Übungen zur Vorlesung Eichtheorien für Experimentalphysiker WS 03/04
Klaus Desch, Philip Bechtle
3. Übungsblatt 5.11.2003

Aufgabe 5

Gedankenexperiment: Stellen Sie sich vor, das Photon hätte eine Masse $m_\gamma \neq 0$.

(a) Welche Phänomene, in Abänderung der bekannten Erscheinungen des Standardmodells mit $m_\gamma = 0$, würden auftreten?

(b) Etwas spezifischer: betrachten Sie die Wellengleichung eines Bosonfeldes (der Einfachheit wegen gerne nur in einer Raumdimension) für masselose und massive Bosonen. Was gilt in diesen Fällen jeweils für die Dispersionsrelation? Wie wäre dieser Unterschied meßbar?
Angenommen, wir könnten die Geschwindigkeit zweier Lichtsignale bei einer Energie der Photonen von $E_{\gamma 1} = 0.5$ eV bzw. $E_{\gamma 2} = 2$ eV mit einer relativen Präzision von 10^{-9} messen. Wie groß müßte die Photonmasse sein, um einen meßbar von $v_{\gamma 1} = v_{\gamma 2}$ abweichenden Effekt zu erzeugen? Welcher experimentelle Test auf Basis der Dispersionsrelation fällt Ihnen noch ein? Welche Größenordnung eines Massenlimits folgt daraus bei einer realistischen Abschätzung? (Keine Sorge, eine sehr grobe Einschätzung mit kühnen, aber motivierten Annahmen ist auch schon viel Wert!)

(c) Fallen Ihnen sonst noch mögliche Experimente zur Messung der Photonmasse ein?

A propos Photon. Mit welcher Begründung stellt man die kühne Behauptung auf, die Natur habe gefälligst eine Invarianz gegenüber *lokalen* Eichtransformationen zu zeigen?

Aufgabe 6

Herleitung der QED aus dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz

(a) Zeigen Sie, daß für die Lagrangedichte $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ aus der Euler-Lagrange-Gleichung
$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0$$
die Dirac-Gleichung folgt.
Wiederholen Sie dies für den Fall eines reellen skalaren Feldes ($\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2]$) und eines komplexen skalaren Feldes ($\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)^* - m^2\varphi\varphi^*$).

(b) Zeigen Sie, daß eine globale Phasentransformation $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ invariant läßt.

(c) Die Menge der Phasentransformationen $U(\alpha)$ bildet die Gruppe U(1). Zeigen Sie, daß die Gruppe abelsch ist.
b.w.!!

(d) Zeigen Sie, daß eine infinitesimale Phasentransformation gegeben ist durch $\psi \to (1 + i\alpha)\psi$.

(e) Betrachten Sie nun lokale Phasentransformationen $U(\alpha(x))$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}$ unter lokalen Phasentransformationen *nicht* invariant ist.

(f) Wie muß man $\mathcal{L}$, oder spezifischer den kinetischen Term in $\mathcal{L}$, modifizieren, und welches Transformationsverhalten muß man für den zusätzlichen Term annehmen, um eine unter lokalen Phasentransformationen invariante Lagrangedichte $\mathcal{L}'$ zu erhalten? Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}'$ unter lokalen Phasentransformationen invariant ist.

(g) A_μ bezeichnet man als Eichfeld. Wie läßt es sich interpretieren? Wie sieht die Dirac-Gleichung nach der Substitution aus? Die Energiedichte des Feldes ist gegeben durch $\mathcal{T} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}$ invariant unter lokalen Phasentransformationen ist.

(h) Die vollständige Lagrangedichte der QED ist also gegeben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Interpretieren Sie die auftretenden Terme.