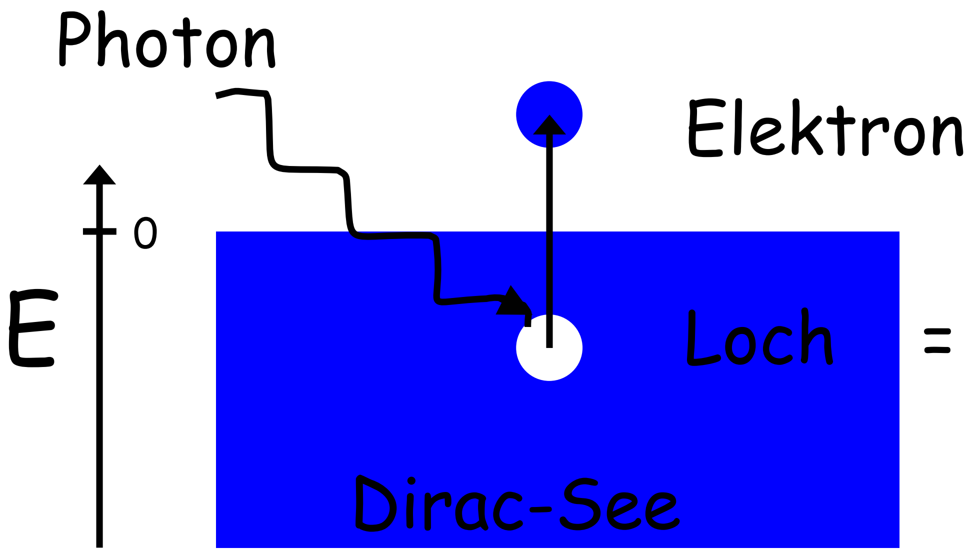
Wechselwirkung

Lösungen mit positiver und negativer Energie

Löcher-Theorie der Positronen

- Dirac-See: Vakuum = gefüllt mit Zustaenden negativer Energie
- Erzeugung eines Elektron-Positron-Paars:

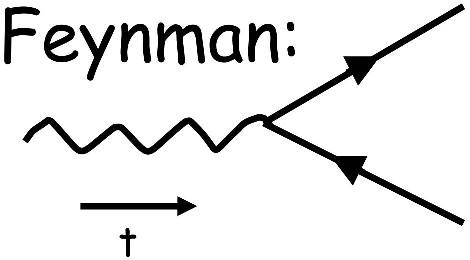
Anregung eines Vakuumzustands:



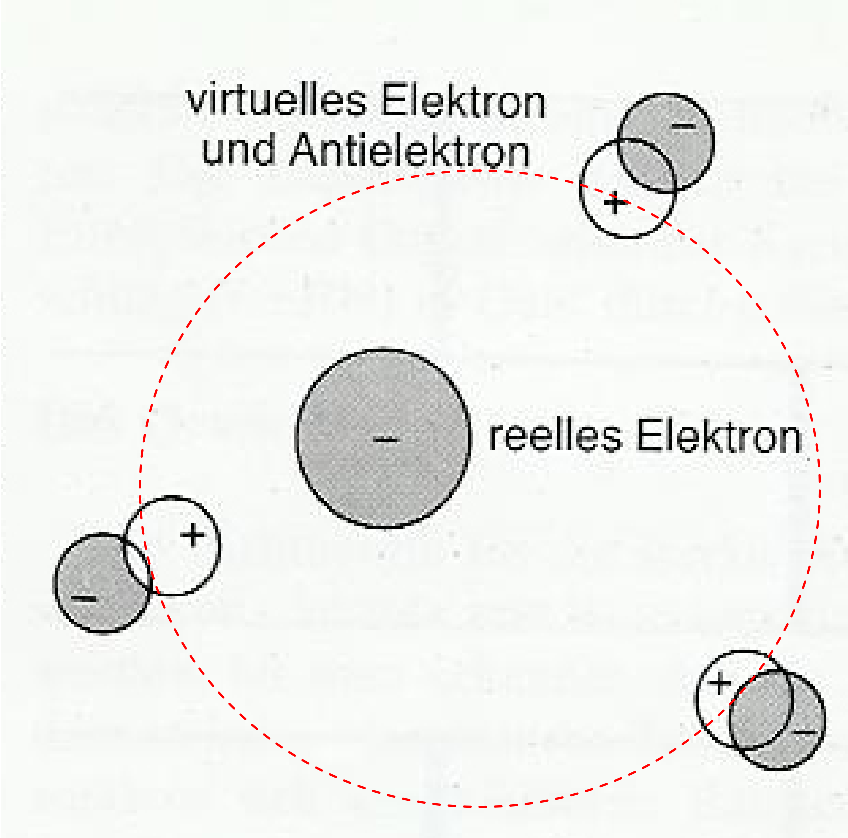
= Positron = Elektron mit negativer Energie/Masse, das "rückwärts in der Zeit" läuft

=> positive Energie/Masse

Feynman:



Abschirmung der elektrischen Ladung



(Nobel 1965)

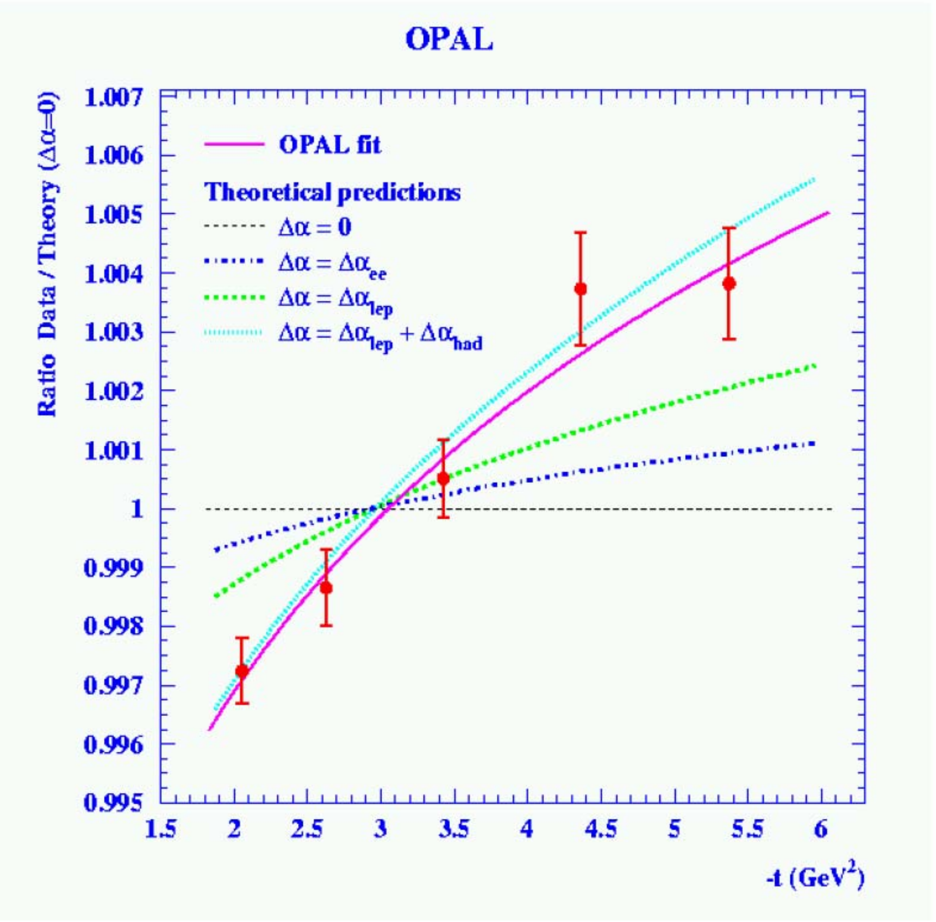
Sin-Itoro Tomonaga   Julian Schwinger   Richard P. Feynman

- elektrische Ladung polarisiert Vakuum -> virtuelle Elektron-Positron-Paare
- Positronen schirmen Elektron-Ladung teilweise ab
- effektive Ladung/Kraft
  - wird geringer bei großen Entfernungen/kleinen Energien (Abschirmung)
  - wird größer bei kleinen Entfernungen/großen Energien

Die laufende Feinstrukturkonstante

laufende e/m Kopplungskonstante:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \alpha/3\pi \, \ln(Q^2/Q_0^2)}$$



$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, $\qquad Q^2 = -t$:

"nackte" Ladung (Q2 -> ∞) -> ∞ !

Herleitung: siehe z.B. Vorlesung Teilchenphysik für Fortgeschrittene

oder Bjorken/Drell: relativistische Quantenmechanik

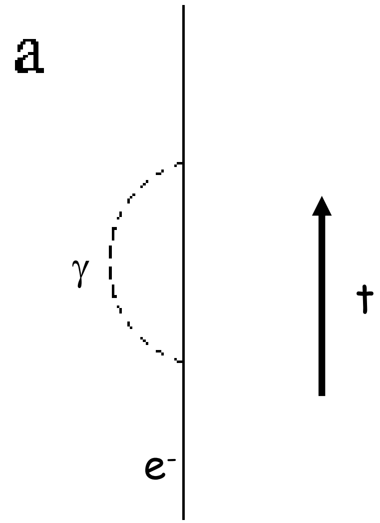
Selbstenergie des Elektrons in der QED

- "klassische" Elektrodynamik:

  Teilchenzahl erhalten -> nur:

  Selbstenergie divergiert wie 1/r für r->0

  (wie klassischer Fall, 2. Vorlesung)



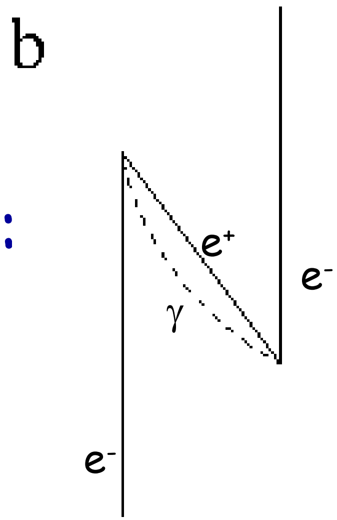
- relativistische Quantenelektrodynamik:

  Teilchen - Antiteilchenzahl erhalten

  -> auch:

  1/r - Divergenzen heben sich auf

  -> Summe nur noch divergent wie log(1/r)



Selbstenergie des Elektrons in der QED

- Veranschaulichung (V. Weisskopf, Phys. Rev. D 56 (1939) 72)
- einzelnes Elektron,
  Ladungsverteilung:

  Pauliprinzip: "verdrängt"
  Partnerelektron im Vakuum
- => erzeugt "Loch",

  kompensiert durch
  Ladungsverteilung mit
  endlicher Ausdehnung
  ("verdrängte Elektronen")
  -> Divergenzen heben sich teilweise auf
  -> Summe nur noch divergent
  wie log(1/r), r -> 0

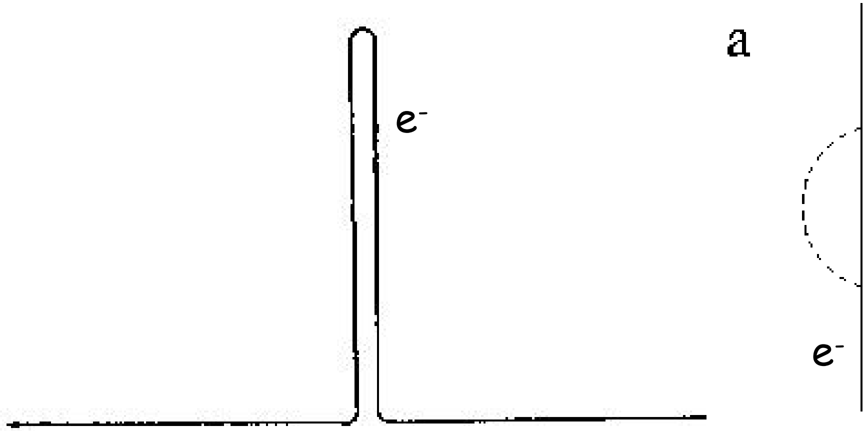


FIG. 1a. Schematic charge distribution of the electron.

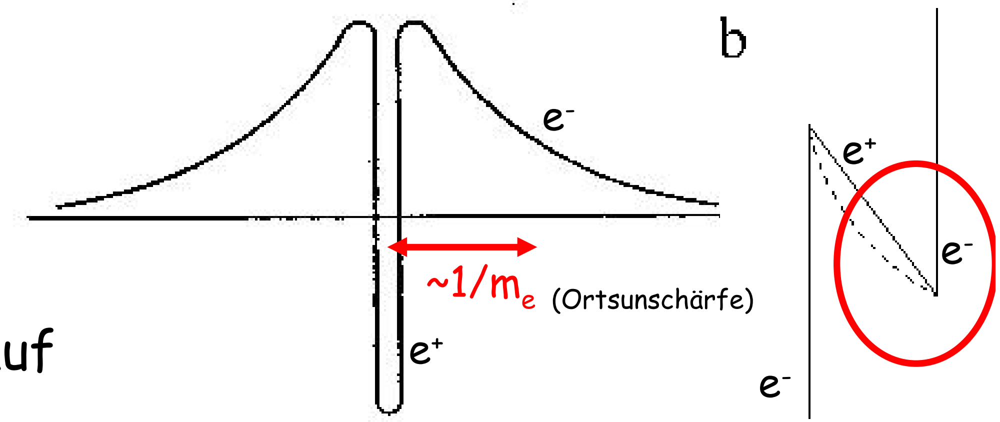


FIG. 1b. Schematic charge distribution of the vacuum electrons in the neighborhood of an electron.

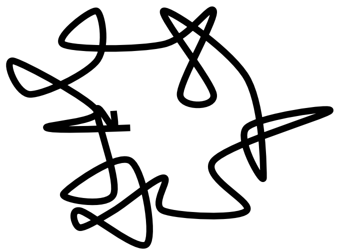
Selbstenergieanteile des Elektrons

V. Weisskopf, Phys. Rev. D 56 (1939) 72.

- statische Ladungsverteilung: $m_{st} = \alpha m/2\pi \; \log(M^2/m^2)$,
  (vorhergehende Folie) $M \sim 1/r \to \infty$

- "statische" Quantenfluktuationen (E-Feld): $m_{fl} = \alpha/\pi \; M^2/m$,
  $M \to \infty$

- "dynamische" Quantenfluktuationen (E+B-Feld):
  "irreguläre kreisförmige Zitterbewegung"



  (E. Schrödinger, 1930)

  -> Elektron-Spin !, magnetisches Moment

  $m_{spin} = \alpha m/4\pi \; \log(M^2/m^2) - \alpha/\pi \; M^2/m$, $M \to \infty$

- $\boxed{\text{Summe:} \quad \delta m = m_{st} + m_{fl} + m_{spin} = 3\alpha m/4\pi \; \log(M^2/m^2)}$

  Abschneideparameter $M \to \infty$

Renormierte physikalische Masse des Elektrons

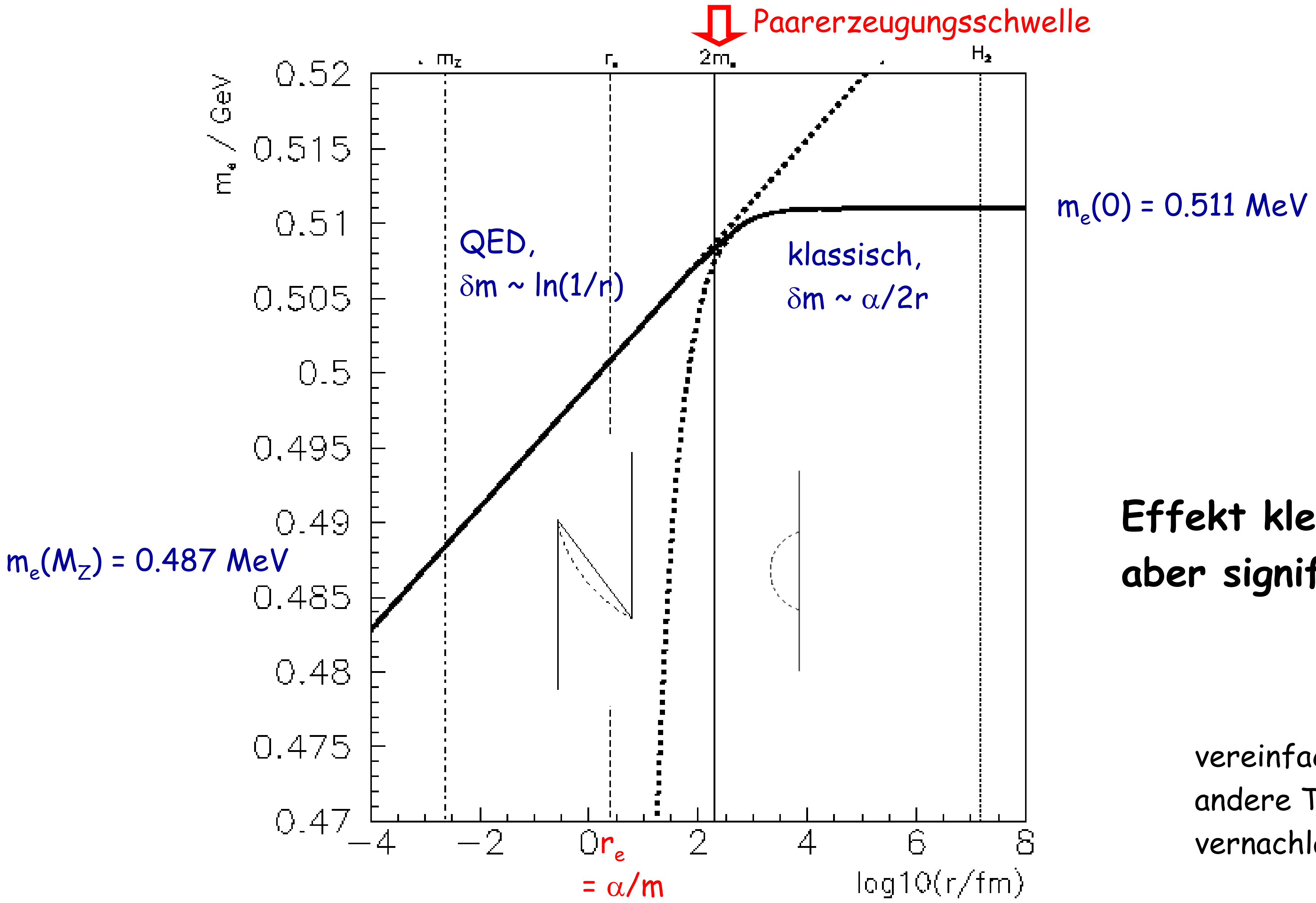
- $m_{ph} = m + \delta m$ $\quad$ m = "nackte" Masse (nicht messbar)
  m_{ph} = physikalisch messbare Masse

mit $\delta m = 3\alpha m/4\pi \; \log(M^2/m^2)$, Abschneideparameter $M \to \infty$

- **Renormierung:**
  wähle $m \to \infty$, $M \to \infty$, $M < m$ $(\log < 0)$ so dass
  $$\boxed{m_{ph} = m + \delta m \text{ endlich!}}$$

- m_{ph} leider nicht eindeutig bestimmbar
  -> setze gemessenen Wert ein

Die laufende Elektronmasse



Effekt klein, aber signifikant

vereinfacht:
andere Teilchen
vernachlässigt

Regularisierungverfahren

- “Regularisierung” = divergente Integrale lösbar machen
- hier verwendet:

  Regularisierung durch Abschneideparameter:

  Große Masse M oder kleiner Radius r im Volumen/Phasenraumintegral (statt ∞ oder 0 als Integrationsgrenze)

  => Divergierende Integrale werden endlich und berechenbar.

  Am Ende der Rechnung: $M \to \infty$ oder $r \to 0$

- Andere Möglichkeit (hier nicht verwendet): Dimensionale Regularisierung. Logarithmisch divergente Integrale werden endlich, wenn man statt über 4 Dimensionen über $4-\varepsilon$ Dimensionen integriert (fraktale Dimensionen). Dann Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

Einige Anmerkungen

- Paarerzeugung auch verantwortlich für laufende Kopplungskonstante α

  -> $2m_e$ ist wichtiger Abschneideparameter: $\alpha(0)$ -> 0 für m_e -> 0 !

  -> endliche Elektronmasse Voraussetzung für e.m. Kraft!

- Elektromagnetische Selbstenergie trägt zur Masse bei, aber "nackte" Masse ∞ -> physikalische Masse unbestimmt

- ähnliches Verfahren für m_μ und m_τ

- interessante (?) rein empirische Formel für Leptonmassen (Koide 1982):

$$\frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2} = 2/3 \begin{matrix} +0.00002 \\ -0.00001 \end{matrix}$$

wieso?

keine Ahnung! Zufall?

Wie Spektrallinien vor Entdeckung der Quantenmechanik?

Masse und Orts/Zeitunschärfe in der QED

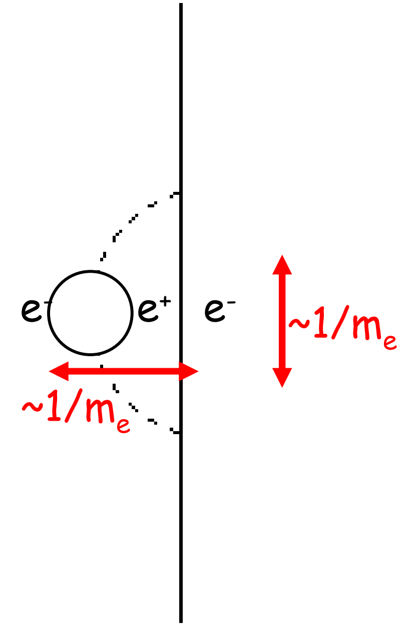
Literatur: z.B. Landau-Lifschitz, Band 4, relativistische Quantentheorie

- "nacktes" Elektron umgeben von "Wolke" aus virtuellen Elektron-Positron-Paaren (Energie=Masse ~2m)
- Ausdehnung der Wolke ~ 1/m
- "Lebensdauer" eines Paares ~1/m
- "ursprüngliches" Elektron und virtuelle Elektronen ununterscheidbar

  => Ortsunschärfe $m\Delta x \sim \hbar$

  Zeitunschärfe $m\Delta t \sim \hbar$

- gemäß Heisenberg'scher Unschärferelation ist 1/Masse Obergrenze auf lokalisierbarkeit eines einzelnen Elektrons



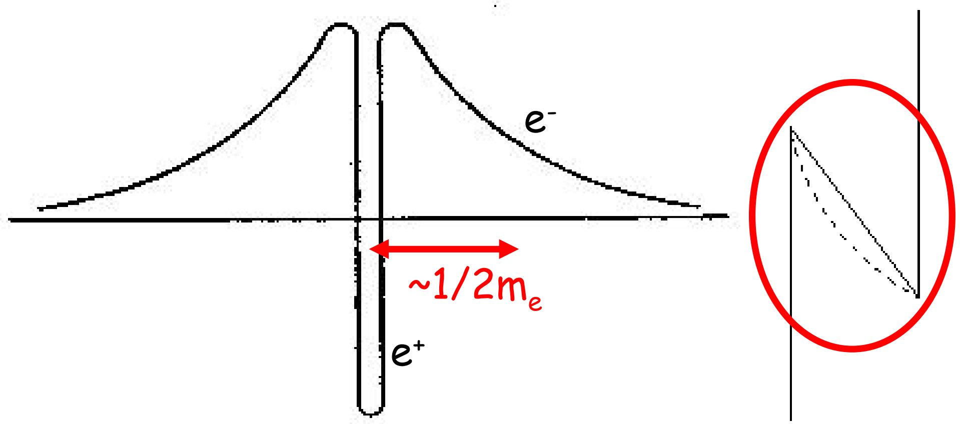


FIG. 1b. Schematic charge distribution of the vacuum electrons in the neighborhood of an electron.

Die Elektronmasse: Was wissen wir?

- Das elektromagnetische Feld des Elektrons trägt signifikant zu seiner Masse bei -> **Elektron muss massiv sein.**
- Elektron = elementares (punktförmiges) Teilchen
  -> **klassisch divergiert die Feldenergie wie 1/r**
  ("klassischer Elektronenradius")
- **QED:** bei Abständen < $1/2m_e$ sorgen Vakuumfluktuationen (Elektron-Positron-Paarerzeugung) für eine **effektive "Verschmierung" der Ladungsverteilung** über einen Raumbereich $\sim 1/m_e^3$
  -> die Divergenz der Masse wird auf eine **logarithmische Divergenz ~ln(1/r)** abgemildert.
- Die **unendlich große "nackte" Masse** muss so gewählt werden, dass sie diese Divergenz kompensiert -> **Renormierung!**
  -> **Elektronmasse kann NICHT berechnet werden.** ***unbefriedigend!***
  Gemessener Wert wird "von Hand" eingesetzt.
- $1/m_e$ ist **Untergrenze auf Lokalisierbarkeit** des Elektrons

Die Elektronmasse: Was wissen wir?

- Die **resultierende physikalische Masse** hängt von der Energieskala Q~1/r ab ("laufende" Masse):

  für $Q \ll 2m_e$: klassische Formeln gelten (Δm = klassische Feldenergie ~1/r)

  für $Q \gg 2m_e$: $\mathbf{m(Q) = m(0)\ (1 - \alpha/\pi - 3\alpha/4\pi\ \ln(Q^2/m(0)^2))}$

  renormierte Masse

  Integral über "klassischen" Anteil

  Vakuumfluktuationen (Ladungsverschm.)

  m(0) = 0.511 MeV, α = 1/137

- Der Wert der **Feinstrukturkonstanten hängt (logarithmisch) von m_e ab:**
  ($2m_e$ ist Abschneideparameter für Laufen der Kopplungskonstanten)

  $\alpha(0) \to 0$ für $m_e \to 0$

  -> Atome würden nicht zusammenhalten!

Herausforderung/Hoffnung für Zukunft: finde Theorie, die Masse berechenbar macht !!!