Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 3: Funktionen und Ableitungen, Vektoren

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

27. Oktober 2017

Inhalt

Übersicht

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

Ausprobieren ?

1 ? $\qquad 10^1 = 10$

2 ? $\qquad 10^2 = 100$

-1 ? $\qquad 10^{-1} = 0.1$

4 $\qquad 10^4 = 10000$

$\hookrightarrow \quad \underline{x = 4}$

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

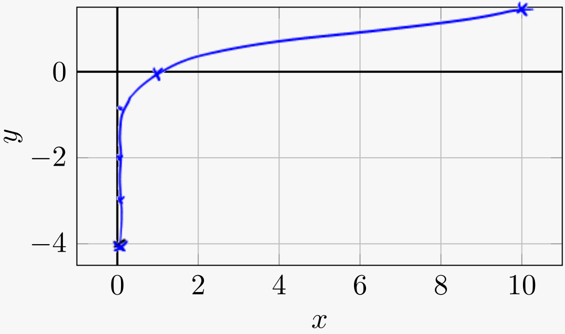
Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

Umkehrfunktion?

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

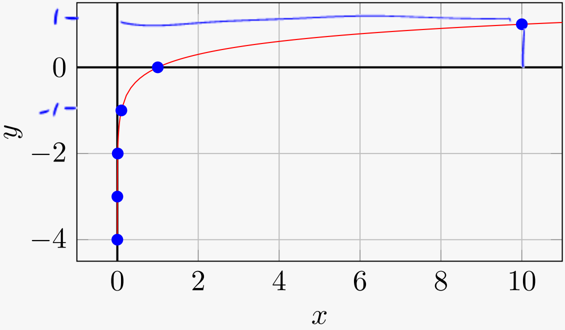


Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$
$$x = \log_{10}(10000)$$

$10^x = 10$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4



Logarithmus

$$10^x = 10000$$
$$x = \log_{10}(10000) = 4$$

- $x = 4$: Anzahl der Nullen
- $\log_{10}$ steht für Logarithmus zur Basis 10
- Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit gleicher Basis
- Wächst extrem langsam

$10000 = 10^x$

$b=10$

$y = 10000$

Gegeben

$$y = b^x \qquad \text{mit } b > 0$$

Lösung: **Logarithmus von y zur Basis b**

$$x = \log_b y$$

$x = \log_b(y) = \log_b(b^x)$

$y = \log_b(b^y)$

$y = b^x = b^{\log_b(y)}$

$b^{\log_b(y)} = \log_b(b^y)$

Logarithmus allgemein

Gegeben

$$y = b^x \qquad \text{mit } b > 0$$

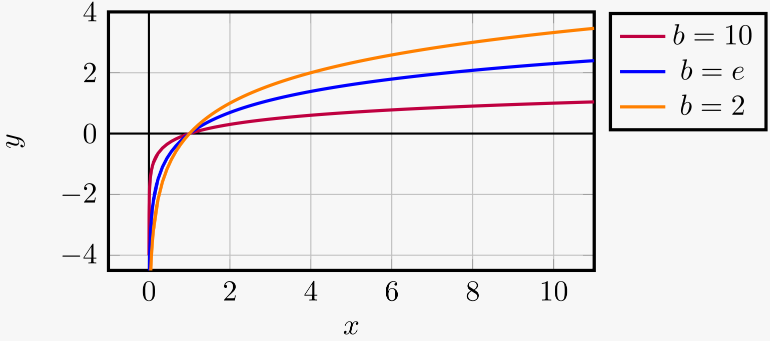
Lösung: **Logarithmus von y zur Basis b**

$$x = \log_b y$$

Besondere Basen:

10: $\log_{10} y = \lg y$ $\qquad$ e: $\boxed{\log_e y = \ln y}$

Logarithmus als Funktion: $f(x) = y = \log_b x$



- y-Achse ist Asymptote → nur positive Werte für $\log_b(x)$
- Schneidet x-Achse bei $x = 1$

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\overbrace{\lg(A)}^{n}}$ und $B = 10^{\overbrace{\lg(B)}^{m}}$

Multiplikation

$$A \cdot B = 10^n \cdot 10^m = 10^{(n+m)} = 10^{\lg A} \cdot 10^{\lg B} \qquad \Big| \lg()$$

$$\lg(A \cdot B) = \lg\left(10^{\lg A} \cdot 10^{\lg B}\right) = \lg\left(10^{\lg A + \lg B}\right)$$

$$\lg(A \cdot B) = \lg A + \lg B$$

Rechnen mit Logarithmen – Multiplikation

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} \\ &= 10^{\lg(A)+\lg(B)} \\ \lg(A \cdot B) &= \lg(10^{\lg(A)+\lg(B)}) \\ &= \lg(A) + \lg(B) \end{aligned}$$

Rechnen mit Logarithmen

Multiplikation

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

Division

$B = 10^m$

$$\log_b(A/B) = \log_b(A) - \log_b(B)$$

$\rightarrow \frac{1}{B} = 10^{-m}$

Potenz

Bsp $m = 2$

$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

$\log_b A^2 = \log_b(A \cdot A)$

$= \log_b A + \log_b(A)$

Wurzel

$$\log_b(\sqrt[m]{A}) = \log_b(A)/m$$

$\sqrt[m]{A} = A^{\frac{1}{m}}$

Beispiel

Taschenrechner: $\ln \to \log_e$

$\log \to \log_{10} = \lg$

$$\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) = \log_2\left(\frac{10 \cdot x}{40}\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{x}{2^2}\right) = \log_2\left(x \cdot 2^{-2}\right)$$

$$= \log_2(x) + \log_2\left(2^{-2}\right)$$

$$= \log_2(x) + (-2) \cdot \underbrace{\log_2 2}_{1} = \log_2(x) - 2$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) &= \log_2(\frac{10 \cdot x}{40}) \\
&= \log_2(\frac{x}{4}) \\
&= \log_2(\frac{x}{2^2}) \\
&= \log_2(x \cdot 2^{-2}) \\
&= \log_2(x) + \log_2(2^{-2}) \\
&= \log_2(x) - 2
\end{aligned}
$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln(A)} = 10^{\lg(A)} \quad / \ln(\ )$$

$$\ln e^{\ln A} = \ln 10^{\lg A}$$

$$\ln A \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = \lg A \cdot \ln 10$$

$$\ln A = \lg A \cdot \ln 10$$

$$\log_b(x) = \log_b(g) \log_g(x)$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$\begin{aligned} A &= e^{\ln(A)} \\ 10^{\lg(A)} = A &= e^{\ln(A)} \\ \ln(10^{\lg(A)}) &= \ln(A) \\ \lg(A)\ln(10) &= \ln(A) \end{aligned}$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$\begin{aligned} A &= e^{\ln(A)} \\ 10^{\lg(A)} = A &= e^{\ln(A)} \\ \ln(10^{\lg(A)}) &= \ln(A) \\ \lg(A)\ln(10) &= \ln(A) \end{aligned}$$

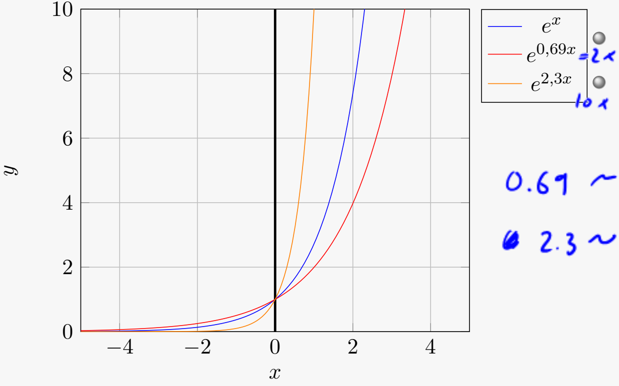
Allgemein

$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

$0.69 \sim \ln 2 \Rightarrow e^{\ln(2)x} = 2^x$

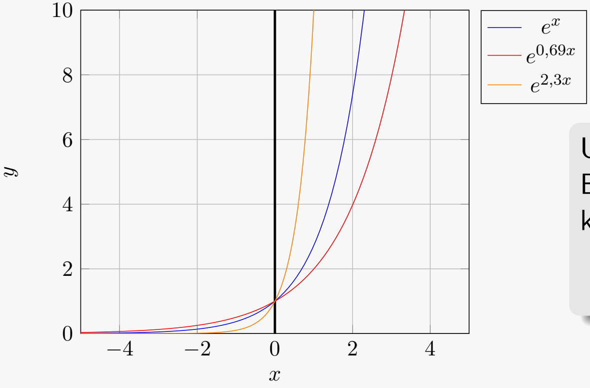
$2.3 \sim \ln 10 \rightarrow 10^x$

Wiederholung: Exponentialfunktion allgemein

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

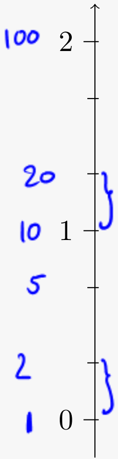
Um von einer beliebigen Basis B auf die Basis e zu kommen:

$$B^x = e^{\ln(B)\cdot x}$$

Z.B. für die y-Achse

- Trage jeden Messwert y an der Stelle $\lg(y)$ auf.

$$
\begin{aligned}
1 &\rightarrow \lg(1) = 0 \\
10 &\rightarrow \lg(10) = 1 \\
100 &\rightarrow \lg(100) = 2 \\
2 &\rightarrow \lg(2) \simeq 0{,}3 \\
5 &\rightarrow \lg(5) \simeq 0{,}7
\end{aligned}
$$

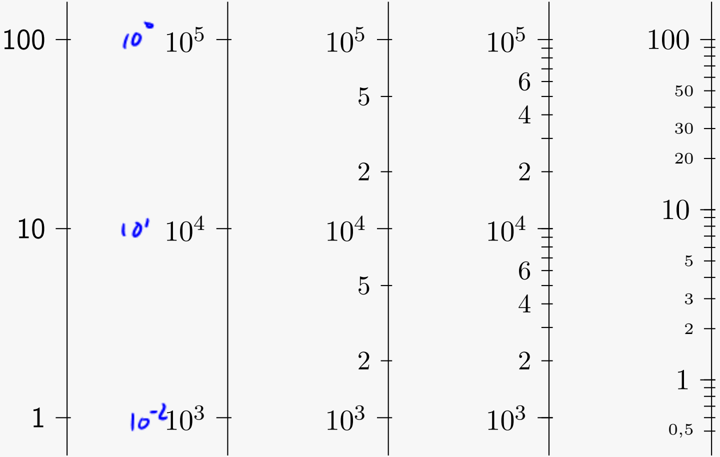


$$20 \rightarrow \lg(20) = \lg(2\cdot 10)$$
$$= \lg 2 + \lg 10$$

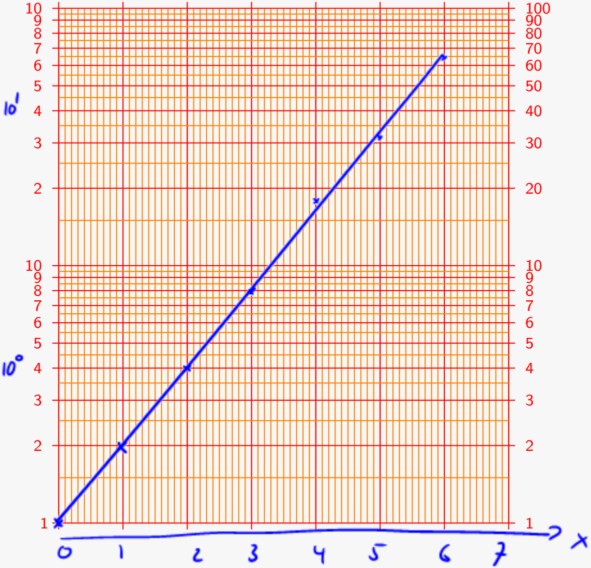
- $\lg(x)$ nur für positive x
- Darstellung nur für positive y-Werte möglich

Beschriftung logarithmisch geteilter Achsen

Verschiedene Beschriftungen möglich



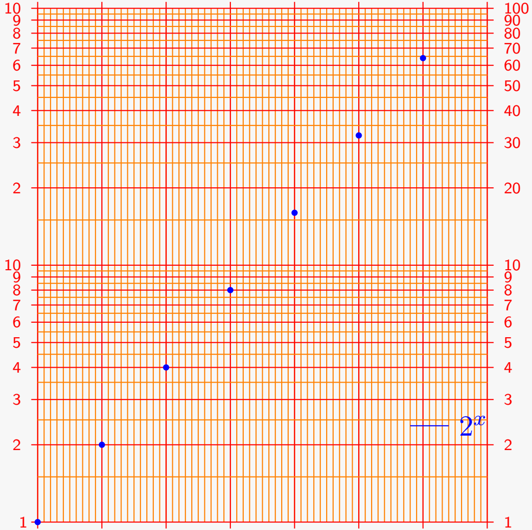
Einfach-logarithmisches Papier



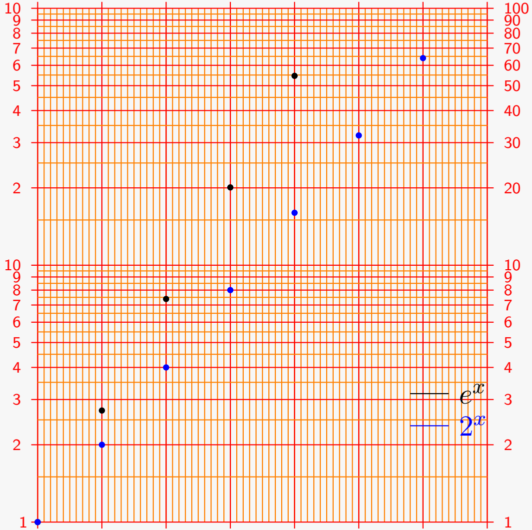
- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

$f(x) = 2^x$

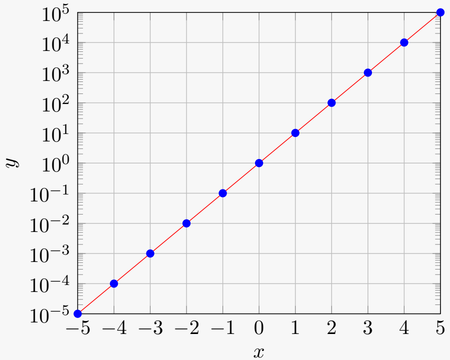
Einfach-logarithmisches Papier

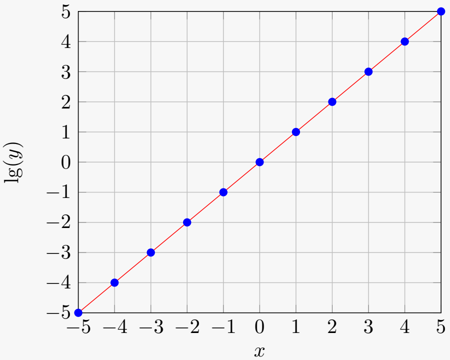


- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten



- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten





Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

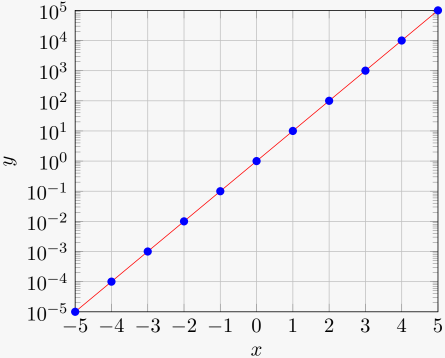
$$\lg 10^{cx} = c x$$

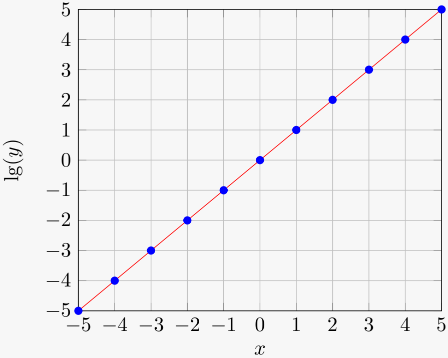
$$y = 10^{c \cdot x} \to \lg(y) = c \cdot x$$

$$y = B^{c \cdot x} \to \lg(y) = \lg B^{cx} = c \cdot x \cdot \lg B = \underbrace{c \cdot \lg B}_{\text{Steigung}} \cdot x$$

Steigung $= c \cdot \lg B$

Logarithmische Graphen





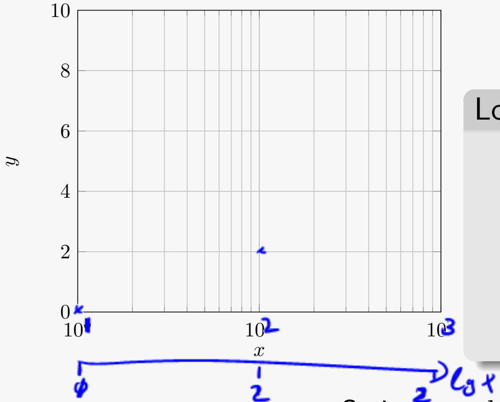
Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$
$$y = B^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x \cdot \lg(B)$$

Steigung $= c \cdot \lg(B)$

Logarithmische x-Achse

nächste Mal mit richtigen Achsenbeschriftung



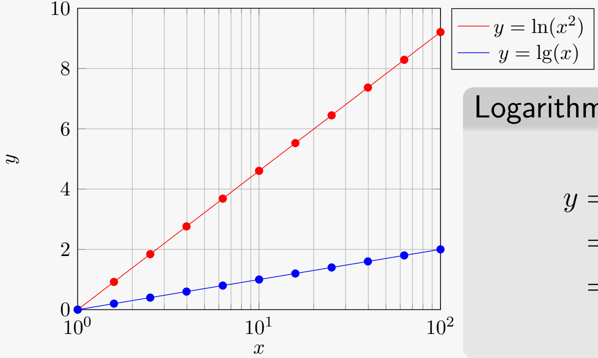
$y = \lg(x)$

Logarithmische Zusammenhänge

$$
\begin{aligned}
y &= \log_b(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\
&= \underbrace{\log_b(10) \cdot n}_{\text{Zahl}} \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

Steigung: $n \log_b(10)$

Logarithmische x-Achse



Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned} y &= \log_b(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x) \end{aligned}$$

Steigung: $n \log_b(10)$

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n \qquad / \lg$$

$$\lg(y) = \lg(a \cdot x^n)$$

$$= \lg a + \lg x^n$$

$$\lg y = \underbrace{\lg a}_{\text{Zahl}} + \underbrace{n}_{\text{Fakto}} \lg x$$

Analog $y = b + c \cdot X$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

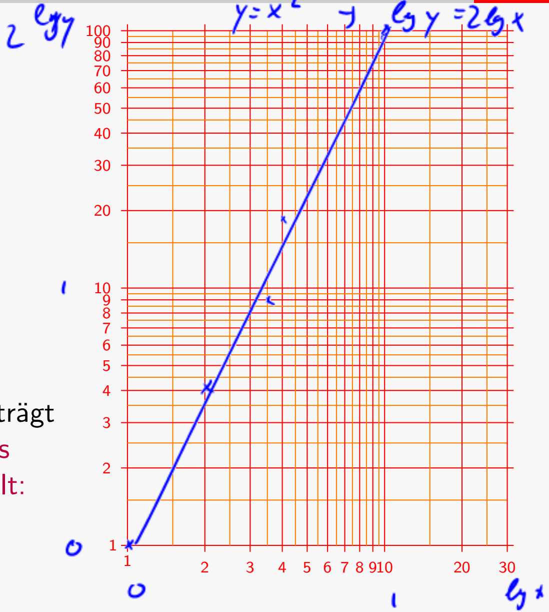
$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



Potenzfunktion

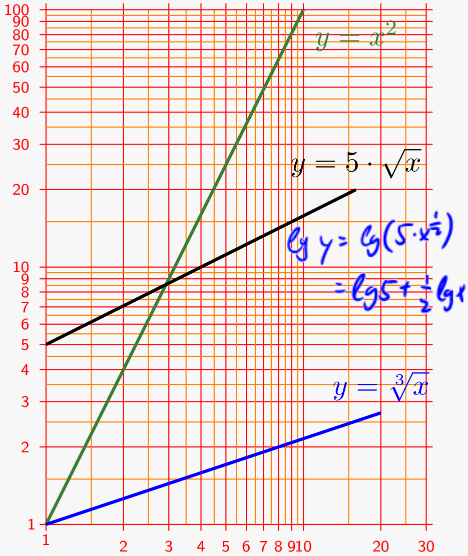
$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

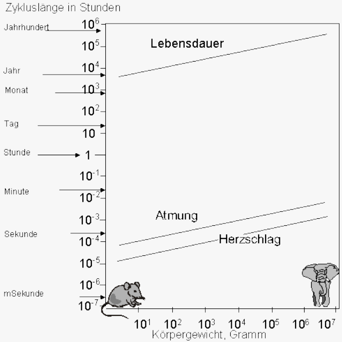
wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



Beispiel Allometrie

- Messen und Vergleichen von Beziehungen zwischen der Körpergröße von Lebewesen und deren Verhältnis zu verschiedensten biologischen Größen



Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Allometrie

Klassische Allometrieformel

$$y = a \cdot x^b$$

Übersicht

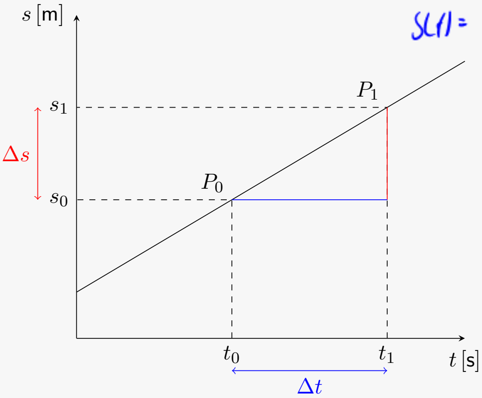
Diffentation

Beispiel:

- Auto mit **konstanter Geschwindigkeit** v
- Verhältnis aus zurückgelegtem Weg Δs und dafür benötigter Zeit Δt immer gleich

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Um die Geschwindigkeit zu messen, reicht es Zeit und Ort an einem Startpunkt P_0 und an einem Stopppunkt P_1 zu bestimmen.



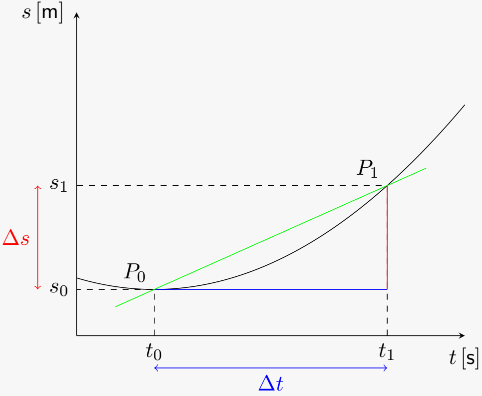
$s(t) = v \cdot t +$

- P_0: Startpunkt der Messung
  t_0 Startzeit, s_0 Startort
- P_1: Stopppunkt der Messung
  t_1 Stoppzeit, s_1 Stopport
- Geschwindigkeit konstant
  $\Rightarrow v$ ist Steigung der Geraden

Geschwindigkeit

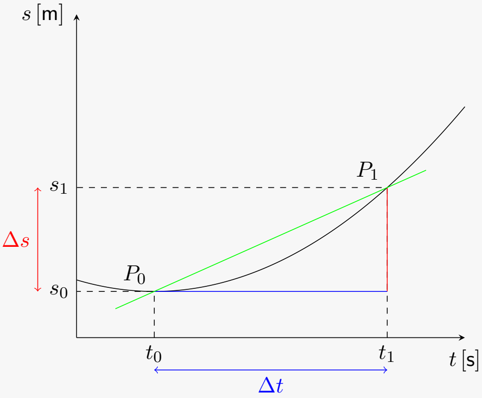
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Weg-Zeit-Diagramm – Beschleunigte Bewegung



- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken

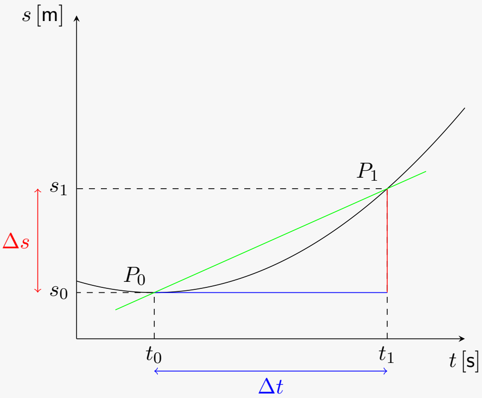
Weg-Zeit-Diagramm – Beschleunigte Bewegung



- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken

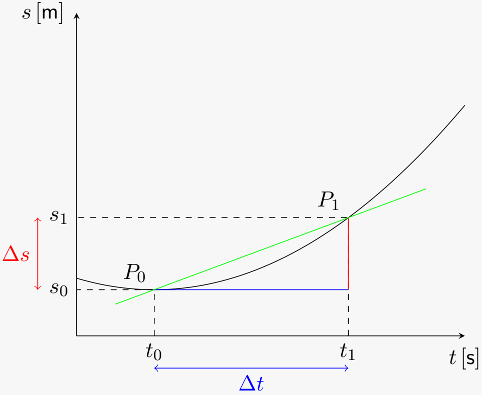
- Δt muss so klein gewählt werden, dass die Geschwindigkeitsänderung während Δt vernachlässigbar klein wird.

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t

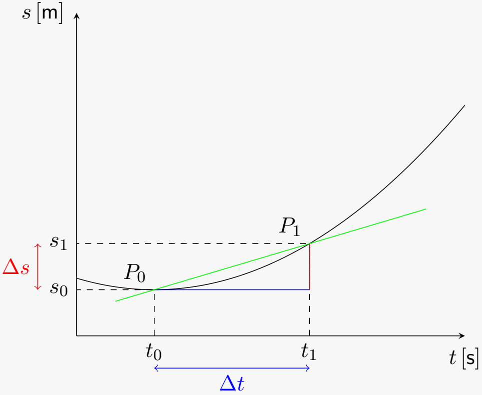


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t

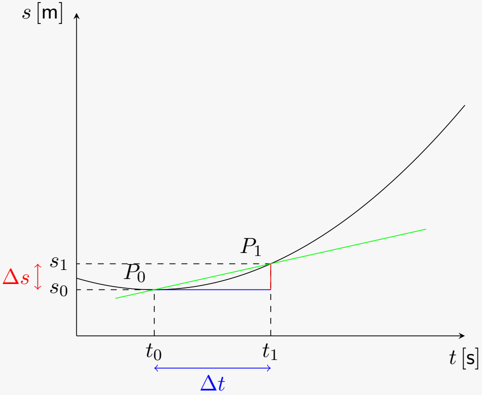


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

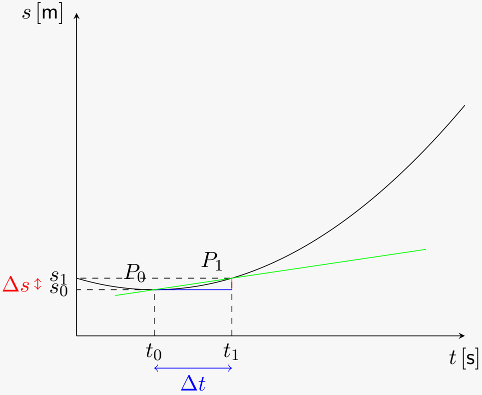


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t

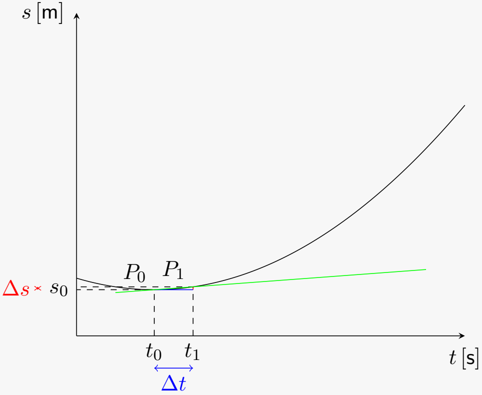


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

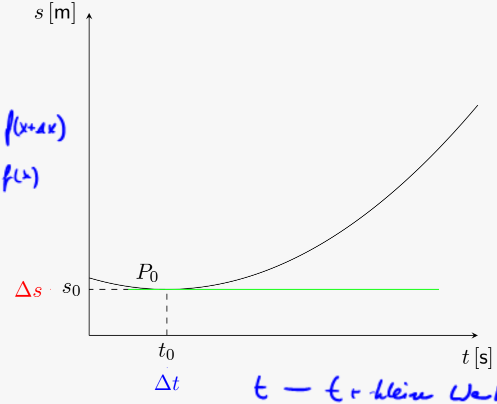


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$
- Tangente an die Kurve bei P_0

$t \;-\; t +$ kleine Wert

$x \;-\; x + \underbrace{\Delta x}_{\text{klein}}$

Differentialquotient

Mathematisch kann man Δt *„unendlich klein“* werden lassen

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t_0}$$

Die Steigung der Kurve im Punkt P ist die Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

$\frac{d}{dx} f(x)$

- Die **Ableitung** an einem Punkt P der Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt P an.
- Mathematisch definiert durch den **Differentialquotienten** $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$
- Im Differentialquotienten sind die Differenzen infinitesimal klein.

Man schreibt:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Beispiel $f(x) = x^2$

$$y = f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\Delta x x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^2 = 2x}$$

Beispiel $f(x) = x^2$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= 2x + \Delta x \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}
$$

Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen

$f(x)$	$y' = f'(x)$
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$n=2 \rightarrow x^2 \rightarrow 2x$

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) =$ $7 \cdot \frac{d}{dx} \ln(x) = 7 \cdot \frac{1}{x} = \frac{7}{x}$

Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \to f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \to f'(x) = \frac{7}{x}$

Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) =$ $\frac{d}{dx} x^3 + \frac{d}{dx} e^x = 3x^2 + e^x$

Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + e^x$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \to f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\to f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x \cdot \cos x) = \frac{d}{dx}(\sin x) \cdot \cos x + \sin x \frac{d}{dx}\cos x$$

$$= \cos x \cdot \cos x + \sin x\,(-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$a^2+b^2=c^2$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x))/v^2(x)$$

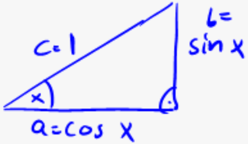
- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x)/\cos(x)$$

$$\rightarrow f'(x) = \left(\frac{d}{dx}(\sin x)\cdot\cos x - \sin x\,\frac{d}{dx}\cos x\right)\Big/\cos^2 x$$

$$= \left(\cos x\cdot\cos x - \sin x\,(-\sin x)\right)/\cos^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$



Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)))/\cos^2(x) \\ &= 1 + \sin^2(x)/\cos^2(x) \\ &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = f(x) = f(u(x)) \to f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \to u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) = e^u \cdot 2x = \underline{e^{x^2} \cdot 2x}$$

Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

1. **Konstanter Faktor**
   $y = f(x) = c \cdot u(x) \to f'(x) = c \cdot u'(x)$
2. **Summenregel**
   $y = f(x) = u(x) + v(x) \to f'(x) = u'(x) + v'(x)$
3. **Produktregel**
   $y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \to f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
4. **Quotientenregel**
   $y = f(x) = u(x)/v(x) \to f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v(x)^2$
5. **Kettenregel**
   $y = f(x) = f(u(x)) \to f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

4 ⇐ 3 und 5

$$\frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \underbrace{v^{-1}(x)}_{\text{Kettenregel}}$$

$3 \cdot x^{-1}$

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) = 5 \cdot 3x^2 + 2x + 3(-1)x^{-2}$
  $= 15x^2 + 2x - 3x^{-2}$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} x^{\frac{-2}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[5]{x^{-2}}$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(x^5) \cdot \ln x + x^5 \frac{d}{dx} \ln x$
  $u(x) = x^5$
  $v(x) = \ln x$
  $= 5x^4 \cdot \ln x + \underbrace{x^5 \cdot \frac{1}{x}}_{x^4} = 5x^4 \ln x + x^4$
  $= x^4 (5 \ln x + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) =$
  $f(u) = \sin u$
  $u(x) = x^3 - x^2$
  $(3x^2 - 2x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \rightarrow f'(x) =$

Beispiele für Ableitungen

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \to f'(x) = 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3/x^2$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \to f'(x) = 3/(5 \cdot \sqrt[5]{x^2})$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \to f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \to f'(x) = (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \to f'(x) = (1 + 1/x - \ln(x))/(x+1)^2$