Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 4: Messfehler und Vektoren

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

03. November 2017

Inhalt

1 Wiederholung

2 Messfehler

3 Vektoren

Übersicht

1. Wiederholung
2. Messfehler
3. Vektoren

Wiederholung Logarithmen

Allgemein:

$$b^y = x \quad \rightarrow \log_b(x) = y$$

Spezielle Logarithmen:

$$10^y = x \quad \rightarrow \lg(x) = y \qquad \text{(Taschenrechner log)}$$

$$e^y = x \quad \rightarrow \ln(x) = y$$

Rechenregeln:

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

Basistranformation:

$$\log_b(x) = \log_g(x) \cdot \log_b(g)$$

$$\ln(x) = \lg(x) \cdot \ln(10)$$

Wiederholung Logarithmen

Allgemein:

$$b^y = x \qquad \Rightarrow \qquad \log_b(x) = y$$

Spezielle Logarithmen:

$$10^y = x \qquad \Rightarrow \qquad \lg(x) = y$$
$$e^y = x \qquad \Rightarrow \qquad \ln(x) = y$$

Rechenregeln:

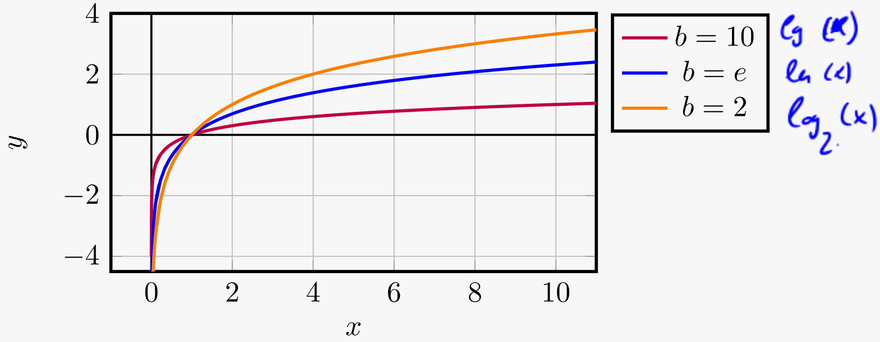
$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$
$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

Basistranformation:

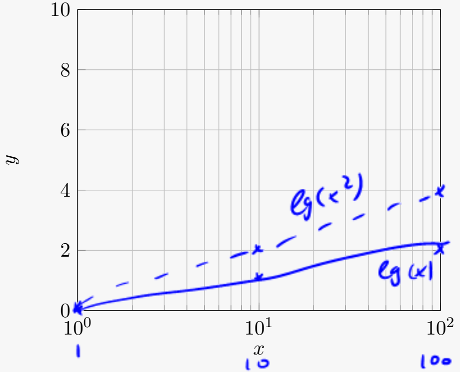
$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$
$$\ln(x) = \ln(10) \cdot \lg(x)$$

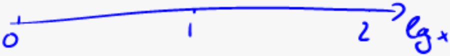
Logarithmus mit unterschiedlicher Basis

Logarithmus als Funktion: $f(x) = y = \log_b x$



- y-Achse ist Asymptote
- Schneidet x-Achse bei $x = 1$



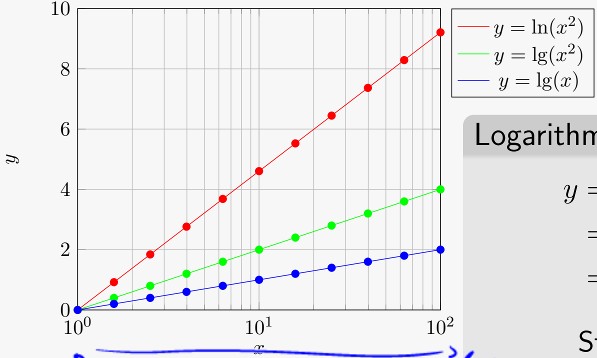


Logarithmische Zusammenhänge

$$y = \log_b(x^n)$$
$$= \log_b(10) \cdot \lg(x^n)$$
$$y = \underbrace{\log_b(10) \cdot n}_{\text{Zahl}} \cdot \underline{\lg(x)}$$

Steigung: $n \log_b(10)$

$$f(x) = y = \lg(x)$$
$$f(x) = y = \lg(x^2)$$
$$= 2 \cdot \lg(x)$$



0 1 2 $\rightarrow \lg(x)$

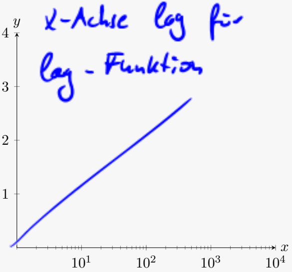
Logarithmische Zusammenhänge

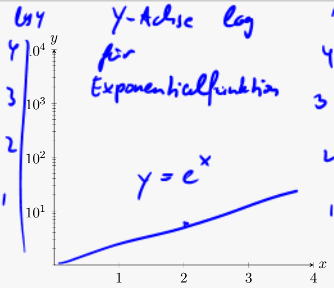
$$
\begin{aligned}
y &= \log_b(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

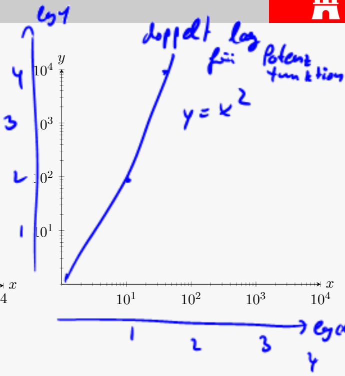
Steigung: $n \log_b(10)$

$$\ln(x^2) = 2\ln(x) = \underbrace{2 \cdot \ln(10)}_{\approx 4.6} \cdot \lg(x)$$

Logarithmische Zusammenhänge







Was benutze ich wann?

Potenzfunktion $y = x^2$ $\rightarrow$ $\lg(y) = \lg(x^2) = 2 \cdot \lg(x)$

Exponentialfunktion $y = e^x$ $\rightarrow$ $\lg(y) = \lg(e^x) = x \cdot \lg(e) \approx 0.43\,x$

Logarithmische Funktion $y = \ln(x)$ $\rightarrow$ $\lg(x) \cdot \ln(10)$

Übersicht

1 Wiederholung

2 Messfehler

3 Vektoren

Ursachen für Messunsicherheiten/Fehler

Systematische Fehler

- Falsche Eichung
- Fehlerhaftes Messgerät
- Nährungen
- Längenänderung durch Temperatur
- ...

Zufällige Fehler

- Ablesefehler
- statistische Schwankungen
- Spiel bei Mikrometerschraube
- ...

Zufällige Fehler lassen sich durch Wiederholung der Messung verringern!

Messergebnisse

$$\text{Messergebnis} = \text{Messwert} \pm \text{Fehler}$$

Absoluter Fehler

$$L = (5{,}63 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m}$$

Relativer Fehler

$$L = 5{,}63\,\mathrm{m} \pm 0{,}9\%$$

Fehler = Zufallsfehler + systematischer Fehler

$$L = (5{,}63 \pm 0{,}03\,(\text{stat.}) \pm 0{,}04\,(\text{sys.}))\,\mathrm{m}$$

Der **wahre Wert** ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Fehlerintervall enthalten.

Mittelwert

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Mittelwert

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

$$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

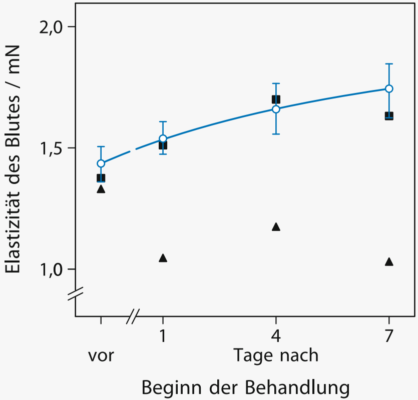
$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Je häufiger ich messe, desto kleiner wird der Fehler des Mittelwerts! Um ihn zu halbieren brauche ich 4 mal so viele Messwerte!

Beispiel

Trombelastogramm während einer Behandlung mit Heparin

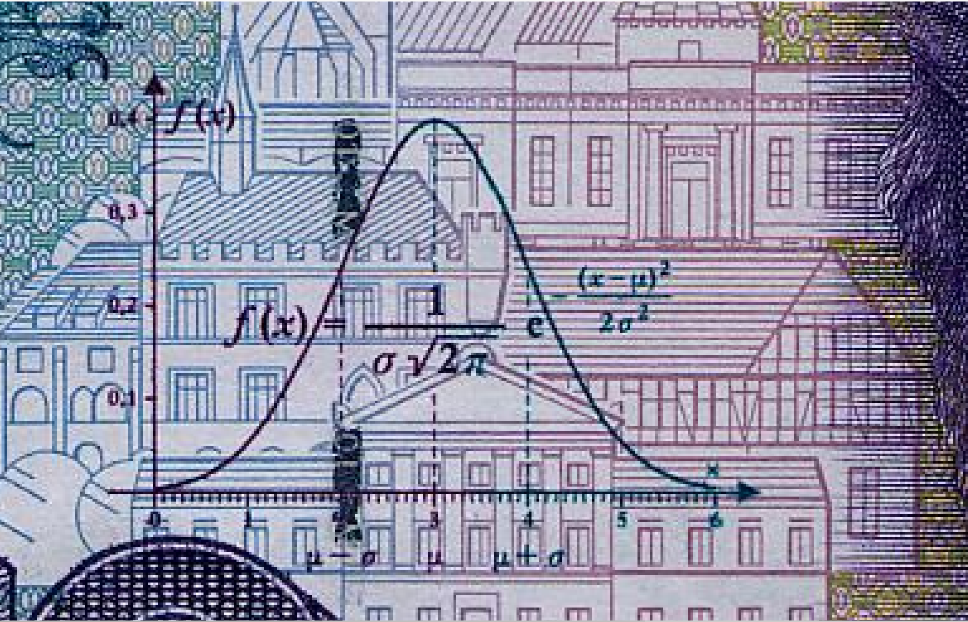


Aus: Harten *Physik für Mediziner*

- Beobachtungsgruppe von 28 Patienten
- ■ und ▲: zwei Mitglieder der Beobachtungsgruppe
- Blaue Kreise: Mittelwert der Werte aller Patienten
- Die blauen Fehlerbalken geben die Standardabweichung an


GN4480100S8
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
f(x)
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
10
ZEHN DEUTSCHE MARK
Deutsche Bundesbank
Frankfurt am Main
1. September 1999
GN4480100S8

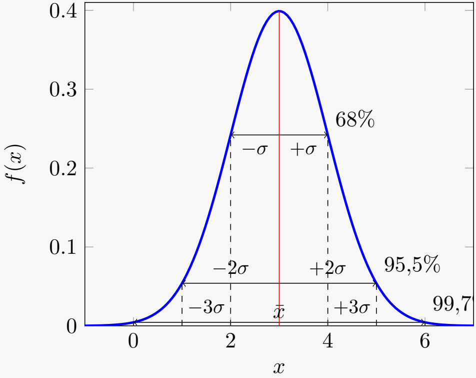
Normalverteilung



Normalverteilung

Gaußsche Glockenkurve

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

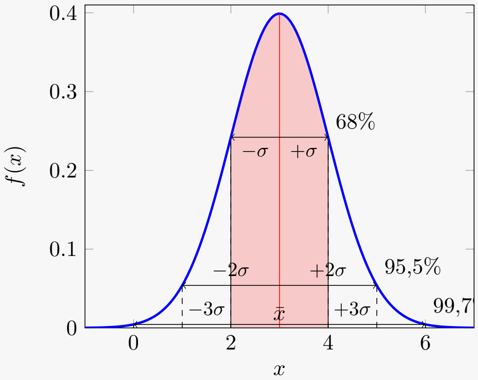


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Gaußsche Glockenkurve

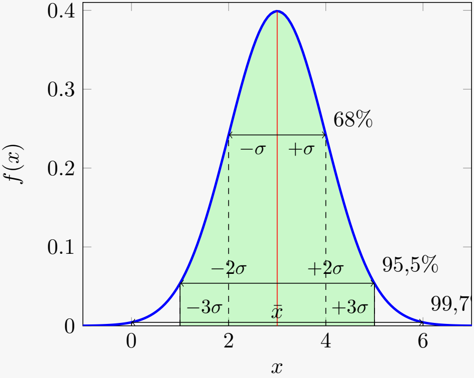
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

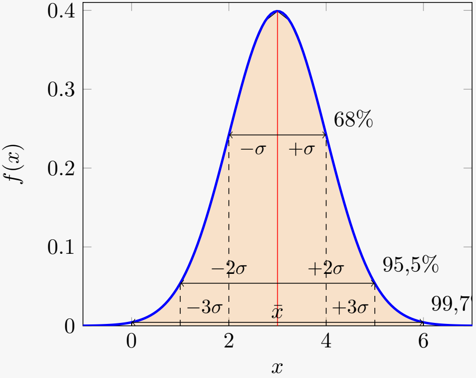


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Gaußsche Glockenkurve

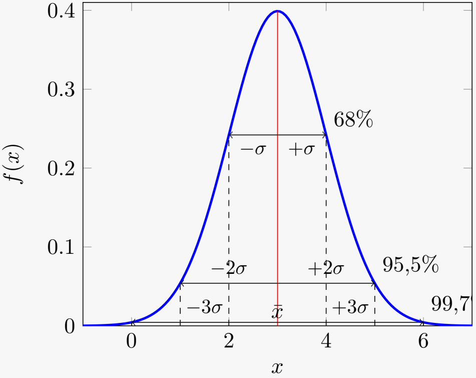
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

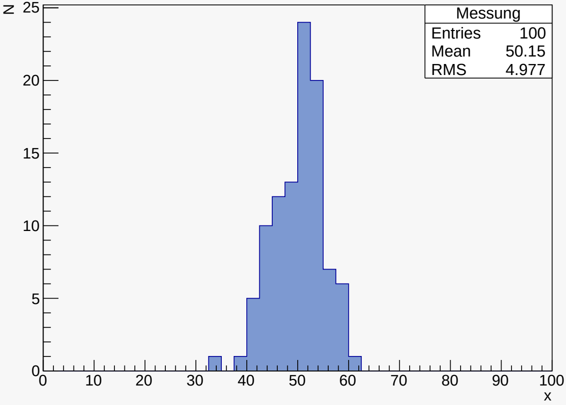
- Messwert im Intervall

Vorhersage

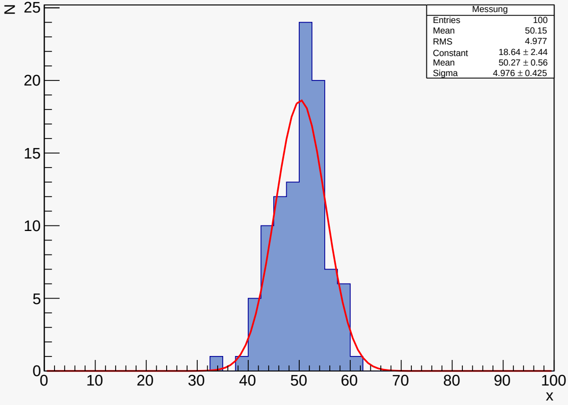
für wahren Wert

- Analog: 68% in $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$
- 95,5% in $[\bar{x} - 2\Delta\bar{x}, \bar{x} + 2\Delta\bar{x}]$
- 99,7% in $[\bar{x} - 3\Delta\bar{x}, \bar{x} + 3\Delta\bar{x}]$

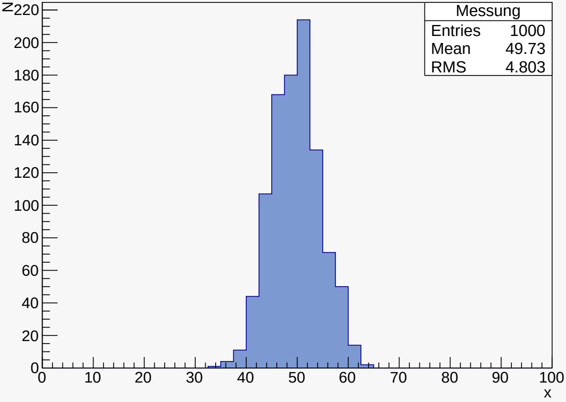
Gaußverteilung realistischer Messungen



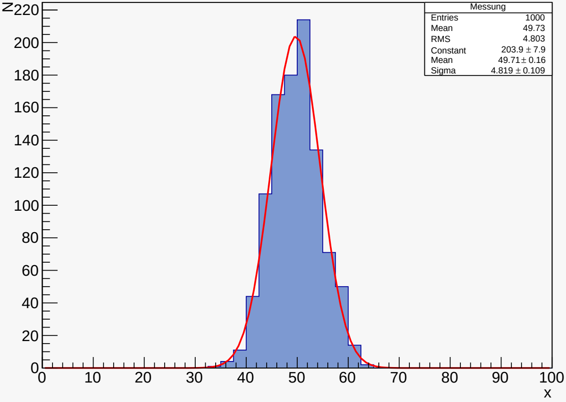
Gaußverteilung realistischer Messungen



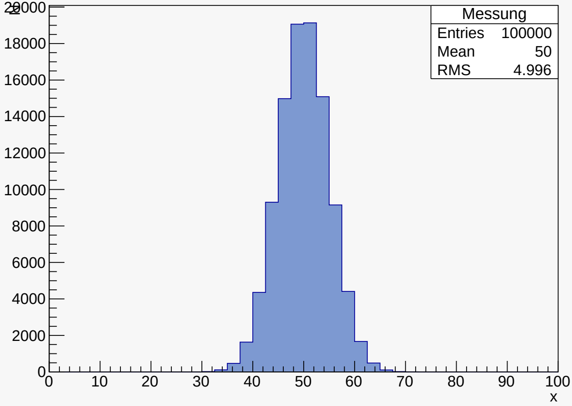
Gaußverteilung realistischer Messungen



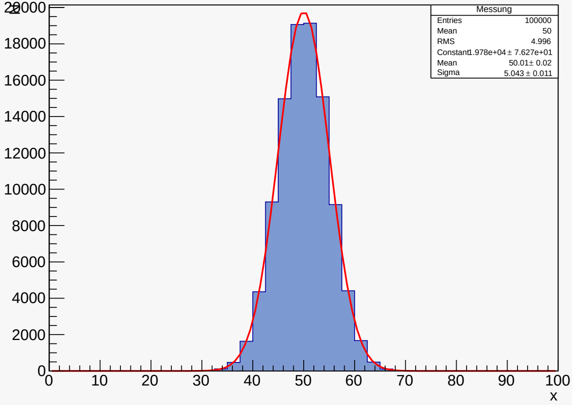
Gaußverteilung realistischer Messungen



Gaußverteilung realistischer Messungen



Gaußverteilung realistischer Messungen



Protokollführung und Auswertung

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	$x_i/[x]$	$(x_i - \bar{x})/[x]$	$(x_i - \bar{x})^2/[x]^2$
1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			
	$\sum_i x_i = \ldots$		$\sum_i (x - \bar{x})^2 = \ldots$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe			

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0.2	0.04
2	35,5	-1.6	2.56
3	36,8	-0.3	0.09
4	38,1	1.0	1.00
5	37,8	0.7	0.49
6	37,2	0.1	0.01
Summe	222,7		4.19

$$\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{1}{6}\, 222.7\,\text{cm} = 37.1167\,\text{cm} \approx 37.1\,\text{cm}$$

$$l = (37.1 \pm 0.4)\,\text{cm}$$

$$\Delta\bar{l} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{30} \cdot 4.19\,\text{cm}^2} = 0.37337\,\text{cm}$$

Beispiel Protokollführung

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe	222,7		

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3	0,2	
2	35,5	-1,6	
3	36,8	-0,3	
4	38,1	1,0	
5	37,8	0,7	
6	37,2	0,1	
Summe	222,7		

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Beispiel Protokollführung

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Fehler: $\Delta\bar{l} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\cdot 4{,}19\,\text{cm}^2} = 0{,}3737\,\text{cm}$

Ergebnis

Absoluter Fehler

$$l = (37{,}1 \pm 0{,}4)\,\text{cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$l = 37.1\,\text{cm} \pm \frac{0.4\,\text{cm}}{37.1\,\text{cm}} \cdot 100\% =$$

$$= 37.1\,\text{cm} \pm 1.1\,\%$$

Ergebnis

$$l = (37{,}1 \pm 0{,}4)\,\mathsf{cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$\begin{aligned} l &= 37{,}1\,\mathsf{cm} \pm \frac{0{,}4}{37{,}1} \cdot 100\% \\ &= 37{,}1\,\mathsf{cm} \pm 1{,}1\% \end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung

- Messgröße setzt sich aus mehreren fehlerbehafteten Größen zusammen
- Nur die Fehler der einzelnen Größen sind bekannt

Wie groß ist der Gesamtfehler?

Zwei Fälle

- Addition der Größen
- Multiplikation der Größen

Fehlerfortpflanzung – Addition

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

Fehlerfortpflanzung – Addition

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$s = \bar{s} \pm \Delta \bar{s}$
$t = \bar{t} \pm \Delta t$

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{min} = \frac{\bar{s} - \Delta \bar{s}}{\bar{t} + \Delta t}$$

Größter Wert von v:

$$v_{max} = \frac{\bar{s} + \Delta \bar{s}}{\bar{t} - \Delta t}$$

$\bar{v}$ im Intervall $[v_{min} ; v_{max}]$

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{\text{min}} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größter Wert von v:

$$v_{\text{max}} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{\text{min}} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größter Wert von v:

$$v_{\text{max}} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

- $\bar{v}$ liegt etwa in der Mitte von $[v_{\text{min}}, v_{\text{max}}]$.
- Die größere der Differenzen $\bar{v} - v_{\text{min}}$ bzw. $v_{\text{max}} - \bar{v}$ ist der Fehler $\Delta\bar{v}$

Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120{,}0 \pm 0{,}2)$ cm
- Kantenlänge $b = (90{,}0 \pm 0{,}1)$ cm

$\bar{a} = 120\,\mathrm{cm} \quad \Delta\bar{a} = 0.2\,\mathrm{cm}$

$\bar{b} = 90\,\mathrm{cm} \quad \Delta\bar{b} = 0.1\,\mathrm{cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120\,\mathrm{cm} \cdot 90\,\mathrm{cm} = 10800\,\mathrm{cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\bar{F}_{max} = (\bar{a} + \Delta\bar{a}) \cdot (\bar{b} + \Delta\bar{b}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a}\Delta\bar{b}}_{\text{klein}} \simeq \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a}$$

$$\bar{F}_{min} = (\bar{a} - \Delta\bar{a})(\bar{b} - \Delta\bar{b}) = \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\Delta\bar{b} - \bar{b}\Delta\bar{a} + \Delta\bar{a}\Delta\bar{b} \simeq \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\Delta b - \bar{b}\Delta\bar{a}$$

$$\Delta\bar{F} = \bar{F}_{max} - \bar{F} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a} - \bar{a}\bar{b} = \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a}$$

$$\Delta\bar{F} = \bar{F} - \bar{F}_{min} = \bar{a}\bar{b} - (\bar{a}\bar{b} - \bar{a}\Delta\bar{b} - \bar{b}\Delta\bar{a}) = \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a}$$

$$\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} = \frac{\bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a}}{\bar{a}\bar{b}} = \frac{\bar{a}\Delta\bar{b}}{\bar{a}\bar{b}} + \frac{\bar{b}\Delta\bar{a}}{\bar{a}\bar{b}} = \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}} + \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}}$$

Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120{,}0 \pm 0{,}2)\,\text{cm}$
- Kantenlänge $b = (90{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 10800\,\text{cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned}
F_{\text{max}} &= (\bar{a} + \Delta\bar{a})(\bar{b} + \Delta b) \\
&= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b}}_{\text{klein}} \\
&\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \\
F_{\text{min}} &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} - \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}
\end{aligned}$$

Es folgt für den Fehler: $\Delta\bar{F} \simeq F_{\text{max}} - \bar{F} \simeq \bar{F} - F_{\text{min}} \simeq \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$

$$\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

Fehler von Produkten

Allgemeine Regel

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta \bar{b}}{\bar{b}}$$

Der relative Fehler von Produkten (hier $F = a \cdot b$) **und** Quotienten von Messwerten ist gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren

Zusammenfassung: zwei Regeln

Zwei Größen $a = \bar{a} + \Delta\bar{a}$ und $b = \bar{b} + \Delta\bar{b}$

Addition oder Subtraktion: $c = a + b$ bzw. $c = a - b$

Werden a und b addiert oder subtrahiert, so **addieren** sich die **absoluten** Fehler zum absoluten Gesamtfehler:

$$\Delta\bar{c} = \Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}$$

Multiplikation oder Division: $c = a \cdot b$ bzw. $c = a/b$

Werden a und b multipliziert oder dividiert, so **addieren** sich die **relativen** Fehler zum relativen Gesamtfehler:

$$\frac{\Delta\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

Übersicht

1 Wiederholung

2 Messfehler

3 Vektoren

Skalare und Vektoren

Skalare

Größen unabhängig von einer Richtung, z.B.:

- Masse m
- Zeit t
- Volumen V
- Ladung Q

Vektoren

Größen mit Richtung, z.B.:

- Geschwindigkeit $\vec{v}$
- Kraft $\vec{F}$
- Impuls $\vec{p}$

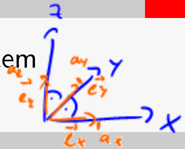
Eigenschaften von Vektoren

- Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre Länge und Richtung identisch sind

$\rightarrow$ Ein Vektor ändert sich nicht, wenn er beliebig parallel verschoben wird

- Die Länge eines Vektors gibt eine physikalische Größe wieder (Zahl + Einheit)
- Verschiedene Schreibweisen üblich: $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{a}$, $\boldsymbol{a}$, ...
- Wir verwenden $\vec{a}$

Darstellung von Vektoren



- Meistens 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem
- 3 Achsen x, y und z stehen senkrecht aufeinander

Einheitsvektoren

Vektor der Länge 1 entlang (parallel) der entsprechenden Achse

$$\vec{e_x},\ \ \vec{e_y},\ \ \vec{e_z}$$

Länge der Projektion auf die Achsen

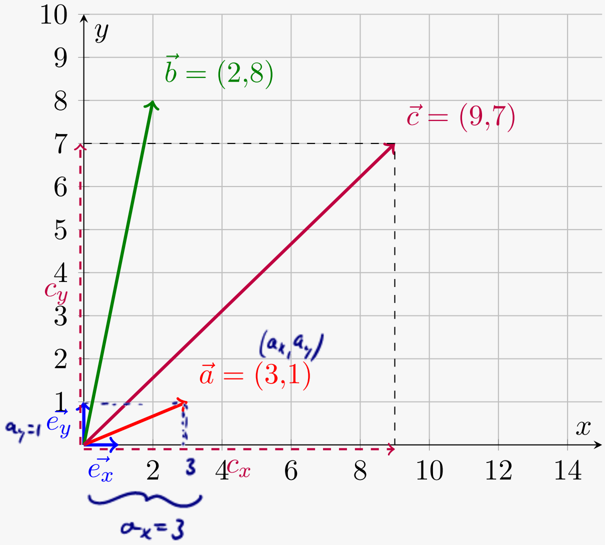
$$a_x,\ \ a_y,\ \ a_z$$

Vektor zusammengesetzt aus seinen Komponenten

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e_x} + a_y \cdot \vec{e_y} + a_z \cdot \vec{e_z}$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Graphische Darstellung (Hier: 2D Vekoren)



Rechnen mit Vektoren

Addition

Komponentenweise

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, \ a_y + b_y, \ a_z + b_z) = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

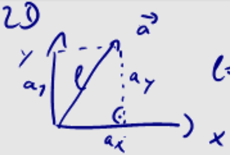
Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

wird auf jede Komponente angewendet

$$k \cdot \vec{a} = (k a_x, \ k a_y, \ k a_z)$$

Betrag (Länge)

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



$$\ell = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Zum Merken: Pythagoras in 3D

Rechnen mit Vektoren

Addition

Komponentenweise

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

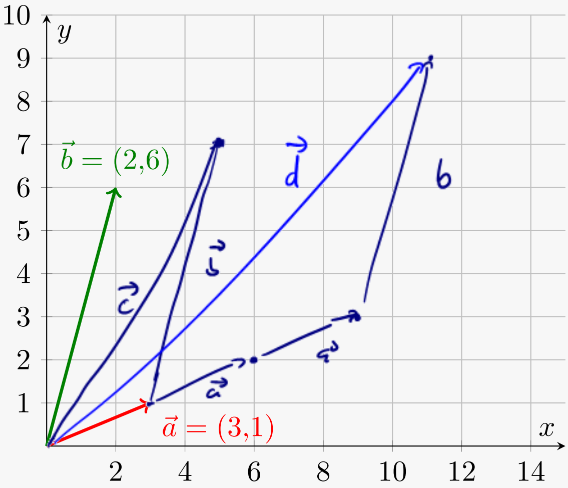
wird auf jede Komponente angewendet

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$$

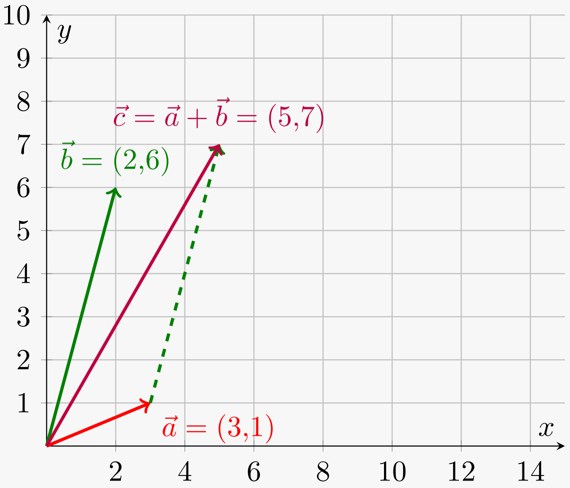
Betrag (Länge)

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

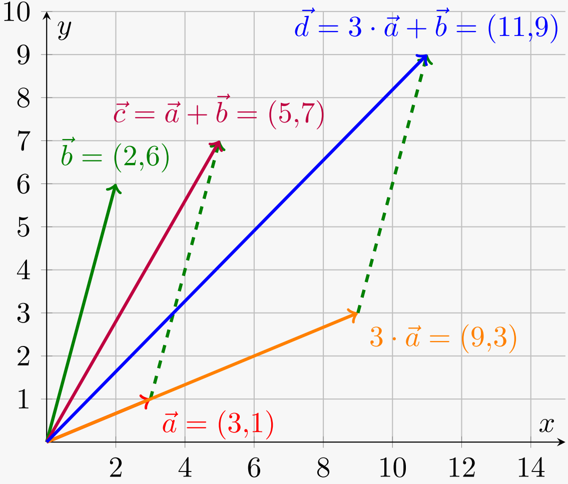
Zum Merken: Pythagoras in 3D



- Gegeben:
  $\vec{a} = (3{,}1)$
  $\vec{b} = (2{,}6)$
- Gesucht:
  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
  $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$



- Gegeben:
  $\vec{a} = (3{,}1)$
  $\vec{b} = (2{,}6)$
- Gesucht:
  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
  $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$

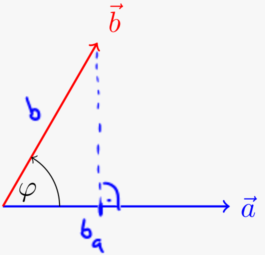


- Gegeben:
  $\vec{a} = (3{,}1)$
  $\vec{b} = (2{,}6)$
- Gesucht:
  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
  $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$

Skalarprodukt

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



$b_a = b \cdot \cos\varphi = |\vec{b}| \cos\varphi$

- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $|\vec{a}|$

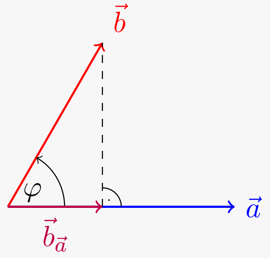
$c = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Skalarprodukt

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$

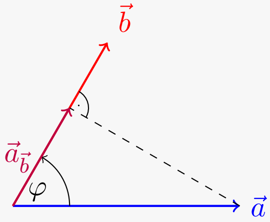
$$c = |\vec{b}_{\vec{a}}| \cdot |\vec{a}| = b \cdot a \cdot \cos(\varphi)$$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Skalarprodukt

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



$a_b = a \cdot \cos\varphi$

- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$

$$c = |\vec{b}_{\vec{a}}| \cdot |\vec{a}| = b \cdot a \cdot \cos(\varphi)$$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Analog: Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ multipliziert mit $\vec{b}$

$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

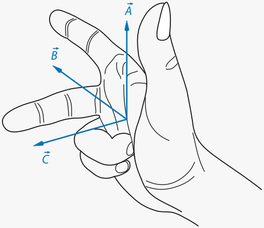
Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

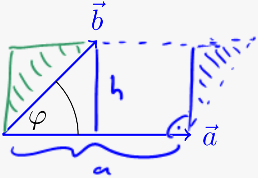
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.
- Die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung von $\vec{c}$:





$a \cdot h$
$= a \cdot b \cdot \sin\varphi$

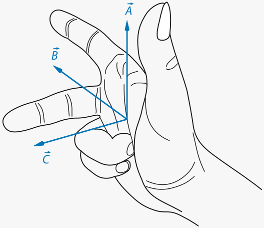
$$c = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

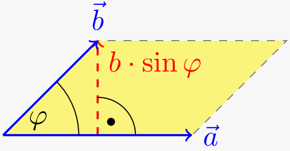
Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.
- Die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung von $\vec{c}$:





$$c = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

- $\vec{a} \cdot \vec{e_x} =$ $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_x \cdot 1 + a_y \cdot 0 + a_z \cdot 0 = a_x$
- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} =$ $\left(4 - \frac{1}{2}\right) \vec{a} = 3.5\,\vec{a}$
- $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{c}} \cdot \vec{a} =$ $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{a}$
- $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{c}} \cdot \vec{b} =$ $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) /10 =$ $\left(\begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \end{pmatrix}\right)/10 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix}/10 = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{6 \cdot \vec{e}_x}$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b})/(\vec{a} \cdot \vec{a}) =$ $\dfrac{a \cdot b \cdot \cos\varphi_1}{a \cdot a \cdot \cos\varphi_2} \leftarrow 0°$ $\dfrac{a \cdot b \cdot \cos\varphi}{a^2} = \dfrac{b}{a} \cos\varphi$

Beispiele: Rechnen mit Vektoren

- $\vec{a} \cdot \vec{e_x} = a_x$

- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} = 3{,}5 \cdot \vec{a}$

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} = c \cdot a \cdot \cos\varphi = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{a}$

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos\varphi = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{b}$

- $\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) /10 = \left(\begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \end{pmatrix}\right) /10 =$
  $\begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} /10 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \vec{e_x}$

- $(\vec{a} \cdot \vec{b})/(\vec{a} \cdot \vec{a}) = a \cdot b \cdot \cos(\varphi)/a^2 = b \cdot \cos(\varphi)/a$