6.1. Einführung

- Aus klassischer Energie-Impuls-Beziehung

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + V = E$$

wird mit Hilfe des Korrespondenzprinzips

$$\vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \quad , \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

die nicht-relativistische Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

(für freie Teilchen: $V = 0$)

- Aus relativistischer Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

wird analog:

$$\boxed{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2\Psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Psi}$$ Klein-Gordon-Gleichung

oder kompakt $(\Box^2 - m^2)\Psi = 0$

$\Box^2 = \partial_\mu\partial^\mu$

$\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$

kovariant!

Lösung der Klein-Gordon-Gleichung:

Ansatz: ebene Welle: $\Psi(\vec{x},t) \sim e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$

überprüfen: $\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -iE\Psi$, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -E^2\Psi$

$\vec{\nabla}\Psi = i\vec{p}\Psi$, $\vec{\nabla}^2\Psi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\Psi) = -\vec{p}^2\Psi$

einsetzen $\Rightarrow$ $E^2\Psi - \vec{p}^2\Psi = m^2\Psi$

ist Lösung wenn $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$

also $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$\Rightarrow$ Es gibt Lösungen mit $E < 0$

$\Rightarrow$ Das führt zu negativen Wahrscheinlichkeitsdichten $\lightning$

... und zu Übergängen mit immer niedriger Energie $\lightning$

[NB: die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ ergibt sich als $\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) = \rho$ $\propto 2E$ für ebene Welle

nachprüfen: KG-Gleichung mit $-i\Psi^*$ und die komplex konjugierte KG-Gleichung mit $i\Psi$ multiplizieren, voneinander abziehen

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$]

- später stellte sich heraus, daß man die Wahrscheinlichkeitsdichte als <u>Ladungsdichte</u> $\varrho \cdot q$ uminterpretieren kann

$\Rightarrow$ beschreibt Teilchen und Antiteilchen

für <u>Spin-0-Teilchen</u>

(wurde aber zunächst verworfen ...)

Dirac's Strategie:

Finde Gleichung die <u>linear</u> in $\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{\nabla}$ ist,

und trotzdem $E^2 = p^2 + m^2$ erfüllt.

(das Problem mit $E < 0$ kam ja von $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$!)

[NB: kovariante Gleichung erfordert, daß wenn linear in $\frac{\partial}{\partial t}$ auch linear in $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \vec{\nabla}$.]

6.2. Dirac-Gleichung für freie Teilchen

allgemeinster linearer Ansatz:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \Psi$$

was sind $\vec{\alpha}, \beta$?

- um $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ zu erfüllen, muß Ψ auch die Klein-Gordon-Gleichung lösen:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = (\vec{p}^2 + m^2) \Psi$$

Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 \overset{!}{=} \vec{p}^2 + m^2$$

oder in Komponenten

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \beta m\right)\left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j p_j + \beta m\right) = \sum_k p_k^2 + m^2$$

ausmultiplizieren: $\Rightarrow$

$$\sum_{i \neq j} \alpha_i^2 p_i^2 + \frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2$$

$$= \sum p_k^2 + m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 &= 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 0 \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \end{aligned}} \quad \text{für alle } i \neq j$$

$\Rightarrow$ nicht kommutativ! $\Rightarrow$ α_i, β können keine Skalare sein.

- einfachste Darstellung der Operatoren α_i, β durch 4×4 Matrizen:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

σ_i : Pauli'sche Spinmatrizen

$\mathbb{1}$: 2×2 Einheitsmatrix

ausgeschrieben:

$$\alpha_1 = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \alpha_2 = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ \hdashline 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\alpha_3 = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \beta = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Die Wellenfunktion ψ wird damit ein 4-komponentiger Spaltenvektor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad \text{"Dirac-\underline{Spinor}"}$$

$\psi^+ := (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ ist der <u>hermitesch konjugierte</u> Spinor

Die Dirac-Gleichung

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\,\Psi \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

ist ein System aus 4 gekoppelten Gleichungen für die 4 Wellenfunktionen $\Psi_1, \dots, \Psi_4$.

<u>Schreibweise mit γ-Matrizen:</u>

(manifest kovariante Schreibweise)

definiere:

$$\boxed{\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix} \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha_i = \begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix}}$$

damit wird aus der Dirac-Gleichung (mult. von links mit γ^0):

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\sum_{i=1}^{3}\gamma^i \frac{\partial}{\partial x_i} - m\right)\Psi = 0 \qquad \left(p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\Psi = 0}$$

- merken!
- zeigt direkt die Kovarianz der Dirac-Gleichung

<u>Die Dirac-Gleichung</u> (Rekapitulation)

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\Psi = 0}$$ für freie Teilchen (kein äußeres Feld)

- linear in ∂_μ (vgl. Klein-Gordon-Gleichung: $(\partial^\mu \underline{\partial_\mu} \Psi + m^2)\Psi = 0$

- System gekoppelter Gleichungen:

γ^μ: 4×4 Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix} \quad i = 1,2,3$$

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}$$ Dirac-Spinor (<u>kein</u> Vierervektor!)

Lösung der Dirac-Gleichung

zunächst für $\vec{p} = 0$ (ruhendes Teilchen)

$\vec{p} = 0 \rightarrow i\partial_\mu = 0$ für $\mu = 1,2,3$ d.h. $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow$ Dirac-Gleichung vereinfacht sich zu:

$$i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t}\psi = m\psi \qquad \psi = \begin{pmatrix}\psi_A \\ \psi_B\end{pmatrix} \qquad \psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} \quad \psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\psi}_A \\ \dot{\psi}_B\end{pmatrix} = -im\begin{pmatrix}\psi_A \\ \psi_B\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\psi_A(t) = \psi_A(0)\, e^{-imt}} \qquad \underline{\psi_B(t) = \psi_B(0)\, e^{+imt}}$$

vgl. ebene Welle: $N e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$; $\vec{p} = 0 \quad m = E$

d.h. $\psi_A : \; E > 0$

$\psi_B : \; E < 0$

Physikalische Interpretation

$\rightarrow$ interpretiere die Lösungen mit negativer Energie als Lösungen für Antiteilchen mit positiver Energie.

$\rightarrow \psi_A, \psi_B$ sind jeweils zweikomponentige Spinoren, d.h. sie beschreiben Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen.

Explizit:

$$\psi^{(1)} = N e^{-imt}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \psi^{(3)} = N e^{+imt}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi^{(2)} = N e^{-imt}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \psi^{(4)} = N e^{+imt}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Teilchen mit Spin up/down — Antiteilchen mit Spin up/down

Normierung N : später!

jetzt für Teilchen mit Impuls $\vec{p}$: ebene Wellen:

Ansatz: $\Psi(\vec{x},t) = a\, e^{-i(Et-\vec{p}\vec{x})}\, u(E,\vec{p}) \quad \left(u = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ u^{(4)} \end{pmatrix} \right)$

oder kürzer $\Psi(x) = a\, e^{-ipx}\, u(p)$

$$\partial_\mu \Psi = \partial_\mu [a e^{-ipx} \cdot u(p)] = a(-ip_\mu) e^{-ix^\mu p_\mu} u(p)$$

Einsetzen in Dirac-Gleichung: $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$

$$\Rightarrow a\gamma^\mu p_\mu e^{-ix^\mu p_\mu} u - am\, e^{-ix^\mu p_\mu} u = 0$$

erfüllt wenn $\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(p) = 0}$

"Dirac-Gleichung im Impulsraum"

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}$$

$$= E\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} - \vec{p}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

(Achtung, Skalarprodukt i.d. Raumzeit, bleibt aber 4x4-Matrix im Spinorraum)

13

$$0 = (\gamma^\mu p_\mu - m)u = \begin{pmatrix} E-m & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & -E-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (E-m)u_A - \vec{p}\vec{\sigma}u_B \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma}u_A - (E+m)u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_A = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E-m} u_B \quad , \quad u_B = \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} u_A$$

$$\Rightarrow u_A = \frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2}{E^2-m^2} u_A \quad \text{und} \quad u_B = \frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2}{E^2-m^2} u_B$$

$$\vec{p}\vec{\sigma} = p_x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

$$(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & p_z \end{pmatrix} = \vec{p}^2 \cdot \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$

14

Die Lösungen verlangen $\frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2}{E^2-m^2} = 1$, $(\vec{p}\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2$, d.h.

$$\vec{p}^2 = E^2 - m^2 \quad \text{(Energie-Impuls-Beziehung)}$$

(erlaubt aber $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$)

<u>Konstruktion von vier unabhängigen Lösungen:</u>

mit $u_A = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E-m} u_B$ und $u_B = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m} u_A$

und $\vec{p}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x+ip_y & -p_z \end{pmatrix}$

Wähle:

(1) $u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x+ip_y \end{pmatrix}$

(2) $u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix} p_x-ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}$

(3) $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E-m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x+ip_y \end{pmatrix}$

(4) $u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E-m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix} p_x-ip_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Für (1) und (2) muß $E = +\sqrt{\vec{p}^2+m}$ sein
$\Rightarrow$ Teilchen

" (3) und (4) muß $E = -\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ sein
$\Rightarrow$ Antiteilchen

(damit Lsg. endlich für $\vec{p}\to 0$)

<u>ausgeschrieben:</u>

$$u^{(1)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u^{(2)} = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$E = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$$

$$u^{(3)} = N\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u^{(4)} = N\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E = -\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$$

Normierung: $\psi^\dagger\psi$ entspricht einer Ladungsdichte, d.h. der 0-ten Komponente eines Vierervektors $\Rightarrow \psi^\dagger\psi \sim E$ wg. Lorentzinvarianz

verschiedene Konventionen:

$$u^\dagger u = 2|E| \quad \text{(Halzen+Martin)} \quad *$$

$$u^\dagger u = \frac{E}{m} \quad \text{(Bjorken+Drell)}$$

Bilde (z.B.)

$$u^{(1)\dagger} u^{(1)} = \left(1 \quad 0 \quad \frac{p_z}{E+m} \quad \frac{p_x - ip_y}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \cdot N^2$$

$$= N^2\left(1 + \frac{p_z^2}{(E+m)^2} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{(E+m)^2}\right) = N^2\left(\frac{E^2 + 2Em + m^2 + p^2}{(E+m)^2}\right)$$

$$= \frac{2E^2 + 2Em}{(E+m)^2} N^2 = \frac{2E(E+m)}{(E+m)^2} N^2 = \frac{2EN^2}{E+m} \overset{!}{=} 2|E|$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \sqrt{|E| + m}}$$

- Bis jetzt: $E, \vec{p}$ = math. Parameter, die für $u^{(1)}, u^{(2)}$ identisch mit phys. Parameter $\bar{E}, \vec{p}$ sind.

- Für $u^{(3)}, u^{(4)}$: ersetze $E, \vec{p}$ durch $-\bar{E}, -\vec{p}$:

$$v^{(1)}(\bar{E}, \vec{p}) = u^{(4)}(-\bar{E}, -\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{\bar{E}+m} \\ \frac{-p_z}{\bar{E}+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)}(\bar{E}, \vec{p}) = -u^{(3)}(-\bar{E}, -\vec{p}) = -N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{\bar{E}+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{\bar{E}+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier bedeuten $\bar{E}, \vec{p}$ die physikalischen Parameter (Energie und Impuls) der Antiteilchen

Interpretation der Lösungen:

$u^{(1)}, u^{(2)}$: Teilchen mit Spin "up", "down" ?

$v^{(1)}, v^{(2)}$: Antiteilchen mit Spin "up", "down" ?

im allg. $u^{(i)}, v^{(i)}$ keine Eigenzustände zum

Spinoperator $\hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$

=> wähle z-Achse entlang der Bewegungsrichtung

=> $p_x, p_y = 0$

$$\Rightarrow \text{z.B.} \quad \hat{S}_z u^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix} \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z/E+m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= +\frac{1}{2}\sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z/E+m \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}u^{(1)} \quad \checkmark$$

entspr. $\hat{S}_z u^{(2)} = -\frac{1}{2}u^{(2)}$

<u>Vorsicht:</u> $\hat{S}_z v^{(1)} = -\frac{1}{2}v^{(1)}$

$\hat{S}_z v^{(2)} = +\frac{1}{2}v^{(2)}$

<u>aber:</u>

$v^{(i)}(p, E)$ sind (nach wie vor) Wellenfunktion

für (rückwärts i.d. Zeit) laufende Elektronen (Teilchen)

≠ Wellenfunktion d. Antiteilchen

(NB: diese ergibt sich erst nach Anwendung des Operators für die Ladungskonjugation: $i\gamma^2$)

=> $v^{(1)}$ repräsentiert (wie $u^{(1)}$) "spin-up" $\Uparrow$

$v^{(2)}$ " (wie $u^{(2)}$) "spin-down" $\Downarrow$

$$\boxed{\begin{matrix} u^{(1)} & \Uparrow & \quad & u^{(2)} & \Downarrow \\ v^{(1)} & \Uparrow & \quad & v^{(2)} & \Downarrow \end{matrix}}$$