Übungen zur Vorlesung Elementarteilchenphysik II **WS 03/04**
Klaus Desch, Philip Bechtle
7. Übungsblatt 14.01.2004

Aufgabe 14

Innerhalb einer Gruppe gibt es eine bestimmte Zahl von Operatoren C, die mit allen Generatoren λ dieser Gruppe vertauschen. Diese nennt man Casimir-Operatoren. Das praktische daran ist, daß deshalb die Eigenwerte der Casimir-Operatoren nicht geändert werden, wenn innerhalb eines Multipletts eine Gruppenoperation durchgeführt wird. D.h., die Eigenwerte der Casimir-Operatoren charakterisieren, welches Multiplett vorliegt. Die Zahl der Casimir-Operatoren einer Gruppe nennt man *Rang* der Gruppe. Diese Zahl ist gleich der Zahl der gleichzeitig diagonalisierbaren Generatoren, für die SU(3) ist sie also 2.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Vertauschungsrelation

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i\, f_{ijk}\, \lambda_k$$

und der Antivertauschungsrelation

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij}\, 1 + 2\, d_{ijk}\, \lambda_k,$$

daß

$$C_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8} \lambda_i^2 = \frac{i}{4\sqrt{3}} \sum_{ijk} f_{ijk}\, \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

und

$$C_2 = \frac{1}{8}\sum_{ijk} d_{ijk}\, \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

zwei unabhängige Casimiroperatoren der SU(3) sind. Die f_{ijk} sind die total antisymmetrischen Strukturkonstanten der SU(3), die d_{ijk} die symmetrischen Koeffizienten unter $i \leftrightarrow j$. Versuchen Sie, ohne die explizite Gestalt der λ_i, f_{ijk} und d_{ijk} auszukommen.

(b) Zeigen Sie anhand jeweils zweier ausgewählter Zustände des Quark-Tripletts und des Meson-Oktetts, daß die Eigenwerte der Casimir-Operatoren innerhalb eines Multipletts konstant sind.

Aufgabe 15

Herleitung der Pauli-Matrizen

Die Gruppe der speziellen unitären Transformationen im komplexen 2D-Raum hat 3

freie Parameter. Es liegt also nahe, sie als eine Repräsentation der Gruppe O(3), der Drehungen im reellen 3D-Raum, aufzufassen.
Zur Herleitung der expliziten Form der Generatoren der SU(2) betrachten wir eine allgemeine Darstellung aller möglichen 2×2 unitären Matrizen mit $|\det U|^2 = 1$:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, e^{i\beta} & -\sin\alpha\, e^{-i\gamma} \\ \sin\alpha\, e^{i\gamma} & \cos\alpha\, e^{-i\beta} \end{pmatrix}$$

Zur Beantwortung der Frage, welcher Satz von Matrizen alle möglichen Transformationen der SU(2) beschreibt, betrachten wir zunächst eine Rotation des Winkels $-\theta$ um die z-Achse in einem reellen 3D Raum:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

Nun wollen wir diese 3D-Rotation (Entspricht der Gruppe O(3)) in den komplexen Raum mit zwei Dimensionen übertragen. Eine beliebige spurlose hermitesche Matrix kann dort durch

$$M = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Wir verlangen jetzt, daß deren Parameter wie die Komponenten eines Vektors im reellen 3D-Raum transformieren. Wir betrachten eine Transformation dieser Matrix durch U:

$$M' = U\,M\,U^+,$$

wobei die Komponenten x, y und z wie in (1) transformieren sollen.

(a) Leiten Sie aus dieser Forderung die konkrete Gestalt einer 2×2 Matrix U_z ab, die M analog einer Drehung um den Winkel $-\theta$ um die z-Achse transformiert. Zeigen Sie dazu

$$x' + iy' = (x + iy)\, e^{-i\theta}$$

(b) Spalten Sie das erhaltene Ergebnis in die Komponenten proportional zu $\cos a\theta$ und $\sin a\theta$ auf. Welchen Wert hat a? Was bedeutet das anschaulich? Zeigen Sie, daß das der Transformation

$$U_z = e^{i\frac{\theta}{a}\sigma_3}$$

entspricht, wobei σ_3 die dritte Pauli-Matrix ist.

(c) Wiederholen Sie dies für eine Drehung um x und y.