Gruppentheorie (für Teilchenphysiker)

K.Desch WS 02/03

0. Motivation

Symmetrieprinzip: Naturgesetze $\leftrightarrow$ Invarianz eines physikalischen Systems unter bestimmten Transformationen

Transformationen: Menge der möglichen Transformation wird mathematisch durch eine Gruppe beschrieben.

Literatur:

L.Jauneau, Introduction to the theory of symmetries (1968), Lecture notes

W.Greiner,B.Müller, Theoretische Physik (Bd. 5) – Quantenmechanik II: Symmetrien Verlag H.Deutsch (1998)

M. Wagner, Gruppentheoretische Methoden in der Physik, Vieweg Lehrbuch (1985)

J.F. Cornwell, Group Theory in Physics, Volume 1+2, Academic Press (1984)

1. Definitionen

Gruppe: Menge G von Elementen für die eine Verknüpfung ('Multiplikation') existiert, wenn gilt:

1. Vollständigkeit: wenn a,b $\in$ G ist auch a*b $\in$ G
2. Eins: es gibt ein Element 1, so dass a*1 = 1*a für alle a $\in$ G
3. Inverses: zu jedem a $\in$ G gibt es ein Element $a^{-1} \in$ G mit $a * a^{-1} = 1$
4. Assoziativ: (ab)c = a(bc)

Abelsche Gruppe: wenn ab = ba

Klassifikation:

Diskrete Gruppen: endliche oder abzählbar unendliche Zahl von Gruppenelementen

Beispiel: Gruppe der Permutationen dreier Objekte " S_3 "

hat 6 Elemente:

1: (123) $\rightarrow$ (123)	c: 2 $\leftrightarrow$ 3
a: zykl. Vertauschung	d: 3 $\leftrightarrow$ 1
b: antizykl. Vertauschung	e: 1 $\leftrightarrow$ 2

Kontinuierliche Gruppen (Lie-Gruppen): überabzählbar unendliche Zahl von Elementen. Hängen ab von d Parametern.

Beispiel: Gruppe der Drehungen im dreidimensionalen Raum "SO(3)" hat 3 Parameter (z.B. drei Drehwinkel)

d heißt Ordnung der Gruppe

Darstellung einer Gruppe: wenn es eine isomorphe Abbildung zwischen den Elementen einer Gruppe und einer Menge von $n \times n$ -Matrizen Γ gibt, so dass für zwei Elemente $R_1, R_2 \in G$ gilt: $\Gamma(R_1)\Gamma(R_2) = \Gamma(R_1R_2)$ dann heißt die Gruppe der Matrizen Γ eine Darstellung von G.

- n heißt die Dimension der Darstellung
- Achtung: d (Ordnung der Gruppe) muss nicht gleich n (Dimension der Darst.) sein.
- zu einer Gruppe gibt es i.d.R. mehr als eine Darstellung!

Reduzible Darstellung: eine Darstellung heißt reduzibel, wenn es eine Transformation M gibt, so dass die Darstellung $\Gamma' = M^{-1}\Gamma M$ folgende Gestalt hat:

$$\Gamma'(R) = \begin{pmatrix} \Gamma^{(1)}(R) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma^{(2)}(R) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

, das heißt, blockweise diagonal ist.

⇨ jede $\Gamma^{(i)}(R)$ ist auch eine Darstellung von von G !!!

man sagt Γ "zerfällt" in $\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \Gamma^{(3)} + \dots$

Irreduzible Darstellung: _wenn $\Gamma^{(i)}$ nicht mehr weiter reduzierbar

Beispiel: für die endliche Gruppe S_3

Vorher Nachher	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} =$	$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x\\z\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}z\\y\\x\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}$
Transf.- Matrix	$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{pmatrix}$

Die Matrizen sind eine Darstellung von S_3 mit der Dimension 3

Diese Darstellung ist reduzibel: x+y+z bleibt bei den Transformationen invariant

⇨ wähle neue Achsen X,Y,Z mit Z ⊥ Ebene (x+y+z=const.)

⇨ Z bleibt invariant unter Transformationen

⇨ die Transformationsmatrizen haben die Gestalt $\begin{pmatrix} \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Schreibweise für die Zerlegung: [3] = [2] + [1] (machmal auch einfach 3=2+1)

Die irreduzible Darstellung mit der niedrigsten Dimension>1 (d.h. nicht-triviale Darstellung) heißt fundamentale Darstellung der Gruppe G

2. Physikalische Bedeutung:

Wellenfunktion $\psi(x)$

Transformation unter R: $\psi'(x) = R\psi(x)$ Achtung: je nachdem wie R wirkt kann es eine Transformation der Komponenten der Wellenfunktion und/oder eine Transformation der Raum/Zeit-Koordinaten bewirken.

Invarianz des Systems: bedeutet die Wellengleichung (e.g. Schrödingergleichung bleibt invariant unter der Transformation.

Schrödinger-Gleichung: $H\psi = E\psi$

Anwendung von R: $R(H\psi) = RE\psi = E\psi'$

ist invariant wenn: $H(R\psi) = E(R\psi)$, also

$H\psi' = E\psi'$ (*)

Also wenn: $RH = HR$, d.h. $[R,H] = 0$

(*) bedeutet also: wenn ψ Eigenfunktion zum Eigenwert E ist, dann ist auch $R\psi = \psi'$ Eigenfunktion zum Eigenwert E.

Wenn R eine Symmetriegruppe von H ist, dann bildet die Menge aller Eigenfunktionen $R(\alpha)\psi = \psi_\alpha$ einen invarianten Vektorraum mit entarteten Eigenfunktionen. Diesen invarianten Vektorraum nennt man **Multiplett**

Nehmen wir an, dass dieser VR durch n orthonormierte Eigenvektoren $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ aufgespannt werden kann:

Wenn R ein Gruppenelement von G ist, dann ist $R\psi_j$ auch eine Eigenfunktion mit Eigenwert E, d.h. $\psi' = R\psi_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}\psi_j$

Die Koeffizienten R_{ij} selbst bilden eine Darstellung der Gruppe G!

Das wird ausgedrückt im **Wigner-Theorem:**

Wenn G eine Symmetriegruppe eines physikalischen Systems mit Hamiltonoperator H ist, dann zerfallen die Eigenfunktionen von H in Multipletts mit jeweils entarteten Energieniveaus. Jedes dieser Multipletts ist die Basis einer irreduziblen Darstellung von G

3. Die dreidimensionale Drehgruppe

Physik: Invarianz unter räumlichen Drehungen ⇨ Drehimpulserhaltung

Gruppentheoretische Beschreibung:

Drehgruppe D_3, isomorph zur Gruppe der orthonormalen 3x3 Matrizen mit det = 1 (SO(3)).

Darstellungen der Drehgruppe sind entartete Multipletts mit Drehimpuls J:

Skalar	J=0	Darstellung der Dimension 1 (triviale Darst.)
Spinor	J=1/2	Darstellung der Dimension 2 (Paulimatrizen)
Vektor	J=1	Darstellung der Dimension 3 (3x3 Spinmatrizen)

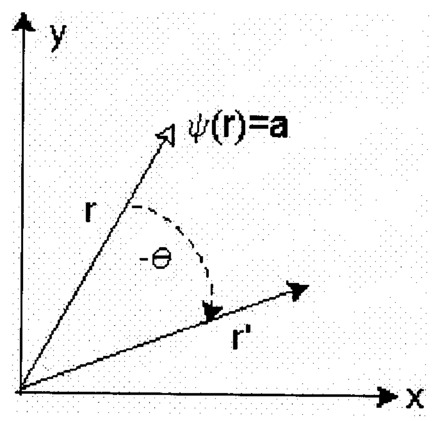
usw...

⇨ Zusammenhang zwischen Transformationen im Ortsraum und dem (abstrakten) Vektorraum der Wellenfunktionen.

3.1 Skalares Feld

Betrachte Koordinatentransformation $\vec{r} \to \vec{r}' = R\vec{r}$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Drehung um $-\theta$



Was passiert mit der Wellenfkt.?

Koordinatensystem wird ‘unter der WF weggedreht’

⇨ der Funktionswert a gehört nach der Drehung zu dem Ortsvektor, der nach der Drehung den Wert von $\vec{r}$ hat, also zu $R^{-1}\vec{r}$:

$$\psi'(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r})$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0}\,1 \end{pmatrix}$$

Betrachte infinitesimale Rotation:
$$x' = x - y\,d\theta$$
$$y' = x\,d\theta - y$$
$$z' = z$$

$$\psi'(\vec r) = \psi(R^{-1}\vec r) = \psi(x - y d\theta, y + x d\theta, z) = \psi(x,y,z) + (x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x})d\theta$$

Man erkennt den Drehimpulsoperator:

$$\vec L = \frac{1}{i}\vec r \times \vec\nabla, \quad L_z = -i(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) \qquad (\hbar = 1)$$

$$\Rightarrow \psi' = (1 + i\,d\theta L_z)\psi$$

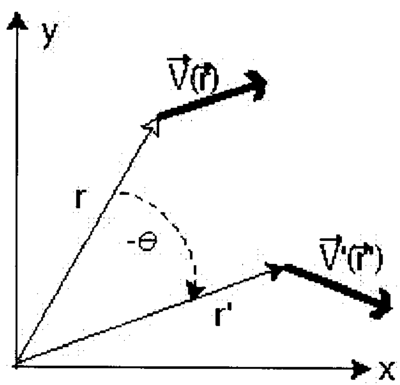
und für eine endliche Drehung: $\psi' = \exp(i\theta L_z)\,\psi$ (entspr. für L_x, L_y)

3.2 Vektorfeld

wird beschrieben durch 3-komponentige Wellenfunktion $\vec V(\vec r)$

Neben dem Koordinatensystem wird auch der Vektor der Wellenfunktion gedreht:

$\vec V'(\vec r) = R\vec V(R^{-1}\vec r)$



Wie beim skalaren Feld gilt:

$\vec V(R^{-1}\vec r) = (1 + i\,d\theta L_z)\,\vec V(\vec r)$

Eine infinitesimale Rotation des Vektors $\vec V$ ist gegeben durch:

$$R_{inf} = \begin{pmatrix} 1 & d\theta & 0 \\ -d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + i\,d\theta \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_z$$

$$\Rightarrow V'(\vec r) = R\vec V(R^{-1}\vec r) = (1 + i\,d\theta S_z)(1 + i\,d\theta L_z)\,\vec V(\vec r)$$

In 1. Ordnung: $V'(\vec r) = (1 + i\,d\theta(S_z + L_z))\,\vec V(\vec r) = (1 + i\,d\theta J_z)\vec V(\vec r)$

Endliche Transformation: $V'(\vec r) = \exp(i\theta J_z)\vec V(\vec r)$

Entsprechend für die anderen Komponenten:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Spin-Matrizen für Spin 1, $\vec{S}$ = Spin-1-Operator)

Die S_i (und auch die L_i und J_i) gehorchen den Vertauschungsregeln:

$$\boxed{[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk} S_k}$$

(wichtige) Definition:

S_x, S_y, S_z heißen infinitesimale Operatoren oder **Generatoren** der Gruppe SO(3) für die 3-dimensionale Darstellung.

- Alle infinitesimalen Gruppenoperationen S können durch Linearkombination der S_i ausgedrückt werden
- Alle endlichen Operationen erhält man als $U = \exp(i\overset{\varepsilon}{\theta_i} S_i)$
- Die Vertauschungsregeln definieren die **Gruppenalgebra**
- Jede (einfache) Lie-Gruppe ist durch die Angabe der Algebra,

$$[X_i, X_j] = i f_{ijk} X_k$$

  d.h., der Strukturkonstanten f_{ijk} vollständig definiert, d.h. die physikalischen Konsequenzen hängen nur von den Strukturkonstanten ab.
- Die Strukturkonstanten sind unabhängig von der betrachteten Darstellung ("Lie-Theorem") $\delta_{ij} +$
  (Achtung: $\{X_i, X_j\} = i d_{ijk} X_k$ hängt von der Darstellung ab).
- Die Generatoren sind hermitesch und haben Spur 0
- Im Fall der SO(3) gibt es eine unitäre Transformation, so dass eine der S_i diagonal wird z.B. S_z . ⇨es gibt eine additive Quantenzahl $S_z|\psi\rangle = m|\psi\rangle$
- Die Anzahl der gleichzeitig diagonalisierbaren Generatoren heißt **Rang** der Gruppe (z.B. Rang(SO(3)) = Rang(SU(2)) = 1, Rang(SU(3))=2)
- Entsprechend dem Rang der Gruppe gibt es eine Anzahl von unabhängigen Operatoren $\hat{C}_r(r = 1 \ldots \mathrm{Rang}(G))$, deren Eigenwerte für alle Zustände eines Multipletts gleich sind. Diese Operatoren heißen **Casimir-Operatoren**

- Der Casimir-Operator der SO(3) ist $\vec{J}^2$ (Drehimpulsbetrag). Seine Eigenwerte charakterisieren die Multipletts von SO(3) (j=0:Skalar,j=1/2:Spinor etc.)

3.3 Kombination zweier Spin-1-Teilchen

Spin-1-Teilchen werden durch eine drei-komponentige Wellenfunktion beschrieben, deren Komponenten wie ein Vektor transformieren (unter SO(3)-Operationen).

Die Kombination zweier Teilchen wird durch das direkte Produkt der Wellenfunktionen, d.h. durch den 9-komponentigen Tensor $T_{ij} = V_i W_j \ (i, j = x, y, z)$ beschrieben.

Physikalische Frage: welches sind die Eigenfunktionen des Systems zu $\vec{J}^2$ und J_z ?

Gruppentheoret. Frage: Finde eine 9-dimensionale Darstellung der SO(3):

$$\begin{pmatrix} & & \\ & 9\text{x}9 & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ \vdots \\ T_{ij} \\ \vdots \\ T_{33} \end{pmatrix}$$

Eine Darstellung, die direkt die T_{ij} transformiert ist reduzierbar:
Man kann folgende Linearkombinationen bilden:

1 skalare Kombination: $\tilde{T}_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$

3 antisymmetrische Kombinationen:

$$\tilde{T}_{[ij]} = \begin{Bmatrix} \frac{T_{12} - T_{21}}{2} \\ \frac{T_{23} - T_{32}}{2} \\ \frac{T_{31} - T_{13}}{2} \end{Bmatrix}$$

5 symmetrische Kombinationen:

$$\tilde{T}_{\{ij\}} = \begin{Bmatrix} \frac{T_{12} + T_{21}}{2} \\ \frac{T_{23} + T_{32}}{2} \\ \frac{T_{13} + T_{31}}{2} \\ \frac{2T_{11} - T_{22} - T_{33}}{3} \\ \frac{2T_{22} - T_{11} - T_{33}}{3} \end{Bmatrix}$$

- Die skalare Kombination ist invariant unter Gruppenoperationen
- Die antisymm. und symm. Kombinationen transformieren sich untereinander, da eine Gruppenoperation (Rotation) die Symmetrieeigenschaften unter Teilchenvertauschung nicht ändern kann!

⇨ Es gibt eine lineare Transformation der T_{ij} in die $(\tilde{T}_{ii}, \tilde{T}_{[ij]}, \tilde{T}_{\{ij\}})$ so dass die Gruppenmatrizen sich folgendermaßen tranformieren:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \text{9x9 Matrix} & \\ & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1\text{x}1} & & 0 \\ & \boxed{3\text{x}3} & \\ 0 & & \boxed{5\text{x}5} \end{pmatrix}$$

Darstellung ⇨ 3 irreduzible Darstellungen (Multipletts)

$$[3] \otimes [3] = [1] + [3] + [5]$$

Spin 1 x Spin 1 ⇨ Spin 0 + Spin 1 + Spin 2

Die Koeffizienten der linearen Transformation der Tensoren sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Quantenzahlen

- Zustände eines Multipletts haben alle den gleichen Eigenwert des (der) Casimir-operatoren $SO(3): \vec{J}^2(EW: j(j=1))$
- Zustände innerhalb eines Multipletts sind charakterisiert durch additive Quantenzahlen entsprechend dem Rang der Gruppe

$$\begin{aligned}
&SO(3): J_z(EW: m) \\
&j = 0 : m = 0 \\
&j = \tfrac{1}{2} : m = -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2} \\
&j = 1 : m = -1, 0, 1 \\
&j = \tfrac{3}{2} : m = -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} \\
&j = 2 : m = -2, -1, 0, 1, 2
\end{aligned}$$

- Es gibt zu jeder additiven Quantenzahl "Schiebeoperatoren" J_+, J_- , so dass

$$J_+ |j,m\rangle = |j,m+1\rangle$$
$$J_- |j,m\rangle = |j,m-1\rangle$$

wobei $|j,m\rangle = 0$ außerhalb des erlaubten Bereichs für m

in der $SO(3): J_\pm = J_x \pm iJ_y$

3.4 Halbzahliger Spin (kurz, s. Übung)

$j = \frac{1}{2} : m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ ⇨ 2-dimensionale Darstellung von SO(3)?

⇨ 2x2 Matrizen (können nicht reell sein, da 3 Parameter!)

⇨ komplexe 2x2 Matrizen

Normerhaltung ⇨ $U^\dagger U = 1$ unitär, U(2) ?

U(2) hat 4 Parameter. Es gilt $|\det U|^2 = 1$ $\Rightarrow \det U = e^{i\varphi}$

φ wird fixiert: $\det U = 1$ $\Rightarrow$ SU(2)

SU(2) hat: Dimension 2, Ordnung 3 (3 Parameter), Rang 1

Generatoren der SU(2): Pauli-Matrizen

$[\sigma_i, \sigma_j] = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ (gleiche Algebra wie Spin 1, Lie-Theorem!)

(Zusammenhang zu 3D-Drehungen, Ambuguität ⇨ Übung).

4. Innere Symmetrie

Bis jetzt: Symmetrie bzgl. Transformation im Ortsraum.

Erweiterung des Konzepts:

Symmetrie bezüglich eines abstraken Raumes, von dessen Koordinaten die Wellenfunktionen nicht explizit abhängen (es gibt keinen "Iso-Bahndrehimpuls"!) jedoch transformieren sich die W.F. unter den inneren Symmetrieoperatoren wie die Darstellungen der entsprechenden Gruppe (z.B. Isoskalar, Isospinor, Isovektor etc.)

Wichtigste innere Symmetrien:

SU(2) Isospin Dublett $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ entspricht 'Flavour-SU(2)' $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$

SU(2) schwacher Isospin Dubletts $\begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \dots$

Triplett $\begin{pmatrix} W^+ \\ W^3 \\ W^- \end{pmatrix}$

SU(3) Flavour fundamentale Darstellung

Triplett (kein Vektor!) $\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ Antitriplett $\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix}$

SU(3) Coulour Triplett (kein Vektor!) $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ Antitriplett $\begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$

Höhere Symmetriegruppen, z.B. SU(5), SO(10) ⇨ Modelle für Grand Unified Theories (GUTs)

kommen in String-Theorien vor...

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5) \subset SO(10) \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$

5. SU(3)

(erstmals studiert von Ikeda,Ogawa,Ohnuhi in Progr.Theor.Phys 22 (1959),719.

Unitäre Gruppentransformation $U = \exp(iH)$

$U(2): \quad H = \alpha_0 1 + \alpha_i \sigma_i \qquad i = 1,2,3$

$U(3): \quad H = \alpha_0 1 + \alpha_i \lambda_i \qquad i = 1,\dots,8$

λ_i sind hermitesche spurlose Matrizen $\Rightarrow U = e^{i\omega_0}\, e^{i\omega_i \lambda_i}$

$U(1) \times SU(3)$

SU(3): det(U)=+1

Die Generatoren der SU(3) sind die Gell-Mann-Matrizen:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Gruppe SU(3):

- Ordnung 8 (8 Parameter)
- Rang 2: es gibt 2 unabhängige Casimir-Operatoren, z.B.

$$C_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8} \lambda_i^2 \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{1}{8}\sum_{ijk} d_{ijk}\lambda_i\lambda_j\lambda_k$$

- λ_3 und λ_8 sind diagonal, es gibt 2 additive Quantenzahlen, die Eigenwerte von

$$I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 \quad \text{(Isospin bei Flavour} - \text{SU(3))}$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \quad \text{(Hyperladung bei Flavour} - \text{SU(3))}$$

Vertauschungsregeln, Gruppen-Algebra:

$[\lambda_i, \lambda_j]$ ist spurlos, anti-hermitesch $([\lambda_i, \lambda_j]^\dagger = -[\lambda_i, \lambda_j])$, deshalb ist $i[\lambda_i, \lambda_j]$ eine hermitesche, spurlose Matrix, d.h. es lässt sich Linearkombination der Mit reellen Koeffizienten darstellen:

$$[F_i, F_j] = i\, f_{ijk} F_k \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots 8 \qquad \text{mit } F_i = \frac{\lambda_i}{2}$$

Die f_{ijk} sind die Strukturkonstanten der SU(3). Sie sind total antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes. Sie sind unabhängig von der betrachteten Darstellung.

Antivertauschungsregeln:

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij} + 2 d_{ijk} \lambda_k$$

$\{\lambda_i, \lambda_j\}$ ist hermitesch, aber für i=j nicht spurlos. Die d_{ijk} sind total symmetrisch unter Vertauschung der Indizes, die Werte hängen von der betrachteten Darstellung ab!

Non-zero elements of f_{ijk} and d_{ijk}

(from Gell-Mann, CTSL-20, 1961 and The Eightfoldway, Benjamin).

ijk	f_{ijk}	ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}
123	1	118	$1/\sqrt{3}$	366	$-1/2$
147	1/2	146	1/2	377	$-1/2$
156	$-1/2$	157	1/2	448	$-1/2\sqrt{3}$
246	1/2	228	$1/\sqrt{3}$	558	$-1/2\sqrt{3}$
257	1/2	247	$-1/2$	668	$-1/2\sqrt{3}$
345	1/2	256	1/2	778	$-1/2\sqrt{3}$
367	$-1/2$	338	$1/\sqrt{3}$	888	$-1/\sqrt{3}$
458	$\sqrt{3}/2$	344	1/2		
678	$\sqrt{3}/2$	355	1/2		

Kovariante und kontravariante Darstellung:

Wenn ψ_α die (kovariante) Basis einer Darstellung ist, dann ist die kontravariante Basis ψ^α diejenige, für die

$$\psi^\alpha \psi_\alpha = \text{invariant (Skalarprodukt)}$$

Für unitäre Transformationen gilt:
$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi$$
$$\psi^* \rightarrow \psi'^* = \psi^* U^\dagger = \psi^* U^{-1}$$
$$\Rightarrow \psi'^* \psi' = \psi^* U^{-1} U \psi = \psi^* \psi$$
$$\Rightarrow \psi^\alpha = \psi_\alpha^*$$

Für die SU(2):
$$(\psi_\alpha) \rightarrow (\psi'_\alpha) = (1 + i\vec{\omega}\vec{\sigma})(\psi_\alpha)$$
$$(\psi^\alpha) \rightarrow (\psi'^\alpha) = (1 - i\vec{\omega}\vec{\sigma})(\psi^\alpha)$$

Bilde eine zu ψ^α äquivalente Darstellung φ^α durch eine Transformation der Gruppenelemente: AUA^{-1} mit $A = i\sigma_2$

$$(i\sigma_2)(1 - i\vec{\omega}\vec{\sigma}^*)(-i\sigma_2) = (1 - i\vec{\omega}\sigma_2\vec{\sigma}^*\sigma_2) = (1 + i\vec{\omega}\vec{\sigma})$$

⇨ ψ_α und ψ^α sind äquivalent: $[2] = [\bar{2}]$

Identifiziere $C\psi := \psi^*$ mit der Ladungskonjugation, z.B.

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} I_3 = +\frac{1}{2} \\ I_3 = -\frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \psi^* = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \begin{matrix} I_3 = -\frac{1}{2} \\ I_3 = +\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Man sieht, dass ψ und ψ^* den gleichen "Inhalt" haben

Für die SU(3):

Kovariante und kontravariante Darstellung sind nicht äquivalent:

$$[3] = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \begin{matrix} S = 0 \\ S = 0 \\ S = 1 \end{matrix} \qquad [\bar{3}] = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \begin{matrix} S = 0 \\ S = 0 \\ S = -1 \end{matrix}$$

Man kann keine Matrix A finden, so dass $-\lambda_i^* = A\lambda_i A^{-1}$ ist.

⇨ Es gibt zwei nicht-äquivalente fundamentale Darstellungen von SU(3)!

Irreduzible Darstellungen von SU(3):

In SU(2) war $2 \otimes \bar{2} = 2 \otimes 2 = 1 + 3$

Was ist $3 \otimes \bar{3}$?

$\psi_\alpha \psi^\beta = M_\alpha^\beta$ (9 Elemente)

nur das Skalarprodukt $\psi_\alpha \psi^\alpha = M_\alpha^\alpha = \mathrm{Tr}(M)$ kann als Singlett abgespalten werden, der Rest ist ein irreduzibler Tensor:

$\psi_\alpha \psi^\alpha = M_\alpha^\alpha$ Skalar, Darstellung [1]

$M'^\beta_\alpha = M_\alpha^\beta - \frac{1}{3}\delta_{ab}\mathrm{Tr}M$ Oktett, Darstellung [8]

Es ist also $3 \otimes \bar{3} = 1 + 8$

Anders für $3 \otimes 3 = \bar{3} + 6$ bzw. $\bar{3} \otimes \bar{3} = 3 + \bar{6}$

Klassifikation der irreduziblen Darstellungen:

Im Prinzip könnte man die Eigenwerte der beiden Casimir-Operatoren verwenden um alle Multipletts eindeutig zu charakterisieren. Alternativ benutzt man D(p,q) wobei p (q) die minimale Anzahl Tripletts (Antitripletts) ist, die man benötigt um diese Darstellung aufzubauen.

Irreduzible Darstellungen von SU(3)

3	D(1,0)
$\bar{3}$	D(0,1)
6	D(2,0)
$\bar{6}$	D(0,2)
8	D(1,1)
10	D(3,0)
$\overline{10}$	D(0,3)
15	D(2,1)
$\overline{15}$	D(1,2)
27	D(2,2)

Einige Zerlegungen:

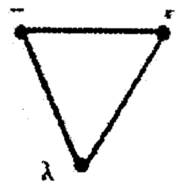
$3 \otimes \bar{3}$	$= 1 + 8$
$3 \otimes 3$	$= \bar{3} + 6$
$3 \otimes 6$	$= 8 + 10$
$\bar{3} \otimes 6$	$= 3 + 15$
$3 \otimes 3 \otimes 3$	$= 1 + 8 + 8' + 10$
$3 \otimes 8$	$3 = \cancel{4} + \bar{6} + 15$
$8 \otimes 8$	$= 1 + 8 + 8' + 10 + \overline{10} + 27$

Darstellungs-Diagramme

Die irreduziblen Darstellungen lassen sich durch (etwas mühsame) Tensoralgebra finden. Die Zerlegungen direkter Produkte von Darstellungen erhält man leicht graphisch:

1.) Fundamentale Darstellung in der I3-Y-Ebene:

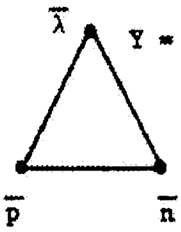
So representation 3 is described by :



$I = \frac{1}{2}$ $Y = +\frac{1}{3}$

$I = 0$ $Y = -\frac{2}{3}$

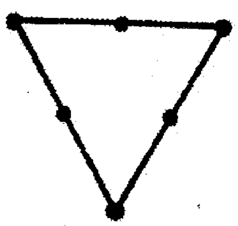
and representation $\bar{3}$ by :



$Y = +\frac{2}{3}$

$Y = -\frac{1}{3}$

2. Zusammensetzung von 3 ⊗ 3 durch "Vektoraddition" des Tripletts und Antitripletts in allenmöglichen Kombinationen:

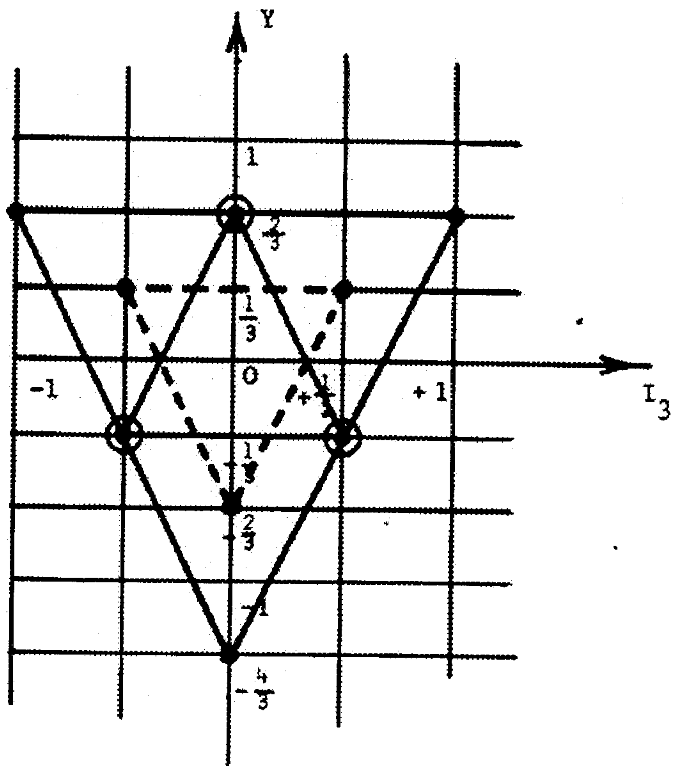


$Y = \frac{2}{3}$, $I = 1$

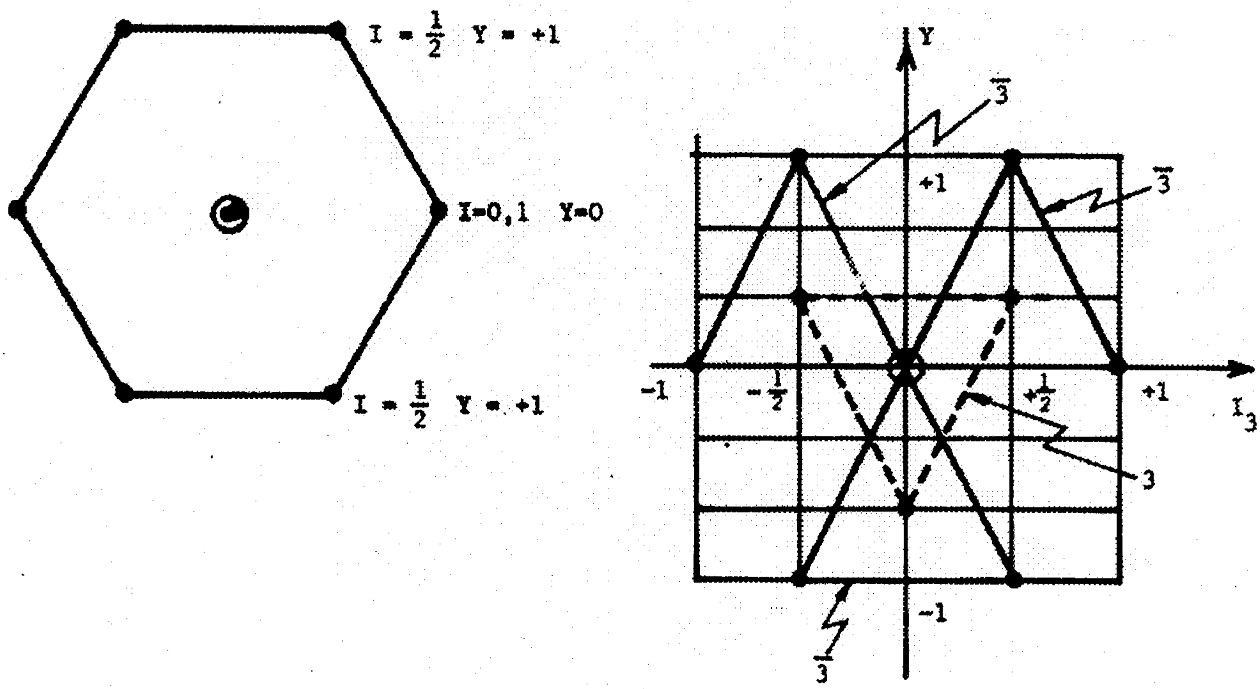
$Y = \frac{1}{3}$, $I = \frac{1}{2}$

$Y = -\frac{4}{3}$, $I = 0$

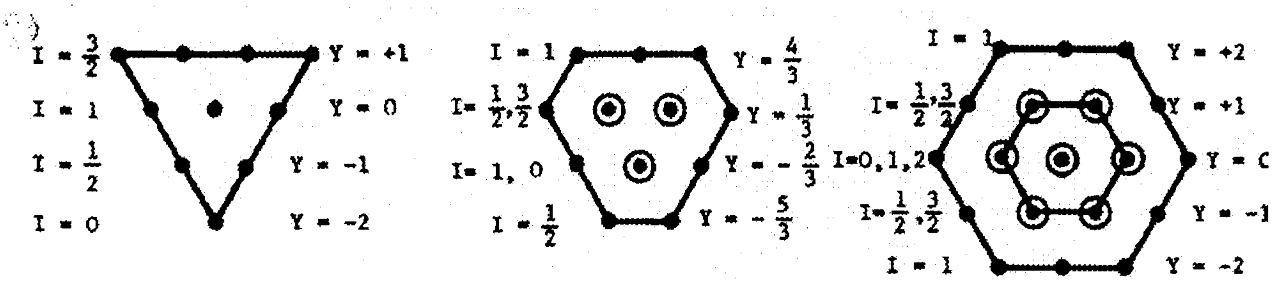
(and the opposite for $\bar{6}$)



3. Zusammensetzung von $3 \otimes \bar{3}$ durch "Vektoraddition" des Tripletts und Antitripletts in allenmöglichen Kombinationen:



4. Alle höheren Multipletts erhält man auf ide gleiche Weise, z.B.



10 15 27

6. SU(5)-GUT

SU(5): Kandidat für Eichgruppe einer großen Vereinheitlichung von elektroschwacher und straker WW.

SU(5) hat 25-1=24 Generatoren ⇨ 24 Eichbosonen

12 (8 Gluonen, 3 W/Z-Bosonen, Photon) kennen wir schon

Zusätzlich würde es noch 6 geladene, farbige Bosonen und ihre Antiteilchen geben.

Konsequenz: Protonzerfal $p = duu \rightarrow Xu \rightarrow \bar{u}e^{+}u \rightarrow \pi^{0}e^{+}$

Lepton+Baryonzahl-Verltzung, X muss sehr schwer sein.

Darstellungen von SU(5):

$[5], [\bar{5}]$ fundamentale Darstellung

$[5] \otimes [\bar{5}] = [1] + [24]$

$[5] \otimes [5] = [10] + [15]$

$[\bar{5}] \otimes [10] = [5] + [45]$

$[10] \otimes [10] = [5] + [45] + [50]$

SM-Fermionen einer Familie passen in eine $[\bar{5}]$ und eine $[10]$:

$(\nu_e, e^-, \bar{d}_g, \bar{d}_b, \bar{d}_r)_L$

$(e^+, \bar{u}_g, \bar{u}_b, \bar{u}_r, u_g, u_b, u_r, d_g, d_b, d_r)_L$