2. Vorlesung

1. Zusammenfassung: Masse in der klassischen Mechanik

   + 1. Übungsaufgabe

2. Energie des klassischen elektromagnetischen Feldes

   Literatur: beliebiges Lehrbuch klassische Elektrodynamik

   z.B. Leisi, Klassische Physik, Band II;

   Jackson, Classical Electrodynamics

   - Der klassische Elektron-Radius
   - Die semi-klassische Masse des Wasserstoffatoms (Aufgabe 2)
   - Was bedeutet der semi-klassische Grenzfall?

Energie des klassischen elektromagnetischen Feldes

- Energiedichte des klassischen elektromagnetischen Feldes:

$$\boxed{u = \varepsilon_0/2\, E^2 + 1/(2\mu_0)\, B^2} = \tfrac{1}{2} E^2 + \tfrac{1}{2} B^2$$

mit E: elektrische Feldstärke

B: magnetische Feldstärke

beachte: $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2 = 1$

-> $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$

- Energie = Masse

-> ein elektromagnetisches Feld, das ein geladenes Objekt umgibt, trägt zu seiner Masse bei

$$\boxed{\Delta m = \iiint u\, d^3r}$$

Der Massenbeitrag ist das Integral über die Energiedichte im gesamten Raum (= potentielle Energie des Feldes)

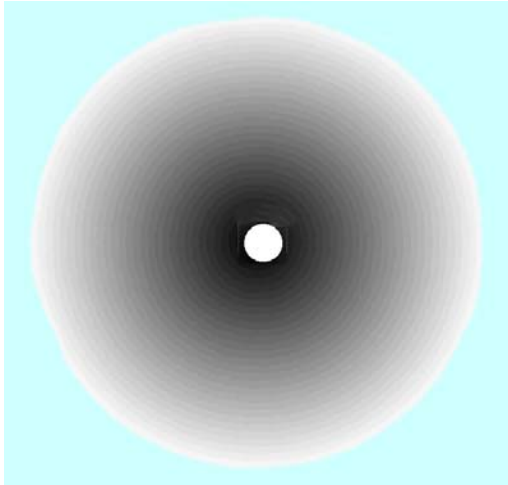
Feldenergie einer geladenen Kugel

- Feld einer geladenen Hohlkugel mit Ladung Q und Radius r_0:

  innerhalb der Kugel: $E = B = 0$

  ausserhalb der Kugel: $E = 1/(4\pi)\, Q/r^2$, $B=0$

  => $u = \frac{1}{2}E^2 = \frac{1}{2}\, 1/(4\pi)^2\, Q^2/r^4$



$\Delta m = \iiint u\, d^3r = \int u\, 4\pi r^2\, dr = \int 1/(8\pi)\, Q^2/r^2\, dr$

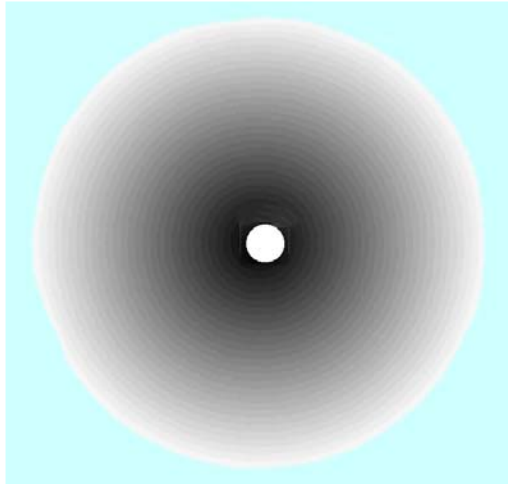
$\Delta m = 1/(8\pi)\, Q^2/r_0$

-> Die Kugel hat mindestens die effektive Masse $m = \Delta m$

-> Eine geladene Kugel der Masse m kann nicht kleiner sein als $r_0 = 1/(8\pi)\, Q^2/m$ (innerhalb von Faktor 2, genauer Wert hängt von Ladungsverteilung ab)

Der klassische Elektron-Radius

- Hypothese: Elektron = „masselose“ Hohlkugel mit Feld



=> $r_0 = 1/(8\pi)\, e^2/m_e$

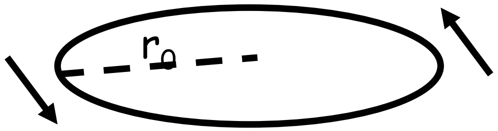
oder, mit $\alpha = e^2/(4\pi) = 1/137$

=> $r_0 = \frac{1}{2}\alpha/m_e$

andere Ladungskonfiguration,

z.B. mit v=c rotierender geladener Ring (Rechnung kompliziert, liefert auch (fast) korrekten Wert für Spin ½ und magnetisches Moment!)

=> $r_0 = \boxed{r_e = \alpha/m_e} = 2.2\times10^{-15}$ m, „klassischer Elektron-Radius“



kann das sein?

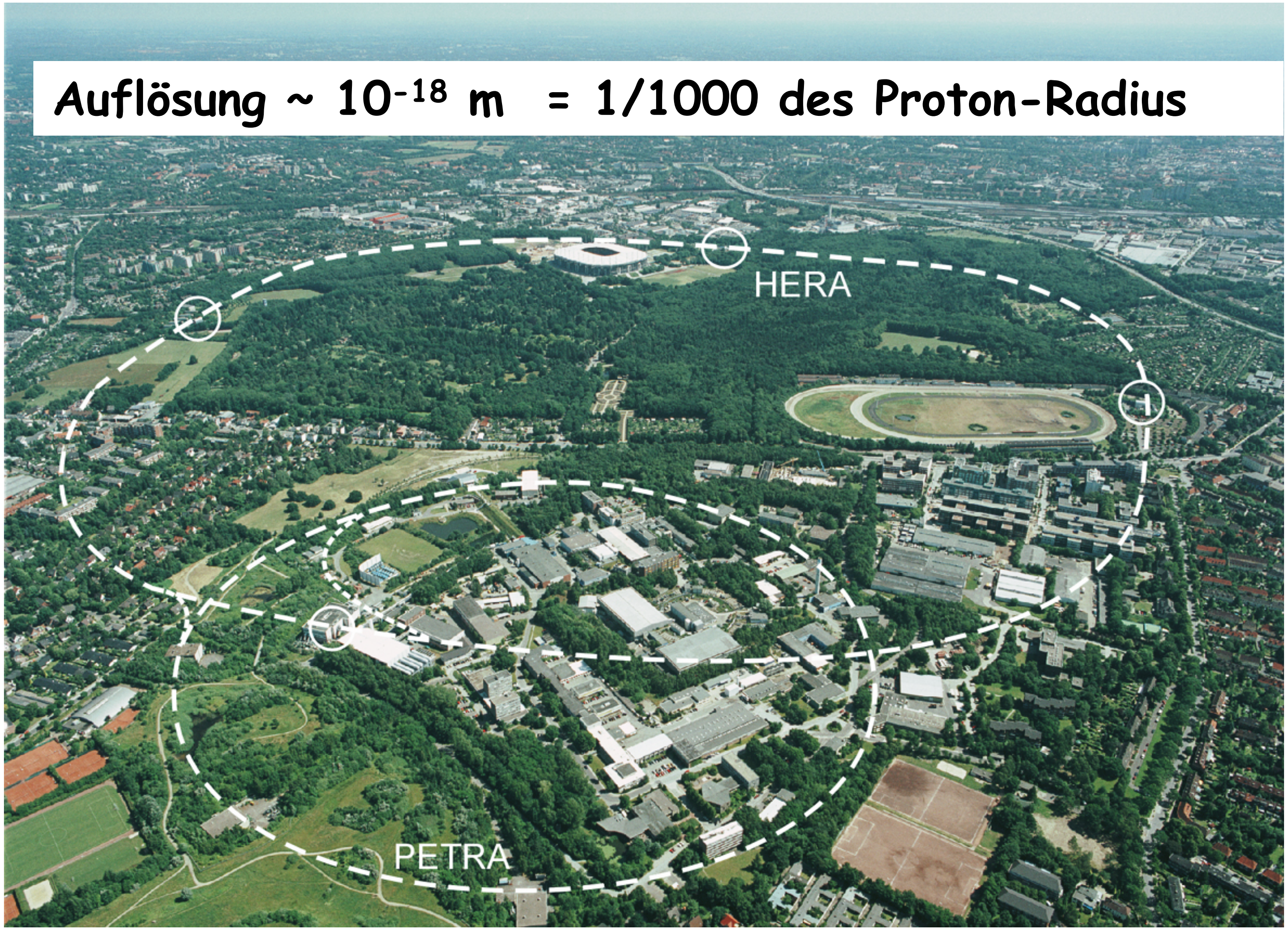
Wie bestimmt man die „Grösse“ eines Teilchens?

Mikroskop:

niedrige Auflösung
-> kleines Instrument

hohe Auflösung
-> großes Instrument

HERA =
Riesen-
Mikroskop



Probleme mit klassischem Elektron-Radius

$r_e = \alpha/m_e = 2.2 \times 10^{-15}$ m = 2.2 fm,   „klassischer Elektron-Radius"

- Stabilität?: elektromagnetische kraft alleine kann eine solche Ladungsverteilung nicht auf so kleinem Raum zusammenhalten
- Struktur?: in Streuexperimenten keine innere Struktur des Elektrons gefunden: $r < 0.7 \times 10^{-18}$ m
  -> drei Größenordungen daneben!

-> Ansatz: Elektron = elementares Teilchen = punktförmig (r->0)

aber dann: elektromagnetische Masse $m = \alpha/r$ -> ∞ !?

Lösung: Quantenelektrodynamik! (später)

Ebenfalls divergierende „nackte" Elektronmasse kompensiert elektromagnetische Divergenz und liefert endlichen („renormierten") Wert -> m_e

Zusammenfassung der semi-klassischen Betrachtungen

Masse = Energie, und Energie = Masse

⇒ Jedes zusammengesetzte mechanische System hat eine Masse.

⇒ Massive Systeme können aus masselosen Teilchen aufgebaut sein (kinetische Energie, siehe auch Aufgabe 1).

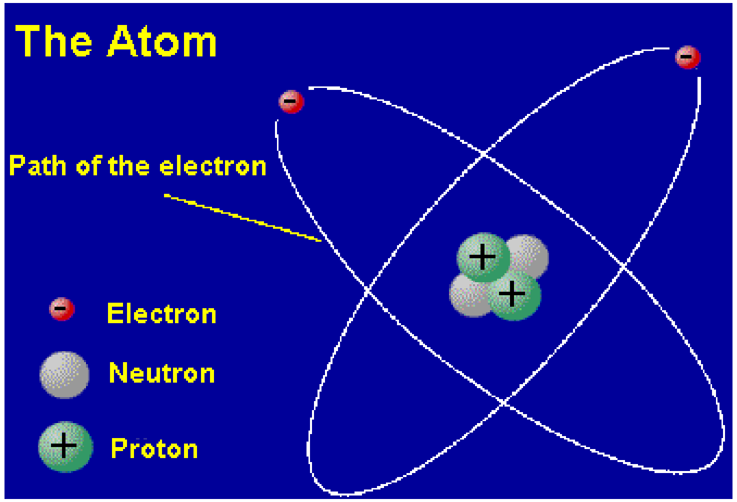
⇒ Elektromagnetische Feldenergie trägt zur Masse eines Systems von geladenen Teilchen bei (potentielle Energie, siehe auch Aufgabe 2).

⇒ Jedes elektromagnetisch geladene Teilchen (Ladung oder magnetisches Moment) ist notwendigerweise massiv!

⇒ Jedem geladenen Teilchen kann ein „klassischer Radius" $r = \alpha/m$ zugeordnet werden (Annahme: Gesamtmasse = Feldenergie). Dieser spielt eine Rolle in vielen semiklassischen Berechnungen, entspricht aber nicht der tatsächlichen „Größe" eines Teilchens.

-> quantenmechanische Aspekte können meist nicht vernachlässigt werden. Dies gilt insbesondere für „elementare Teilchen".

Was ist ein „Teilchen"?



- **Klassisches Bild: Teilchen = Diskretes Objekt**

Energie (Masse) konzentriert auf endlichen Raum mit definierten Grenzen.

Teilchen sind an einem bestimmten Ort.

-> Newtonsche Mechanik

Isaac Newton

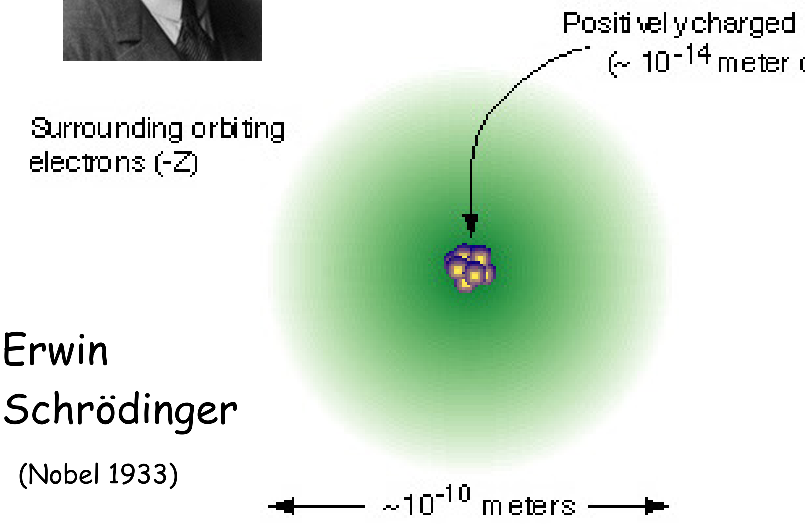
- **Modernes (quantenmechanisches) Bild:**

Teilchen = Objekte mit diskreten Quanten-zahlen, z.B. Ladung, Masse, ...

nicht notwendigerweise an einem Ort lokalisiert, (Heisenbergsche Unschärferelation)

Kann auch durch Wellenfunktionen beschrieben werden (Quantenmechanik, Teilchen/Welle-Dualität)

Niels Bohr (Nobel 1922)



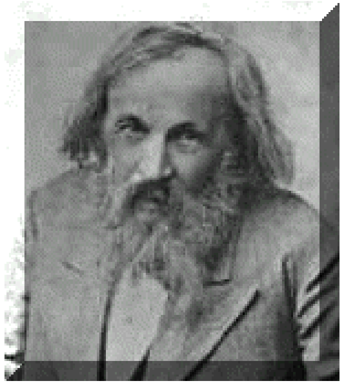
Louis de Broglie (Nobel 1929)

Werner Heisenberg (Nobel 1932)

Erwin Schrödinger (Nobel 1933)

Was ist „elementar"?

Griechisch: atomos = kleinste unteilbare Komponente

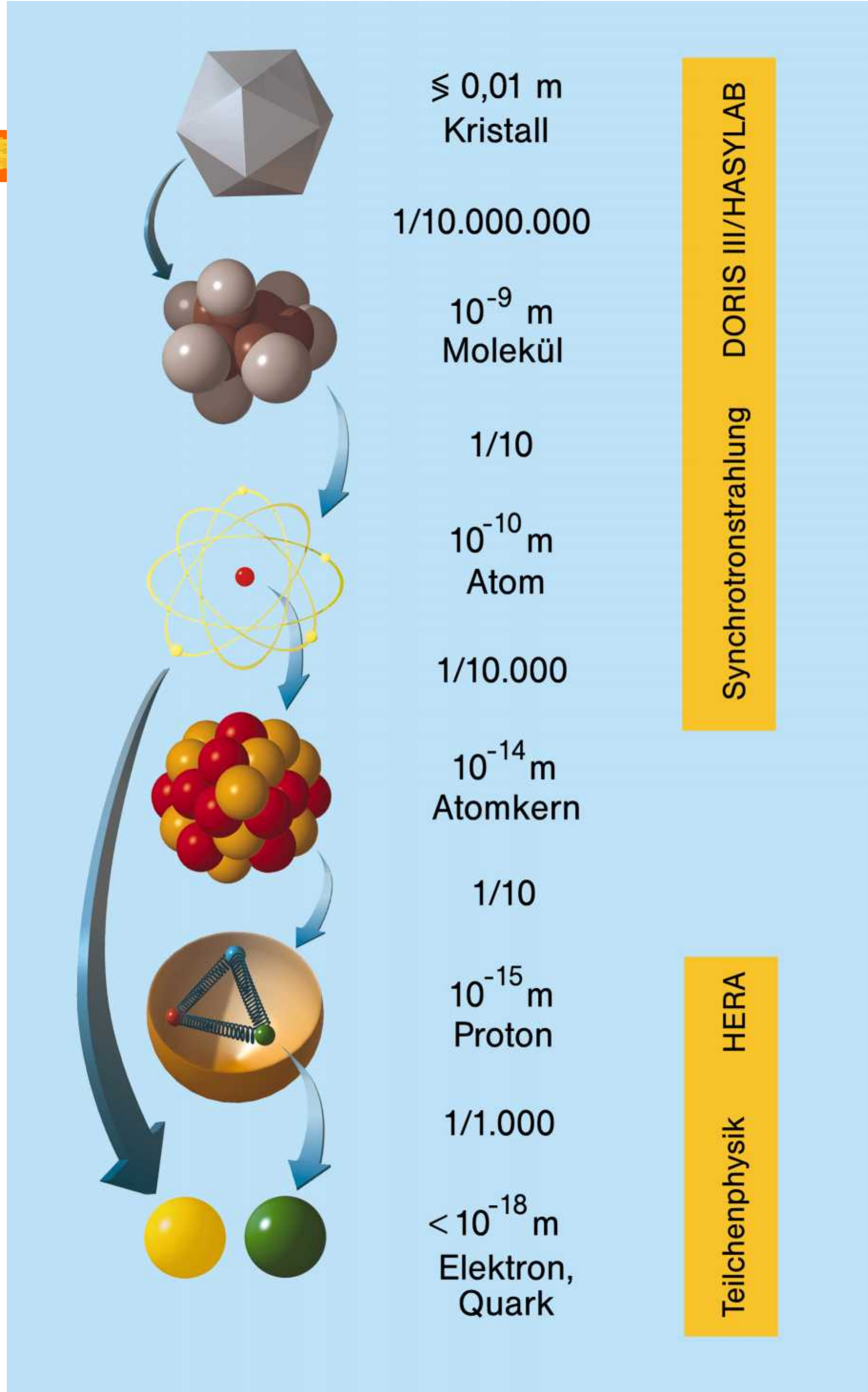


Dmitry Ivanowitsch Mendeleyev 1868 (Elemente)

Ernest Rutherford 1911 (Kern) (Nobel 1908)

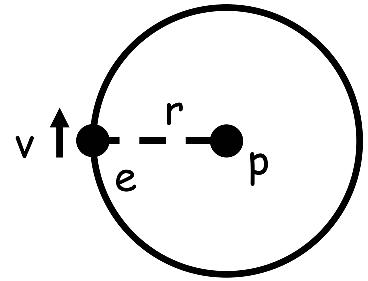
Murray Gell-Mann 1962 (Quarks) (Nobel 1969)

elementar = keine messbare Substruktur



Aufgabe 2: Bindungsenergie und Masse des Wasserstoffatoms

Betrachten Sie ein vereinfachtes semiklassisches Modell eines Wasserstoffatoms: Ein punktförmiges Elektron der Masse m_e und Ladung –e kreist nichtrelativistisch im Abstand r um ein punktförmiges ruhendes Proton der Masse m_p und Ladung +e



(Der Einfluss des Kraftfeldes auf die Masse soll berücksichtigt werden)

a. Bestimmen Sie zunächst Ausdrücke für die Gesamtenergie des elektrischen Feldes dieses Systems für den Fall $r \to \infty$, $v \to 0$. Ersetzen Sie die beiden divergierenden Ausdrücke durch freie Parameter (z.B. „renormierte" Ruhemassen des Elektrons und des Protons).

b. Berechnen Sie nun die Gesamtenergie des elektrischen Feldes für den Abstand $r = a = r_e/\alpha^2 = 1/\alpha m_e$ (Bohrscher Radius), wobei α die Feinstrukturkonstante ist, und bilden Sie die Differenz zum Fall a). Wählen Sie dabei Ihr Koordinatensystem so, dass die divergierenden Terme bei der Differenzbildung verschwinden. Der Einfluss der endlichen Geschwindkeit des Elektrons auf das elektromagnetische Feld soll vernachlässigt werden.

c. Zeigen Sie, dass diese Differenz, kombiniert mit der kinetischen Energie des Elektrons (für $v=c/\alpha$), in guter Näherung der Bindungsenergie des Wasserstoffatoms (13.6 eV) entspricht. Wie groß ist damit die Gesamtmasse des Wasserstoffatoms?