

# Physik für Biologen und Zahnmediziner

## Propädeutikum 4: Messfehler und Vektoren

Dr. Daniel Bick



03. November 2017

① Wiederholung

② Messfehler

③ Vektoren

1 Wiederholung

2 Messfehler

3 Vektoren

Allgemein:

Spezielle Logarithmen:

Rechenregeln:

Basistransformation:

Allgemein:

$$b^y = x \quad \Rightarrow \quad \log_b(x) = y$$

Spezielle Logarithmen:

$$10^y = x \quad \Rightarrow \quad \lg(x) = y$$

$$e^y = x \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = y$$

Rechenregeln:

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

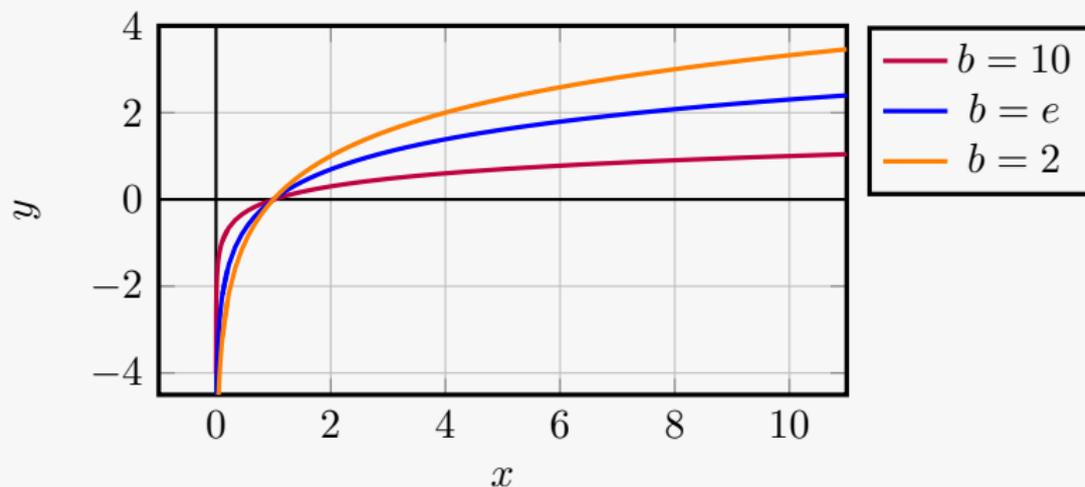
$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

Basistransformation:

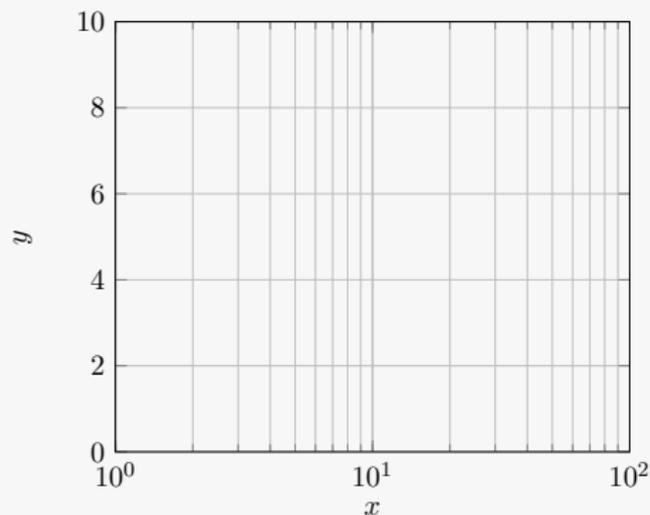
$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$

$$\ln(x) = \ln(10) \cdot \lg(x)$$

Logarithmus als Funktion:  $f(x) = y = \log_b x$



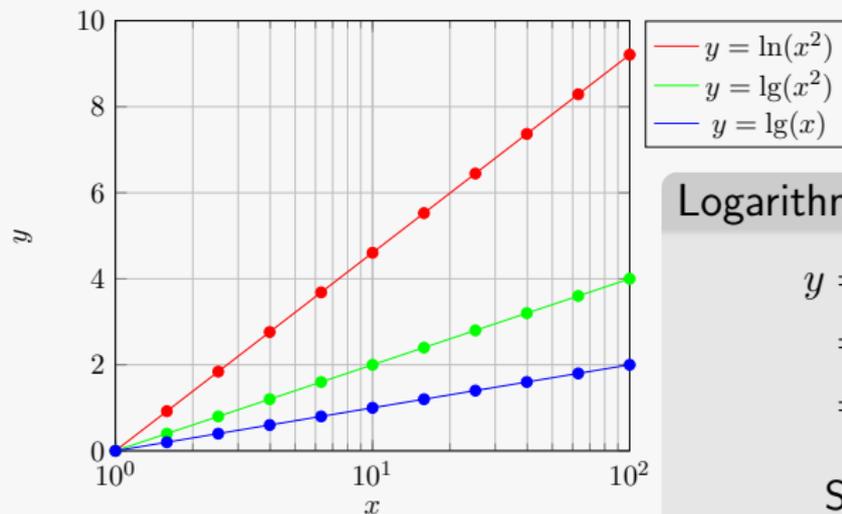
- $y$ -Achse ist Asymptote
- Schneidet  $x$ -Achse bei  $x = 1$



## Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned}y &= \log_b(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)\end{aligned}$$

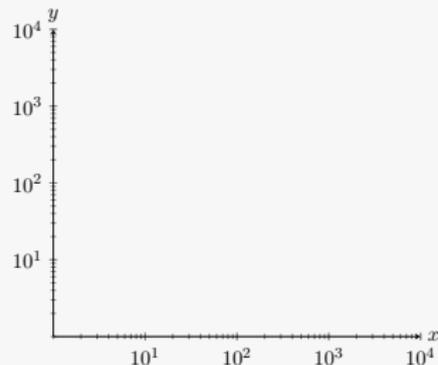
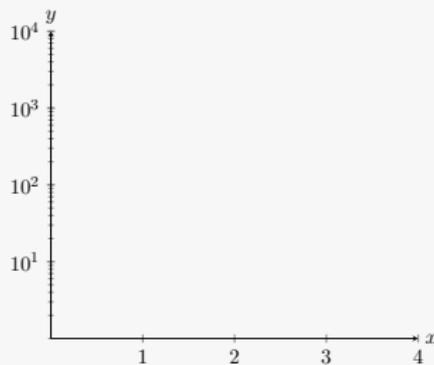
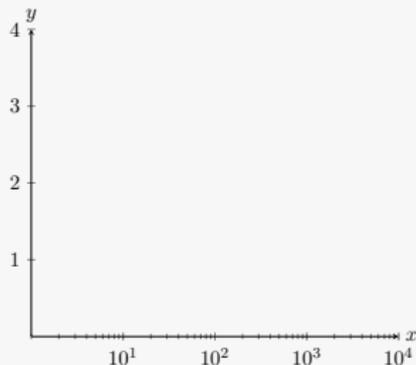
Steigung:  $n \log_b(10)$



## Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned}y &= \log_b(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)\end{aligned}$$

$$\text{Steigung: } n \log_b(10)$$



Was benutze ich wann?

Potenzfunktion

$$y = x^2$$

Exponentialfunktion

$$y = e^x$$

Logarithmische Funktion

$$y = \ln(x)$$

1 Wiederholung

2 Messfehler

3 Vektoren

## Systematische Fehler

- Falsche Eichung
- Fehlerhaftes Messgerät
- NÄhrungen
- Längenänderung durch Temperatur
- ...

## Zufällige Fehler

- Ablesefehler
- statistische Schwankungen
- Spiel bei Mikrometerschraube
- ...

**Zufällige Fehler lassen sich durch Wiederholung der Messung verringern!**

Messergebnis = Messwert  $\pm$  Fehler

Absoluter Fehler

$$L = (5,63 \pm 0,05) \text{ m}$$

Relativer Fehler

$$L = 5,63 \text{ m} \pm 0,9\%$$

Fehler = Zufallsfehler + systematischer Fehler

$$L = (5,63 \pm 0,03 \text{ (stat.)} \pm 0,04 \text{ (sys.)}) \text{ m}$$

Der **wahre Wert** ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Fehlerintervall enthalten.

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.  
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.  
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

## Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

Ein Messwert  $x_i$  liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert  $x_i$  liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert  $x_i$  liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

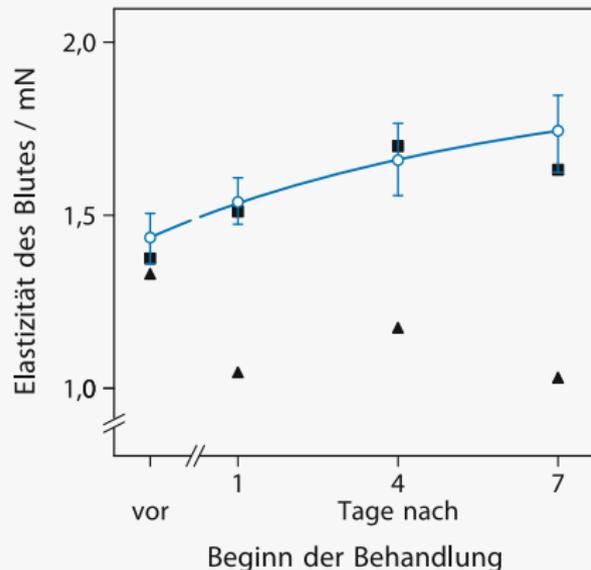
Fehler des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Je häufiger ich messe, desto kleiner wird der Fehler des Mittelwerts! Um ihn zu halbieren brauche ich 4 mal so viele Messwerte!

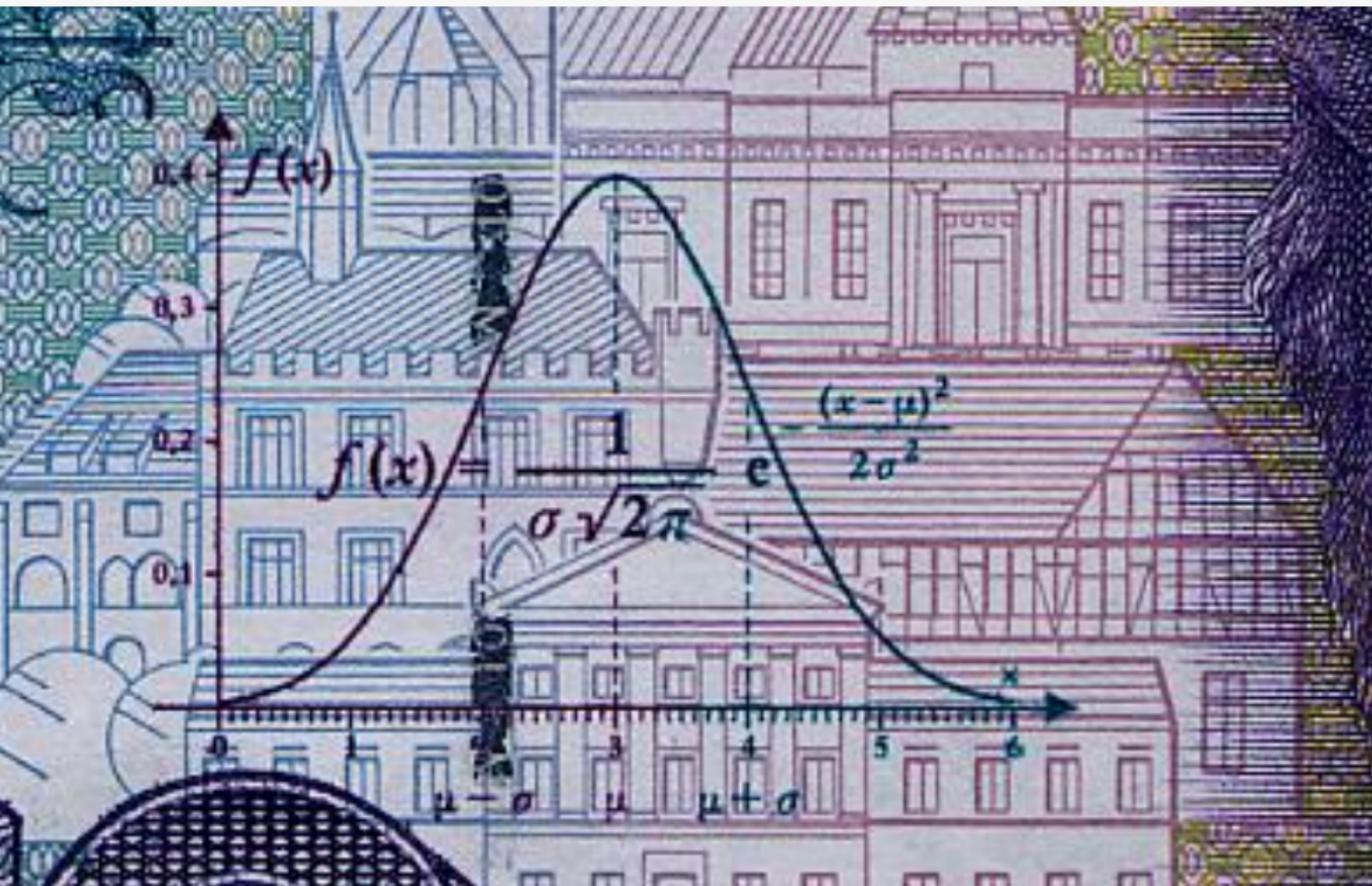
## Trombelastogramm während einer Behandlung mit Heparin



- Beobachtungsgruppe von 28 Patienten
- ■ und ▲: zwei Mitglieder der Beobachtungsgruppe
- Blaue Kreise: Mittelwert der Werte aller Patienten
- Die blauen Fehlerbalken geben die Standardabweichung an

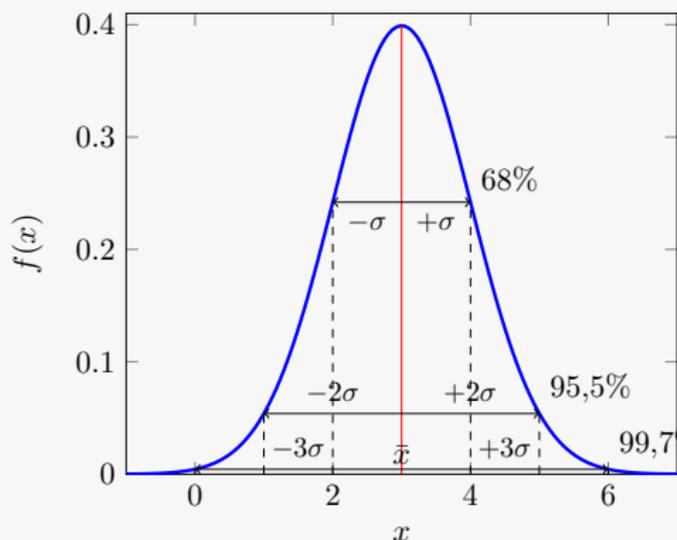
Aus: Harten *Physik für Mediziner*







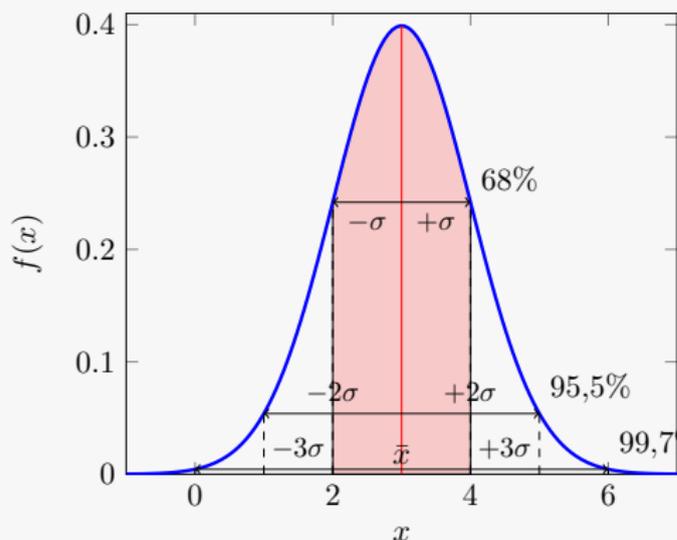
## Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert  $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

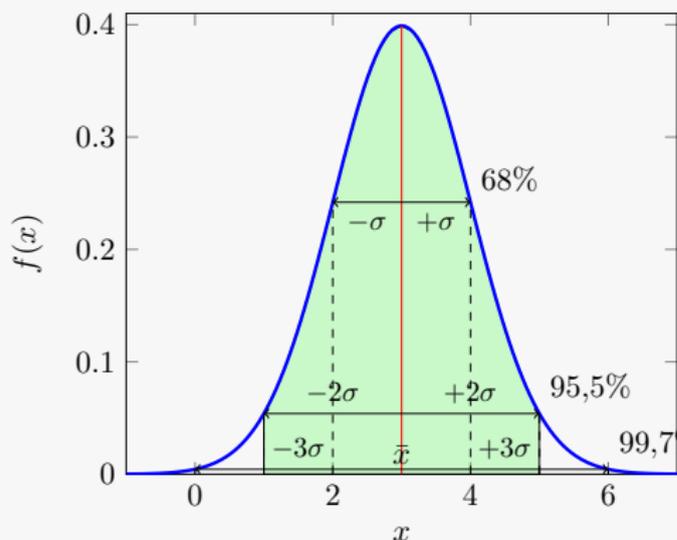
## Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert  $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- **68% im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$**
- 95,5% in  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

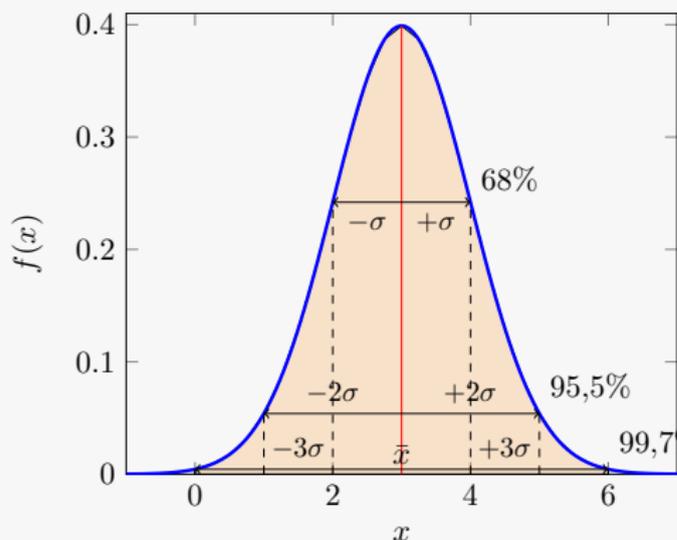
## Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert  $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

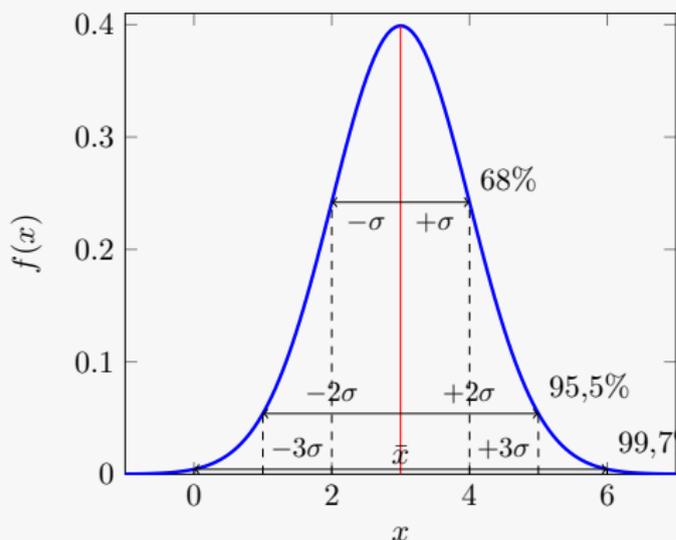
## Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert  $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

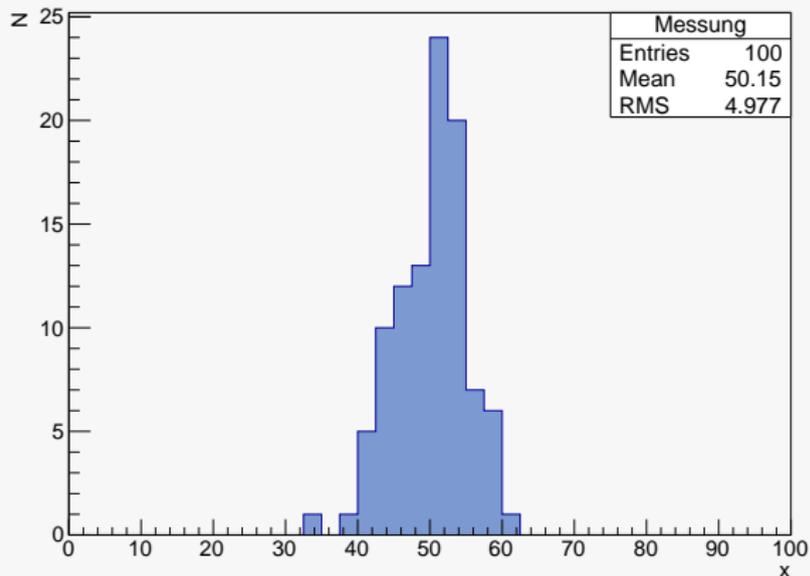
## Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

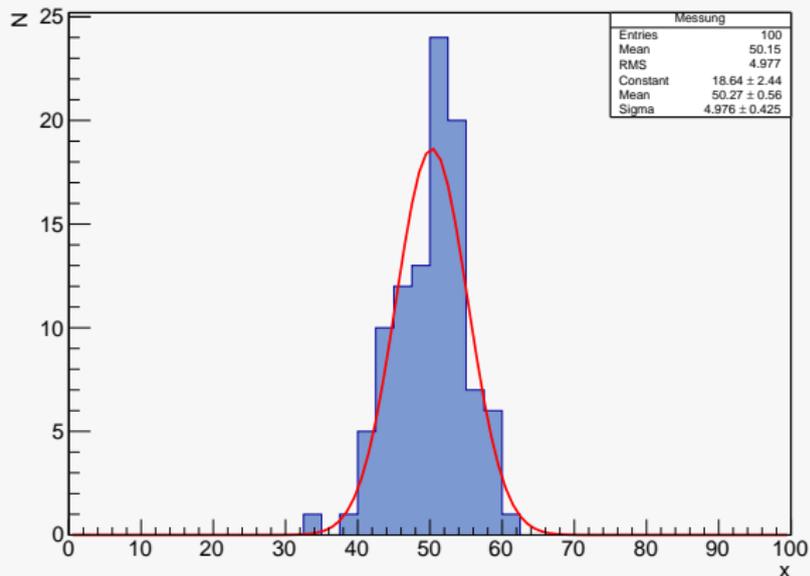


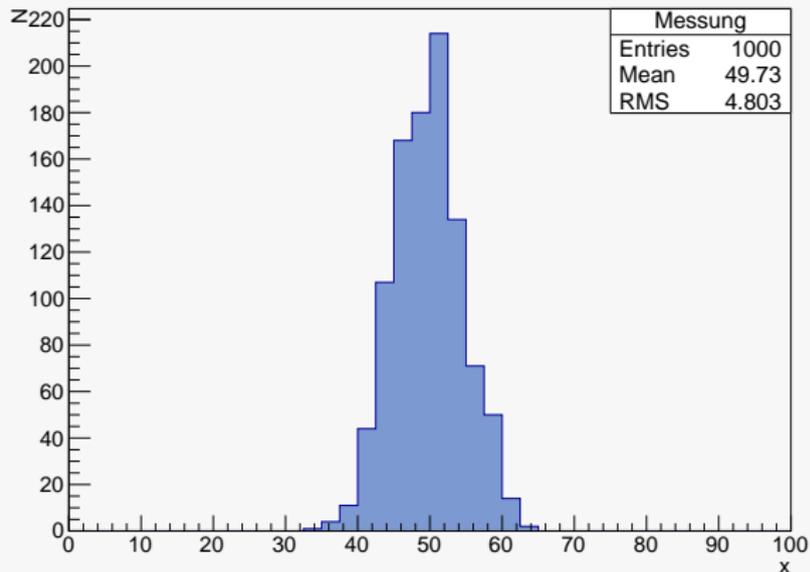
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

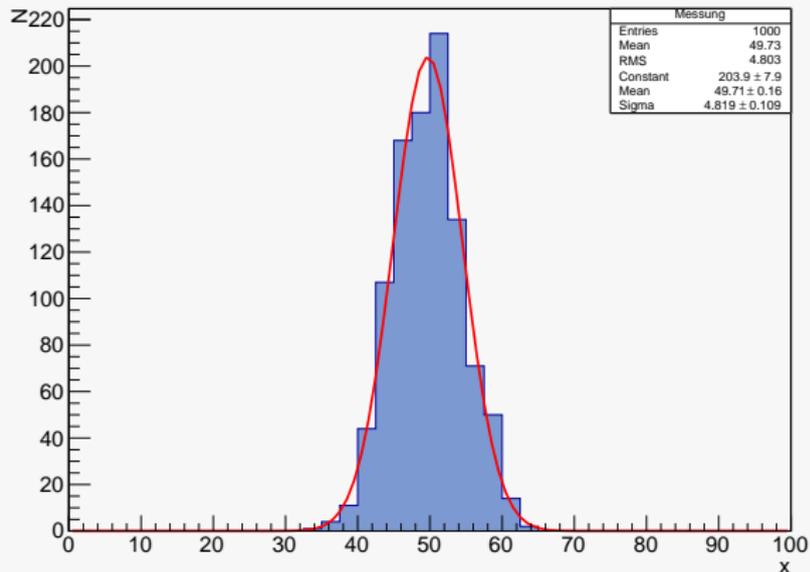
- Mittelwert  $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

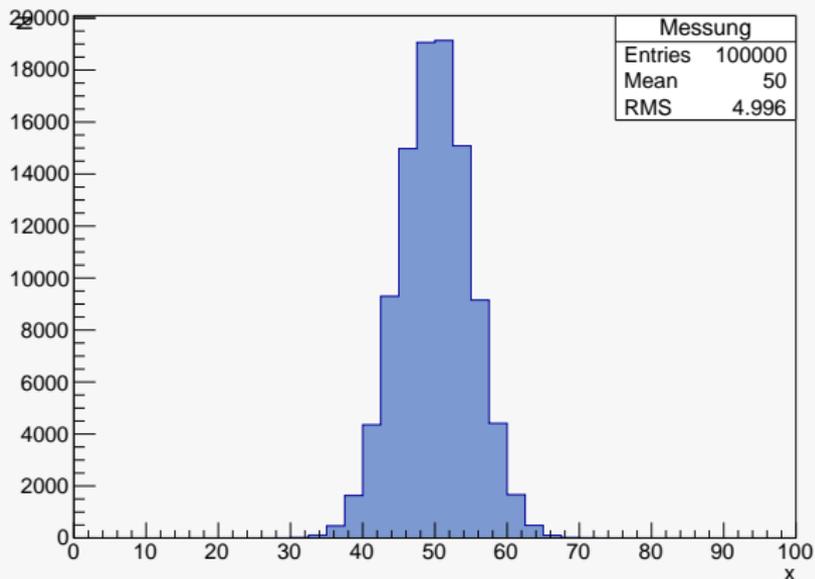
- Analog: 68% in  $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$
- 95,5% in  $[\bar{x} - 2\Delta\bar{x}, \bar{x} + 2\Delta\bar{x}]$
- 99,7% in  $[\bar{x} - 3\Delta\bar{x}, \bar{x} + 3\Delta\bar{x}]$

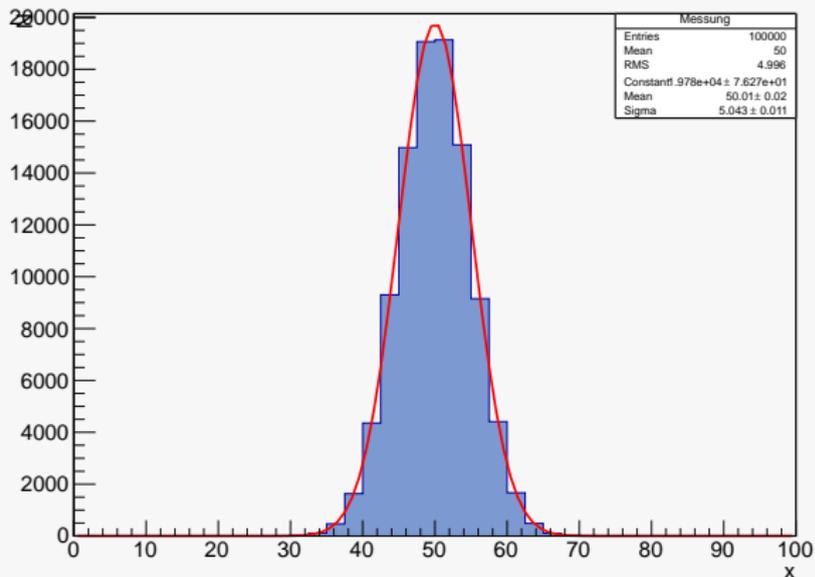












Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$x_i/[x]$	$(x_i - \bar{x})/[x]$	$(x_i - \bar{x})^2/[x]^2$
1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			
	$\sum_i x_i = \dots$		$\sum_i (x - \bar{x})^2 = \dots$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$l_i/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe			

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$l_i/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe	222,7		

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$l_i/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe	222,7		

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

# Beispiel Protokollführung

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$l_i/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	
2	35,5	-1,6	
3	36,8	-0,3	
4	38,1	1,0	
5	37,8	0,7	
6	37,2	0,1	
Summe	222,7		

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$l_i/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$l_i/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

$$\text{Fehler: } \Delta \bar{l} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{6 \cdot 5} \cdot 4,19 \text{ cm}^2} = 0,3737 \text{ cm}$$

$$l = (37,1 \pm 0,4) \text{ cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$l = (37,1 \pm 0,4) \text{ cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$\begin{aligned} l &= 37,1 \text{ cm} \pm \frac{0,4}{37,1} \cdot 100\% \\ &= 37,1 \text{ cm} \pm 1,1\% \end{aligned}$$

- Messgröße setzt sich aus mehreren fehlerbehafteten Größen zusammen
- Nur die Fehler der einzelnen Größen sind bekannt

Wie groß ist der Gesamtfehler?

Zwei Fälle

- Addition der Größen
- Multiplikation der Größen

Beispiel: Messung einer Länge  $l = l_A + l_B$ :

- Zwei Einzelmessungen  $l_A$  und  $l_B$  mit Fehler  $\Delta l_A$  und  $\Delta l_B$
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

Beispiel: Messung einer Länge  $l = l_A + l_B$ :

- Zwei Einzelmessungen  $l_A$  und  $l_B$  mit Fehler  $\Delta l_A$  und  $\Delta l_B$
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

## **Vereinfachte** Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von  $v$  durch Messen des Weges  $s$  und der benötigten Zeit  $t$ .

*Kleinsten* Wert von  $v$ :

*Größten* Wert von  $v$ :

## Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von  $v$  durch Messen des Weges  $s$  und der benötigten Zeit  $t$ .

*Kleinster Wert von  $v$ :*

$$v_{\min} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

*Größter Wert von  $v$ :*

$$v_{\max} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

## Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von  $v$  durch Messen des Weges  $s$  und der benötigten Zeit  $t$ .

*Kleinster Wert von  $v$ :*

$$v_{\min} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

*Größter Wert von  $v$ :*

$$v_{\max} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

- $\bar{v}$  liegt etwa in der Mitte von  $[v_{\min}, v_{\max}]$ .
- Die größere der Differenzen  $\bar{v} - v_{\min}$  bzw.  $v_{\max} - \bar{v}$  ist der Fehler  $\Delta\bar{v}$

# Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge  $a = (120,0 \pm 0,2) \text{ cm}$
- Kantenlänge  $b = (90,0 \pm 0,1) \text{ cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120 \text{ cm} \cdot 90 \text{ cm} = 10800 \text{ cm}^2$

Fehlergrenzen:

# Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge  $a = (120,0 \pm 0,2) \text{ cm}$
- Kantenlänge  $b = (90,0 \pm 0,1) \text{ cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120 \text{ cm} \cdot 90 \text{ cm} = 10800 \text{ cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned}
 F_{\max} &= (\bar{a} + \Delta\bar{a})(\bar{b} + \Delta\bar{b}) \\
 &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b}}_{\text{klein}}
 \end{aligned}$$

$$\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$$

$$F_{\min} \simeq \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} - \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$$

Es folgt für den Fehler:  $\Delta\bar{F} \simeq F_{\max} - \bar{F} \simeq \bar{F} - F_{\min} \simeq \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$

$$\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

## Allgemeine Regel

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta \bar{b}}{\bar{b}}$$

Der **relative Fehler von Produkten** (hier  $F = a \cdot b$ ) **und Quotienten** von Messwerten ist gleich der **Summe der relativen Fehler der Faktoren**

Zwei Größen  $a = \bar{a} + \Delta\bar{a}$  und  $b = \bar{b} + \Delta\bar{b}$

Addition oder Subtraktion:  $c = a + b$  bzw.  $c = a - b$

Werden  $a$  und  $b$  **addiert oder subtrahiert**, so **addieren** sich die **absoluten Fehler** zum absoluten Gesamtfehler:

$$\Delta\bar{c} = \Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}$$

Multiplikation oder Division:  $c = a \cdot b$  bzw.  $c = a/b$

Werden  $a$  und  $b$  **multipliziert oder dividiert**, so **addieren** sich die **relativen Fehler** zum relativen Gesamtfehler:

$$\frac{\Delta\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

① Wiederholung

② Messfehler

③ Vektoren

## Skalare

Größen unabhängig von einer Richtung, z.B.:

- Masse  $m$
- Zeit  $t$
- Volumen  $V$
- Ladung  $Q$

## Vektoren

Größen mit Richtung, z.B.:

- Geschwindigkeit  $\vec{v}$
- Kraft  $\vec{F}$
- Impuls  $\vec{p}$

- Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre Länge und Richtung identisch sind
- Ein Vektor ändert sich nicht, wenn er beliebig parallel verschoben wird
- Die Länge eines Vektors gibt eine physikalische Größe wieder (Zahl + Einheit)
- Verschiedene Schreibweisen üblich:  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\mathbf{a}$ , ...
- Wir verwenden  $\vec{a}$

# Darstellung von Vektoren

- Meistens 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem
- 3 Achsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  stehen senkrecht aufeinander

## Einheitsvektoren

Vektor der Länge 1 entlang (parallel) der entsprechenden Achse

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

Länge der **Projektion** auf die Achsen

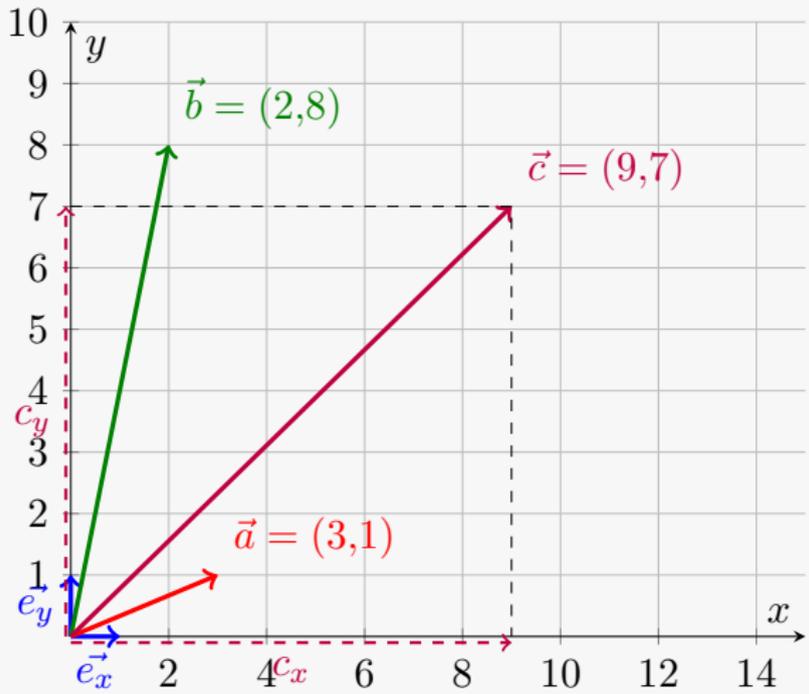
$$a_x, a_y, a_z$$

Vektor zusammengesetzt aus seinen Komponenten

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

# Graphische Darstellung (Hier: 2D Vektoren)



Addition

Komponentenweise

Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

wird auf jede Komponente angewendet

Betrag (Länge)

Zum Merken: Pythagoras in 3D

## Addition

Komponentenweise

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

## Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

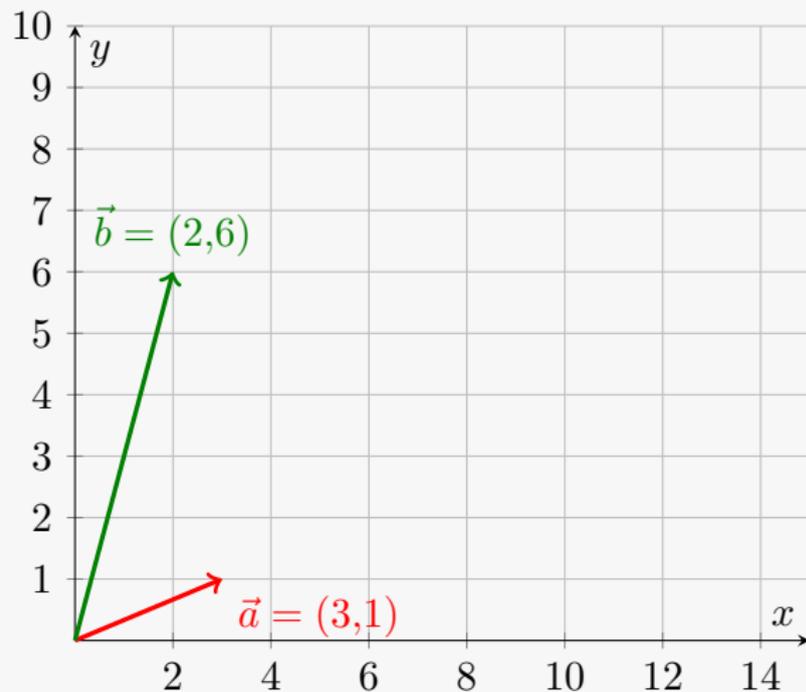
wird auf jede Komponente angewendet

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$$

## Betrag (Länge)

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Zum Merken: Pythagoras in 3D



- Gegeben:

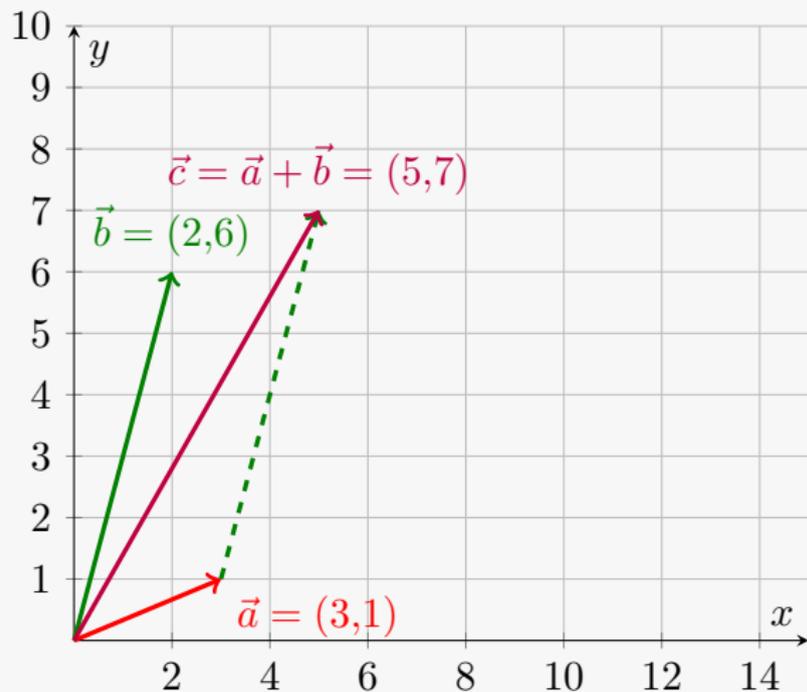
$$\vec{a} = (3,1)$$

$$\vec{b} = (2,6)$$

- Gesucht:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$$



- Gegeben:

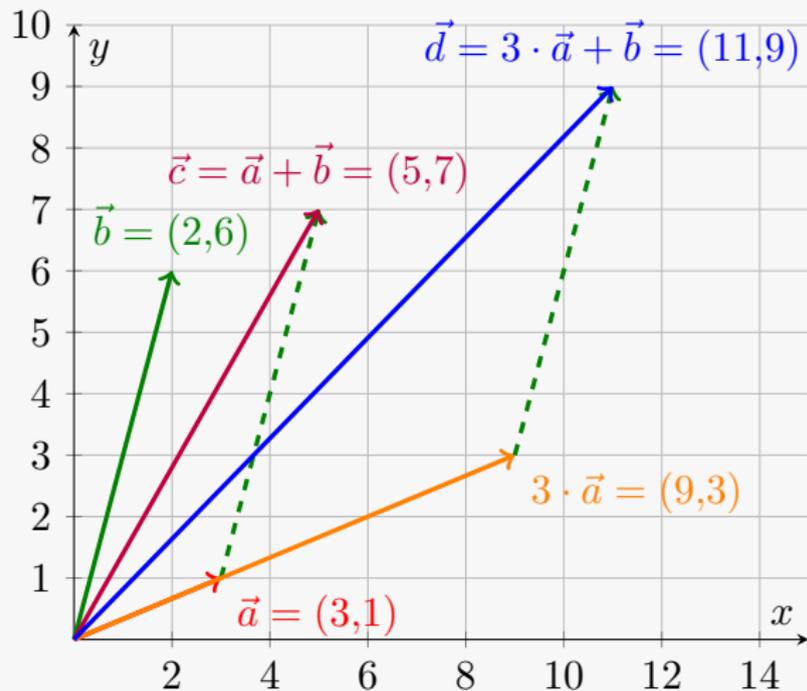
$$\vec{a} = (3,1)$$

$$\vec{b} = (2,6)$$

- Gesucht:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$$



- Gegeben:

$$\vec{a} = (3, 1)$$

$$\vec{b} = (2, 6)$$

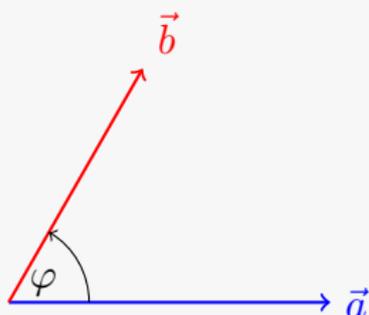
- Gesucht:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$$

## Skalare Multiplikation zweier Vektoren

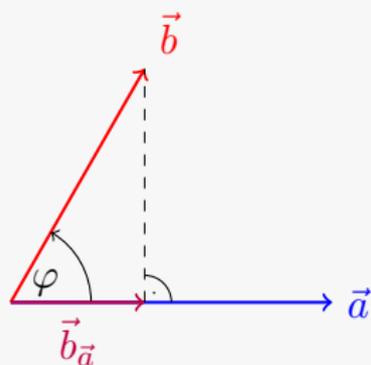
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



- Projektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$  multipliziert mit  $\vec{a}$
- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

## Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



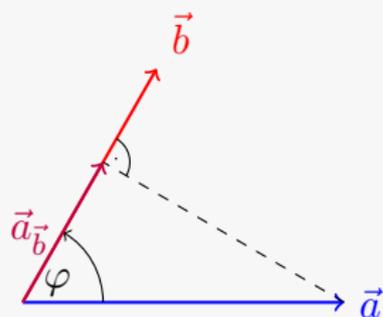
- Projektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$  multipliziert mit  $\vec{a}$

$$c = |\vec{b}_{\vec{a}}| \cdot |\vec{a}| = b \cdot a \cdot \cos(\varphi)$$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

## Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



- Projektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$  multipliziert mit  $\vec{a}$

$$c = |\vec{b}_a| \cdot |\vec{a}| = b \cdot a \cdot \cos(\varphi)$$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Analog: Projektion von  $\vec{a}$  auf  $\vec{b}$  multipliziert mit  $\vec{b}$

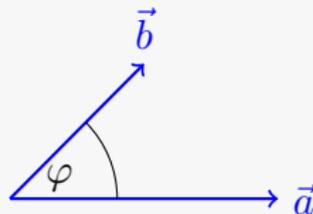
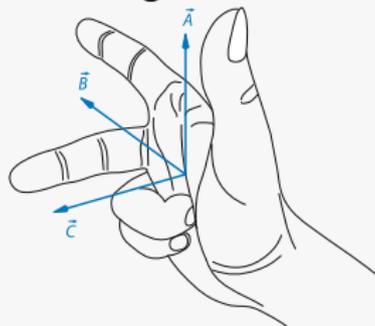
# Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

## Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor  $\vec{c}$ , der senkrecht zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht.
- Die Länge von  $\vec{c}$  ist gleich der Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms

Richtung von  $\vec{c}$ :



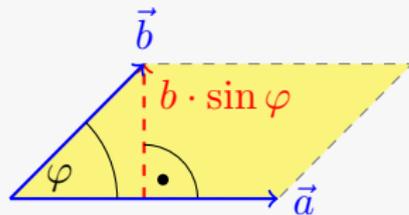
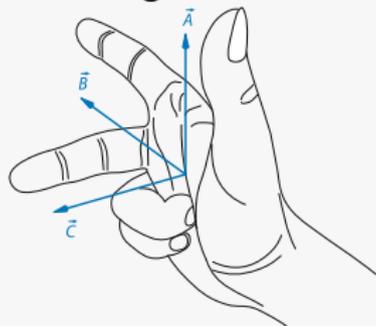
# Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

## Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor  $\vec{c}$ , der senkrecht zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht.
- Die Länge von  $\vec{c}$  ist gleich der Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms

Richtung von  $\vec{c}$ :



$$c = a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

- $\vec{a} \cdot \vec{e}_x =$

- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{a} =$

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} =$

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} =$

- $\left( 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right) / 10 =$

- $(\vec{a} \cdot \vec{b}) / (\vec{a} \cdot \vec{a}) =$

- $\vec{a} \cdot \vec{e}_x = a_x$
- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{a} = 3,5 \cdot \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} = c \cdot a \cdot \cos \varphi = 0$  da  $\vec{c} \perp \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos \varphi = 0$  da  $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\left( 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right) / 10 = \left( \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \end{pmatrix} \right) / 10 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} / 10 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \vec{e}_x$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b}) / (\vec{a} \cdot \vec{a}) = a \cdot b \cdot \cos(\varphi) / a^2 = b \cdot \cos(\varphi) / a$