# Kapitel 5

# Zahlenfolgen und unendliche Reihen

## 5.1 Folgen

Eine Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots = \{a_n\}$ ist definiert durch eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $n \in \mathbf{N}$ eine reelle Zahl $a_n$ zuordnet. Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$ heißt konvergent, wenn eine Zahl $a \in \mathbf{R}$ existiert mit der Eigenschaft: zu jeder reellen Zahl $\epsilon > 0$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbf{N}$, sodaß

$$|a_n - a| \leq \epsilon \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Man schreibt dafür

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und nennt $a$ den Grenzwert der Folge $\{a_n\}$. Die Zahl $n_0 = n_0(\epsilon)$ hängt von $\epsilon$ ab. Diese Definition des Grenzwertes bedeutet, daß in jeder noch so kleinen Umgebung von $a$ alle Glieder der Folge liegen bis auf endlich viele Anfangsglieder. Eine Zahlenfolge hat höchstens einen Grenzwert. Nichtkonvergente Folgen heißen divergent. Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt Nullfolge. Durch die Operationen $+ - \cdot /$ erhält man aus konvergenten Folgen wieder konvergente Folgen; aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$ folgt:

$$\begin{aligned} a_n \pm b_n &\to a \pm b \\ a_n \cdot b_n &\to a \cdot b \\ a_n / b_n &\to a/b \quad \text{falls } b_n \neq 0 \text{ und } b \neq 0 \end{aligned}$$

Die Folge $\{a_n\}$ heißt monoton wachsend (fallend), wenn aus $n < m$ stets $a_n \leq a_m$ ($a_n \geq a_m$ ) folgt; sie heißt beschränkt, wenn eine Zahl $M$ existiert mit $|a_n| \leq M$ für alle $n$. Jede konvergente Folge is beschränkt. Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent. Zwei Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ bestimmen eine Intervallschachtelung, wenn $\{a_n\}$ monoton wachsend, $\{b_n\}$ monoton fallend und die Differenzfolge $\{a_n - b_n\}$ eine Nullfolge ist.

**Konvergenzkriterium (Cauchy)** Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbf{N}$ gibt mit

$$|a_n - a_m| \leq \epsilon \quad \text{für alle} \quad n, m \geq n_0.$$

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ $(-\infty)$, wenn es zu jedem $K \in \mathbf{R}$ ein $n_0 \in \mathbf{N}$ gibt, sodaß

$$a_n > K \quad (a_n < K) \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (-\infty).$$

## 5.2 Unendliche Reihen

Die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen $s_n$ einer Folge $\{a_n\}$, definiert durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad n \in \mathbf{N},$$

heißt unendliche Reihe und wird bezeichnet mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

So wird auch der Grenzwert bezeichnet, wenn die Folge $\{s_n\}$ konvergiert.

**Konvergenzkriterium.** Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbf{N}$ existiert, sodaß

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq m \geq n_0.$$

Eine notwendige (nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

**Majorantenkriterium.** Sei$\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern und $\{a_n\}$ eine Folge mit $|a_n| < c_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

**Quotientenkriterium.** Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Wenn es eine Zahl $\vartheta$ mit $0 < \vartheta < 1$ gibt, sodaß

$$|\frac{a_n+1}{a_n}| \leq \vartheta \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0,$$

dann konvergiert die Reihe absolut.

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen sind, dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)$ konvergent. Für das Produkt von Reihen gilt: Bei der Multiplikation der absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ darf gliedweise ausmultipliziert werden (Cauchy-Produkt):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot b_{k-n}$$

Die entstehende Produktreihe ist wieder konvergent und hat den Grenzwert $a \cdot b$.

## 5.3 Formeln

**Endliche Reihen**

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Arithmetische Reihe ($a_{k+1} - a_k = d =$ konstant):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$$

Geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{für} \quad x \neq 1 \\ &= n+1 \qquad \text{für} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bernoullische Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für} \qquad x \geq -1$$

**Unendliche Reihen**

Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad -1 < x < +1$$

Harmonische Reihe:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\text{divergent, jedoch} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}= \text{ konvergent für } \quad \alpha>1$$

Alternierende harmonische Reihe:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln 2$$

Weitere Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e=2.718\,282\ldots$$