

Einschub: Lagrange-Formalismus

Lagrange-Formalismus: "Buchhaltung" für Feldgleichungen.

Prinzip • $\mathcal{L} \oplus$ E.L. Gleichungen $\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen für Felder

- Mehrere Felder: $\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$
($+ D^{\mu} \rightarrow D^{\mu}$)

- egal ob skalare, Spin $\frac{1}{2}$ Felder, Spin 1 Felder, masselos od. massiv...

Klass. Mechanik: $L = T - V$

beachtet als Funktion von verallg. Koordinaten $q, \dot{q}$.

$$L(q_i, \dot{q}_i) \text{ für } i \text{ Massenpunkte}$$

erhalte Bewegungsgleichung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung:

Wirkung: $S = \int L(q_i, \dot{q}_i) dt$

$$\text{aus } \boxed{\delta S = 0} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\Rightarrow q_i(\vec{x}, t) = \dots$$

jetzt: Feldtheorie: (ohne Beweis!!)

Massenpunkte $q_i \rightarrow$ Felder $\phi_i(x)$

Lagrange-Funktion $L \rightarrow$ Lagrange-dichte $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

verallg. Koordinaten: $(q, \dot{q}) \Rightarrow (\phi, \partial_\mu \phi)$

Wirkung: $S = \int L dt = \int dt \underbrace{\int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}_L$

aus $\delta S = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\phi(x))} = 0} \Rightarrow \text{Beweg.-Gl. f\"ur } \phi.$$

Euler-Lagrange-Gleichungen f\"ur $\mathcal{L}$

- Wenn $\mathcal{L}$ ein Lorentz-Skalar $\Rightarrow$ Bewegungsgleich. sind kovariant!

Beispiele: ① reelles skalares Feld ϕ :

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2]$$

einsetzen in E.L.-Gln:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} 2 \partial^\mu \phi \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\phi)} = -2m^2 \phi$$

$$\Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu \phi + 2m^2 \phi = \boxed{(\square + m^2) \phi = 0} \quad \checkmark$$

(Klein-Gordon-Gleichung)

② komplexes skalares Feld:

$$\mathcal{L}_2 = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^* \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$$

Betrachte ϕ und ϕ^* als unabhängige Variable!:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi^*$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^*$$

$$\Rightarrow \boxed{(\square + m^2) \phi^* = 0}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi$$

$\text{denn } (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) = (\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi^*)!$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2 \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{(\square + m^2) \phi = 0}$$

ϕ, ϕ^* beschreiben Felder positiver und negativer Ladung aber gleicher Masse.

Das Konzept funktioniert auch für spin $\frac{1}{2}$, spin 1
Felder mit und ohne Masse.

z.B.: $\mathcal{L}_3 = \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x)$ Dirac-Feld

$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ Photon-Feld

$\mathcal{L}_6 = \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$ ist die QED ∇

$= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

(um die verschiedenen Felder zu koppeln muß
 ∂_μ durch $D_\mu = \partial_\mu + iq A_\mu$ ersetzt werden)

$\Rightarrow$ Übungen.

10.3. Higgs-Mechanismus im Lagrange-Formalismus

Lagrange-Dichte eines ^{komplexen} skalaren Feldes:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^* - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi^* = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^* - V(\phi)$$

T - V

Gesamtenergiedichte $\mathcal{H} = T + V = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^* + V(\phi)$

wird minimal (= Grundzustand) für $\phi = \text{const}$ und $V(\phi)$

für einfachen Masseterm $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi \phi^*$ ist $V(\phi)$ minimal für $\phi_0 = 0$ (das wollen wir nicht...)

Wähle (wie beim Ferromagneten)

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi \phi^* + \lambda^2 (\phi \phi^*)^2$$

Das Minimum liegt wiederum bei

$$|\phi_0| = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{mit } v = \frac{\mu}{\lambda}$$

und beliebiges Phase, die wir $= 0$ wählen:

$$\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Jetzt: Betrachte $\phi(x)$ in der Nähe des Grundzustandes:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x) + i\zeta(x))$$

Dann ist das Potential

$$V(\phi(x)) = \mu^2 (-\phi \phi^* + \frac{1}{v^2} (\phi \phi^*)^2)$$

$$= \mu^2 \left(-\frac{1}{2} v^2 - \cancel{\eta v} - \frac{1}{2} \eta^2 - \cancel{\frac{1}{2} \zeta^2} + \frac{1}{4} v^2 + \eta^2 + \cancel{\eta v} + \frac{1}{2} \eta^2 \right. \\ \left. + \cancel{\frac{1}{2} \eta^2} + \frac{\eta^3}{v} + \frac{\eta \zeta^2}{v} + \frac{1}{4} \frac{\eta^4}{v^2} + \frac{1}{4} \frac{\eta^2 \zeta^2}{v^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{4}\mu^2 v^2 + \mu^2 \gamma^2 + \text{H.O.}$$

$\left(-\frac{1}{4}\mu^2 v^2 = \text{const}\right)$
 $\Rightarrow$ spielt keine Rolle i.d.
 Bewegungsgleichungen)

Damit wird die Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - V(\phi)$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \gamma)(\partial^\mu \gamma) - \mu^2 \gamma^2 \right]}_{\text{skalares Feld der Masse } \mu} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) \right]}_{\text{masseloses skalares Feld}}$$

→ Masse $\mu \hat{=} \text{Rückwirkende Kraft im Potential}$

→ Anregung "entlang der Delle"
 keine Potentialänderung
 $\Rightarrow$ masselos.

ξ -Feld heißt Goldstone-Boson.

γ -Feld heißt Higgs-Boson.

$\mathcal{L}$ ist invariant gegen globale Phasentr.f. $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$,
 der Grundzustand ϕ_0 ist nicht invariant

$\Rightarrow$ spontan gebrochene Symmetrie

Goldstone-Theorem: immer wenn der Grundzustand eine geringere Symmetrie als der Lagrangian hat tritt mindestens ein masseloses Goldstone-Boson auf.

10.3.1. Wechselwirkung zwischen Higgs-Feld und elektromagnetischem Feld

- um dem Photon eine Masse zu geben muss es eine el-mag. Kopplung zw. Higgs + elmag. Feld geben
(später: $W+Z$ -Bosonen $\Rightarrow$ Higgs trägt schw. (Kopplung!))

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Photon}}$$

$$\mathcal{L} = \underbrace{(D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi)^*}_{\mathcal{L}_{\text{Higgs}}} + \underbrace{\mu^2(\Phi\Phi^*) - \frac{\mu^2}{v^2}(\Phi\Phi^*)^2}_{V_{\text{Higgs}}} - \underbrace{\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_\gamma}$$

Wieder: $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$

Wichtige Eigenschaft: $\mathcal{L}$ ist invariant unter lokalen

Eichtrf: $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi(x); \quad \Phi \rightarrow \Phi' = e^{iq\chi(x)}\Phi$

$\Rightarrow$ Übungen

- Wir betrachten jetzt $\mathcal{L}$ für ein Higgsfeld i.d. Nähe des Grundzustandes $\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}v$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\xi(x))$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \underbrace{\mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}\mu^2v^2}_{"-V(\phi)"} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{[\partial_\mu + iq A_\mu]}_{D_\mu} \underbrace{(\psi + \gamma + i\varphi)}_{\phi} \right] \underbrace{[\partial^\mu - iq A^\mu]}_{D^{\mu*}} \underbrace{(\psi + \gamma - i\varphi)}_{\phi^*} \Big] \Big\}$$

T_{Higgs}

$$\{ \} = (\partial_\mu \gamma)(\partial^\mu \gamma) + (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + q^2 \underbrace{((\psi + \gamma)^2 + \varphi^2)}_{\approx v^2} A_\mu A^\mu$$

$$+ 2q\psi A_\mu \partial^\mu \varphi + \text{H.O. (Terme der Ordnung } (\gamma \text{ oder } \varphi)^3)$$

⇒ Gesamtlagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \gamma)(\partial^\mu \gamma) - \mu^2 \gamma^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) \right]$$

γ -Teilchen mit Masse μ_γ masseloses φ -Teilchen

$$- \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu + q\psi A_\mu (\partial^\mu \varphi)$$

Photon (kinet.) Masseles für A_μ (Photon) ???

Fasse Terme mit A_μ und φ zusammen:

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu + q\psi A_\mu (\partial^\mu \varphi)$$

$$= \left(A_\mu + \frac{1}{q\psi} (\partial_\mu \varphi) \right) \left(A^\mu + \frac{1}{q\psi} (\partial^\mu \varphi) \right) \cdot \frac{1}{2} q^2 v^2 \quad (\text{Binom...})$$

Was bedeutet der $q v A_\mu (\partial^\mu \varphi)$ - Term? :

Nutze Eichinvarianz von $\mathcal{L}$ aus. Führe Eichtrf durch:

$$\chi(x) = -\frac{1}{q v} \varphi(x)$$

$$\Rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \left(\frac{1}{q v} \varphi \right) \quad \text{und}$$

$$\phi' = e^{-i q \chi} \phi = e^{-i q \frac{1}{q v} \varphi(x)} \phi \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \varphi)$$

Beweis:

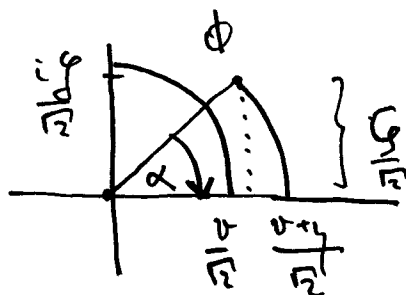
$$\left[e^{-i \frac{\varphi}{v}} \phi = e^{-i \frac{\varphi}{v}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (v + \gamma + i \varphi) \right] \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{\cos \frac{\varphi}{v}}_{\approx 1} - i \underbrace{\sin \frac{\varphi}{v}}_{\approx \frac{\varphi}{v}} \right) (v + \gamma + i \varphi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - i \frac{\varphi}{v} \right) (v + \gamma + i \varphi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\gamma + v + \cancel{i \varphi} - \cancel{i \varphi} - \cancel{i \frac{\varphi \gamma}{v}} + \cancel{\frac{\varphi^2}{v}} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \gamma) \left. \right]$$

oder anschaulich:



$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$\phi' = e^{-i \alpha} \phi$$

Einsetzen von A'_μ und ϕ' in $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi^2 \right] - \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} q^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + \dots$$

(alle Terme mit φ verschwinden, da $\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \gamma)$!) (41)

$\Rightarrow \mathcal{L}$ beschreibt ein

- massives Vektorfeld (Masse $M = g v$)
- ein massives skalares Feld
(das Higgs-Boson) (Masse $\sqrt{2} \mu = m$)

Was ist mit dem γ -Feld passiert?

• vor Eichtrf.: A_μ war masseloses Feld

$\Rightarrow$ zwei transversal-Komponenten
aber keine longitudinal-Komponente

• nach Eichtrf.: A_μ' ist massives Feld

2 transversal + 1 longitudinal-Komponente

γ -Feld (Goldstone-B.) wurde vom A_μ "aufgefressen"
um eine longitudinal-Komponente zu erhalten.

Freiheitsgrade (unabh. Felder):

vor Trf.: 1 γ -Feld $m_\gamma = \sqrt{2} \mu$

1 γ -Feld $m = 0$

2 transvers. el-mag. Felder $m = 0$

} = 4

Äquival.
Beschreibung!!!

nach Trf.: 1 γ -Feld $m_\gamma = \sqrt{2} \mu$

2 transvers. el-mag. }
1 long. el-mag. } Feld $M = g v$

} = 4