11.1. Phaseninvarianz in der SU(2) Symmetrie

Starke WW: Isospin = starke WW unterscheidet nicht zw. Proton und Neutron

$\Rightarrow$ p und n sind unterschiedl. Zustände des Nukleons:

$$\chi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \psi_N \qquad \chi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \psi_N$$

ψ_N = universelle Nukleonwellenfunktion

Transformation des Isospins:

$$\chi' = U \chi$$

U = kontinuierliche Symmetrie
$\Rightarrow$ bel. p + n - Mischungen

Eigenschaften von U:

① $UU^+ = U^+U = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ U ist unitär (Normerhaltung)

② $\det(UU^+) = (\det U)(\det U^+) = |\det U|^2 = 1$

$\Rightarrow \det U = e^{i\alpha}$ globaler Phasenfaktor unphys.

betrachte nur Trf. mit $\det = +1 \Rightarrow$ Gruppe SU(2)

$$U = 1 + i\xi$$

$$U^+ U = 1 = (1 - i\xi)^+ (1 + i\xi) = 1 - i\xi^+ + i\xi + \ldots$$

$\Rightarrow \xi^+ = \xi$; ξ ist hermitesch

(4)

$\mathrm{tr}\,\xi = 0$ (aus $\det U = 1$)

(5) Es gibt drei linear unabhängige, hermitesche, spurfreie Matrizen (2x2), z.B. Paulimatrizen:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ eine beliebige infinitesimale Transformation ist:

$$\xi = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{belieb. Faktor.}}}{\frac{1}{2}} (\varepsilon_1 \tau_1 + \varepsilon_2 \tau_2 + \varepsilon_3 \tau_3) \qquad U = 1 + \frac{i}{2} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\tau}$$

(6) Endliche Transformation = Hintereinanderausführung vieler infinitesimaler Trf:

$$U = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}}{n}\right)^n = e^{\frac{i}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}}$$

$$\underbrace{\Psi'}_{\text{Isospinor}} = U \, \Psi = \underbrace{e^{\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}}_{2\times 2 \text{ Matrix}} \Psi$$

$$\begin{pmatrix} \Psi'_+ \\ \Psi'_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$$

U mischt p/n bzw. ν/e, läßt aber die universelle Wellenfunktion unverändert! $\Psi = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Iso-} \\ \text{spinor}}}{\chi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalar}}}{\Psi_L} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \Psi_L$

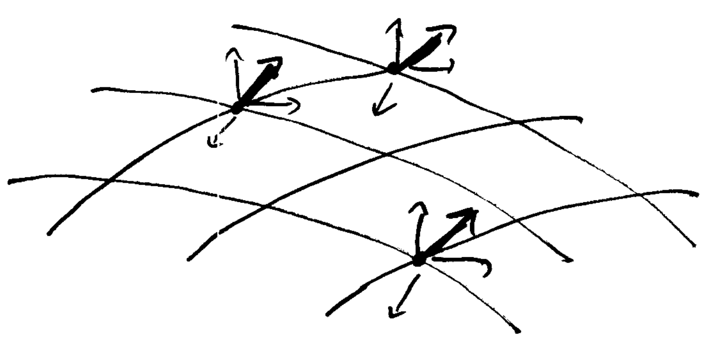
⑦ <u>Achtung</u>: Transformationen vertauschen nicht.

$$U(\vec{\alpha}_1)\, U(\vec{\alpha}_2)\, \Psi \neq U(\vec{\alpha}_2)\, U(\vec{\alpha}_1)\, \Psi$$

$\Rightarrow$ nicht-abelsche Gruppe

⑧ Isospin ist <u>innerer</u> Freiheitsgrad

(Vorstellung:) Isospinvektor angeheftet an jeden Raum-Zeit-Punkt der Wellenfkt:



Isospinvektor wird überall um $\vec{\alpha}$ gedreht

→ lokale Isospintransformation:

$$\Psi'(x) = e^{i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\beta}(x)}\,\Psi(x)$$

⇒ unterschiedliche Drehwinkel $\frac{g}{2}\vec{\beta}(x)$ an jedem Raum-Zeit-Punkt x.

⇒ z.B. reines $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$-Zustand ⇒ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ...

⇒ Achtung: $e^{i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\beta}(x)}$ nur formal ähnlich zur

$U(1)$-Phasentrf.: $U(1)$: ändert die Phase eines komplexen Feldes Ψ

$SU(2)$: ändert die Komposition eines Dubletts $\begin{pmatrix}\Psi_+'\\\Psi_-'\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\Psi_+\\\Psi_-\end{pmatrix}$

Eichprinzip für SU(2)-Transformationen:

Postuliere Invarianz der Dirac-Gleichung unter lokalen $SU(2)$-Transformationen

⇒ erfordert Einführung neuer Felder mit bestimmter Eichtransformationsregel

$\psi' = e^{i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\beta}(x)}\psi$ $\qquad\qquad$ $\psi' = e^{iq\chi}\psi$

erfordert gleichzeitig

$\vec{W}_\mu{}' = \vec{W}_\mu + \ldots$??? $\qquad\qquad$ $A_\mu{}' \to A_\mu - \partial_\mu \chi$

und $D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu$ $\qquad\qquad$ $D_\mu \to \partial_\mu + iqA_\mu$

$$= \partial_\mu + \frac{ig}{2}\tau_1 W_\mu^1 + \frac{ig}{2}\tau_2 W_\mu^2 + \frac{ig}{2}\tau_3 W_\mu^3$$

dann gilt:

aus $(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi = 0$

folgt $(i\gamma_\mu D^{\mu\prime} - m)\psi' = 0$

Wie sieht die Eichtransformation aus?

Es muss gelten: $D'^\mu\psi' = e^{i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\beta}} D^\mu\psi = U D^\mu \psi$

[denn: $(i\gamma_\mu D^{\mu\prime} - m)\psi'$

$$= \underbrace{i\gamma_\mu D^{\mu\prime} U\psi}_{} - mU\psi$$

$$i\gamma_\mu U D^\mu\psi - Um\psi = U(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi = 0 \;]$$

Um das zu erreichen muss gelten: (→ Übung)

$$\vec{W}'^\mu(x) = \underbrace{\vec{W}^\mu(x) - \partial^\mu\vec{\beta}(x)}_{\text{wie QED}} \underbrace{- g[\vec{\beta}(x)\times\vec{W}(x)]}_{\text{nicht abelsche Theorie!}}$$

• SU(2)-Isospin Symmetrie als "Eichtheorie" für p-n-Wechselwirk. funktioniert nicht

• aber für schwache Wechselwirkung sehr erfolgreich.

Postulate:

① Zusammenfassung aller Teilchen die unter (gelad.) schw. WW ineinander übergehen können:

(linkshändige Fermionen)

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}u\\ d'\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}c\\ s'\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}t\\ b'\end{pmatrix}_L \qquad \begin{matrix} I_3 \\ +\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}$$

Doubletts zum schwachen Isospin I mit $I_3 = \pm\frac{1}{2}$

Wellenfunktionen:
(Isospinoren!)

$$\nu_L = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Psi_L(x) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1-\gamma^5)\Psi(x)$$

$$e_L^- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Psi_L(x) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1-\gamma^5)\Psi(x)$$

und $e_R, \mu_R, \tau_R, u_R, d_R, s_R, c_R, b_R, t_R$ mit $I=0$

② Einführung der Quantenzahl schwache Hyperladung Y:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \qquad \Rightarrow$$

$Y = -1$ für $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}$

$Y = -2$ $\quad e_R^-, \mu_R^-, \tau_R^-$

$Y = +\frac{1}{3}$ $\quad \begin{pmatrix}u\\ d'\end{pmatrix}_R, \ldots$

$Y = -\frac{2}{3}$ für d_R, s_R, b_R

(3) Die Theorie soll invariant unter lokalen Eichtransformation bzgl $SU(2)_I$ <u>und</u> $U(1)_Y$ sein!

→ drei Felder aus der $SU(2)_I$ / "$SU(2)_L$"

→ ein Feld aus der $U(1)_Y$

11.3. Lokale $SU(2)_L \times U(1)_Y$ - Transformationen

<u>Isospin-Transformation:</u> wirkt <u>nur</u> auf linkshänd. Dubletts

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L' = \underbrace{\exp\left(i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}(x)\right)}_{2\times2 \text{ Matrix}} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$$

<u>Hyperladungs-Transformation:</u> wirkt auf links- und rechtsh. Teilchen:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L' = \underbrace{\exp\left(i \frac{g'}{2} Y_L \; \chi(x)\right)}_{\text{Zahl}} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$$

und $$e_R^{-\,\prime} = \exp\left(i \frac{g'}{2} Y_L \chi(x)\right) e_R^-$$

- Y analog zu q i.d. QED
- Faktor $\frac{1}{2}$ ist willkürlich
- $SU(2)$ und $U(1)$ haben unterschiedl. Kopplungskonstanten g und g' (es sind ja untersch. Sorten "Ladung")

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\vec{T}\cdot\vec{W}^\mu + i\frac{g'}{2}YB^\mu \qquad \vec{T} = \text{Isospin-Operator}$$

für <u>linkshändige</u> Leptonen ist:

$$\vec{T} = \frac{\vec{\tau}}{2} \quad ; \quad Y = -1$$

$$\Rightarrow D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu - i\frac{g'}{2}B^\mu$$

(streng genommen: $\partial^\mu \mathbb{1} + i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu \ldots i\frac{g'}{2}B^\mu \mathbb{1}$)

für <u>rechtshändige</u> Leptonen ist:

$$\vec{T} = 0 \quad ; \quad Y = -2$$

$$\Rightarrow D^\mu = \partial^\mu - ig'B^\mu \qquad \text{(wie in der QED)}$$

<u>Matrixelemente</u>:

<u>QED</u>: Dirac-Gl.: $(i\gamma_\mu D^\mu - m)\Psi = 0$

$$\hat{=} \quad (i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi = q\gamma_\mu A^\mu \Psi$$

$\Rightarrow$ ME 1. Ordnung: Operator $q\gamma_\mu A^\mu$ zw. ebenen Wellen:

$$\mathcal{M} \sim -iq\bar{u}_f \gamma_\mu u_i A^\mu$$

<u>GSW</u>: $\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu = \sqrt{2}\left[\tau_+ W^{-\mu} + \tau_- W^{+\mu}\right] + \tau_3 W_3^\mu$

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

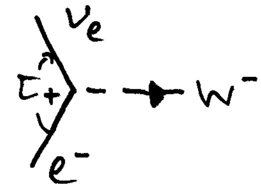
und $\tau_- \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\tau_- \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Isospin auf/ab-steigeoperator.

<u>$W^\pm$-Bosonen:</u> $W^{(\pm)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^\mu \pm i W_2^\mu)$

$$\Rightarrow D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\tau_+ W^{(-)\mu} + \tau_- W^{(+)\mu}\right) + i\frac{g}{2}\tau_3 W_3^\mu - i\frac{g'}{2}B^\mu$$

(1) Betrachte <u>Übergang $e^- \to \nu_e$</u>

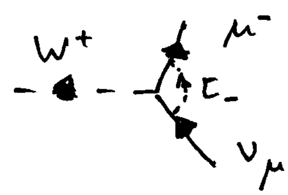


$$\mathcal{M} \sim -i\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L \gamma_\mu \tau_+ e_L W^{(-)\mu}$$

mit $\nu_L = u_L(\nu) = u_L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $e_L = u_L(e) = u_L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

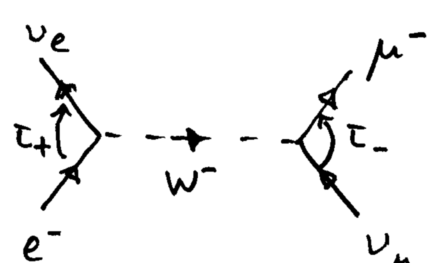
$(u_L \to u)$: $$\mathcal{M} \sim -i\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{u}(\nu)\gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u(e) W^{(-)\mu}$$

Betrachte <u>Übergang $\nu_\mu \to \mu^-$</u>



$$\mathcal{M} \sim -i\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{u}(\mu)\gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u(\nu) W^{(+)\mu}$$

gesamtes ME :



$$\frac{\quad}{8}\ \frac{\quad}{q^2-M_W^2}\ \bar{u}(\nu_e)\gamma_\mu(1-\gamma^5)\tau_+ u(e)\,\bar{u}(\mu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\tau_- u(\nu_\mu)$$

(ersetze W^μ durch W-Propagator)

Wird für $-q^2 \ll M_W^2 \Rightarrow$ 4-Fermion-WW und

$$\boxed{\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}}$$

c) Übergang $\nu_e \to \nu_e$:

2 Terme in D^μ: $i\frac{g}{2}\tau_3 W_3^\mu$ und $-i\frac{g'}{2}B^\mu$

ME: $$-i\frac{g}{2}\bar{\nu}_L\gamma_\mu \underbrace{\tau_3\nu_L}_{\nu_L} W_3^\mu \quad + \quad +i\frac{g'}{2}\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L B^\mu$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ keiner der beiden Terme kann mit dem Photon A^μ identifiziert werden (beide koppeln endlich an das ν)

$\Rightarrow$ konstruiere Mischung $A^\mu = aW_3^\mu + bB^\mu$

so daß die Kopplung $\sim a\left(-\frac{g}{2}\right) + b\frac{g'}{2} = 0$

$$\Rightarrow a = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \equiv \sin\Theta_W \quad \text{und} \quad b = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}} \equiv \cos\Theta_W$$

$$\boxed{\begin{aligned} A^\mu &= B^\mu \cos\Theta_W + W_3^\mu \sin\Theta_W \\ Z^\mu &= -B^\mu \sin\Theta_W + W_3^\mu \cos\Theta_W \end{aligned}}$$

bzw.

$$B^\mu = A^\mu \cos\Theta_W - Z^\mu \sin\Theta_W$$

$$W_3^\mu = A^\mu \sin\Theta_W + Z^\mu \cos\Theta_W$$

Damit wird die Neutrino-Kopplung:

$$-i\frac{g}{2}\bar{u}_L\gamma_\mu u_L W_3^\mu + i\frac{g'}{2}\bar{u}_L\gamma_\mu u_L B^\mu$$

$$= \frac{i}{2}\underbrace{\left(-g\sin\Theta_W + g'\cos\Theta\right)}_{=0}\bar{u}_L\gamma_\mu u_L A^\mu - \frac{i}{2}\underbrace{\left(g\cos\Theta_W + g'\sin\Theta_W\right)}_{=\sqrt{g^2+g'^2} = g/\cos\Theta_W}\bar{u}_L\gamma_\mu u_L Z^\mu$$

also $\boxed{-i\frac{g}{2\cos\Theta_W}\,\bar{u}(\nu)\gamma_\mu\frac{1-\gamma^5}{2}u(\nu)}$

③ Übergang $e^- \to e^-$: (Elektron-Kopplung)

a) rechtshändige Elektronen:

$$ig'\bar{u}_R\gamma_\mu u_R B^\mu = ig'\cos\theta_W \bar{u}_R\gamma_\mu u_R A^\mu - ig'\sin\theta_W \bar{u}_R\gamma_\mu u_R Z^\mu$$

Die Kopplung an das Photon muß (damit die bekannte QED herauskommt)

$$ie\bar{u}\,\gamma_\mu u\, A^\mu \quad \text{(egal ob R oder L)}$$

sein.

$$\Rightarrow \quad \boxed{e = g'\cos\theta_W = g\sin\theta_W}$$

b) Beliebige Chiralität:

$$u(e) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_e + \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u_e = u_L + u_R$$

Gesamte Kopplung:

$$\mathcal{L} \sim -\frac{1}{2}ig\,\bar{u}_L\gamma_\mu \underbrace{\tau_3 u_L}_{-u_L} W_3^\mu + \frac{1}{2}ig'\bar{u}_L\gamma_\mu u_L B^\mu + ig'\bar{u}_R\gamma_\mu u_R B^\mu$$

$$= \frac{i}{2}\underbrace{(g\sin\theta_W + g'\cos\theta_W)}_{2e}\bar{u}_L\gamma_\mu u_L A^\mu + ie\bar{u}_R\gamma_\mu u_R A^\mu$$

$$-\frac{i}{2}\underbrace{(-g\cos\theta_W + g'\sin\theta_W)}_{\sqrt{g^2+g'^2}\,(2\sin^2\theta_W - 1)}\bar{u}_L\gamma_\mu u_L Z^\mu - i\underbrace{g'\sin\theta_W}_{\sqrt{g^2+g'^2}\,\sin^2\theta_W}\bar{u}_R\gamma_\mu u_R Z^\mu$$

$\Rightarrow$ Kopplung ans Photon: $\quad ie\,\bar{u}\,\gamma_\mu u A^\mu$

Kopplung an's Z^0 $\quad : -\frac{ig}{2\cos\theta_W}\,\bar{u}\,\gamma_\mu(v_e - a_e\gamma^5)\,u\,Z^\mu$

mit $\boxed{\begin{aligned} v_e &= 2\sin^2\theta_W - \tfrac{1}{2} \\ a_e &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}}$ $\quad \Rightarrow$ Übung

exp. $\sin^2\theta_W \approx 0.23 \Rightarrow a_e \gg v_e$, hauptsächlich Axialvektorkopplung an das Z^0

Kopplungen der Quarks:

$\rightarrow$ setze für Quarks die entsprechenden Quantenzahlen (I_3 und Y) in die kovariante Ableitung ein:

a) linkshändige Quarks: $Y = 1/3$, $I_3 = \pm 1/2$

$$D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\tau_+ W^{(-)\mu} + \tau_- W^{(+)\mu}\right) + \frac{ig}{2}\tau_3 W_3^\mu + \frac{ig'}{6}B^\mu$$

z.B. $d' \rightarrow u$

$$-i\frac{g}{\sqrt{2}}\,\bar{u}(u)\,\gamma_\mu\,\frac{1-\gamma^5}{2}\,\tau_+\,u(d)\,W^{(-)\mu} \quad \text{(wie beim } e^-\text{)}$$

– entsprechend Kopplung an Z^0 und γ.

$$D^\mu = \partial^\mu + i Q_q g' B^\mu$$

11.4. Feynman-Regeln der elektroschwachen WW

a) Kopplung der geladenen Fermionen an das e-m. Feld:

$$\boxed{-iQ_f e \bar{u}_f \gamma_\mu u_f}$$

reiner Vektor!

$Q_f = -1$ $\quad e^-, \mu^-, \tau^-$

$Q_f = \frac{2}{3}$ $\quad u, c, t$

$Q_f = -\frac{1}{3}$ $\quad d, s, b$

b) Kopplung an die W-Bosonen:

$$\boxed{-i \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}(\nu) \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \tau_+ u(e)}$$

Vektor – reiner Axialvektor?

entsprechend für $(\mu^- \nu_\mu)$, (τ^-, ν_τ), (d', u), (s', c), $(b' t)$

c) Kopplung an das Z^0-Boson:

$$\boxed{-i \frac{g}{\cos\theta_W} \bar{u}_f \gamma_\mu \left[c_R \frac{1+\gamma^5}{2} + c_L \frac{1-\gamma^5}{2} \right] u_f}$$

mit $c_R = -Q_f \sin^2\theta_W$

und $c_L = I_3 - Q_f \sin^2\theta_W$

die Z^0-Kopplung kann man auch schreiben als:

$$\boxed{-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\,\bar{u}_f\,\gamma_\mu\,(v_f - a_f\gamma^5)\,u_f}$$

v_f = Vektorkopplung $= c_L + c_R = I_3 - 2Q_f\sin^2\theta_W$

a_f = Axialvektorkopplung $= c_L - c_R = I_3$

exp. $\sin^2\theta_W \approx 0{,}23$

f	v_f	a_f
ν	+0.5	+0.5
e	+0.04	−0.5
u	0.29	+0.5
d	−0.65	−0.5

- Propagatoren wie gehabt:

$$\frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu/M^2}{q^2 - M^2} \qquad \text{solange } q^2 \neq M^2$$

(für $q^2 \approx M^2 \Rightarrow \Gamma_{W/Z}$!)

- alles beruht auf ungebrochener $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Symmetrie.

<u>aber</u>: Higgs-Mechanismus läßt die Kopplungen zw. Bosonen und Fermionen unverändert!
(wie auch im Beispiel $U(1)$).