

Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 3: Funktionen und Ableitungen, Vektoren

Dr. Daniel Bick



27. Oktober 2017

1 Logarithmen

2 Differentiation

1 Logarithmen

2 Differentiation

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$$x = 4$$

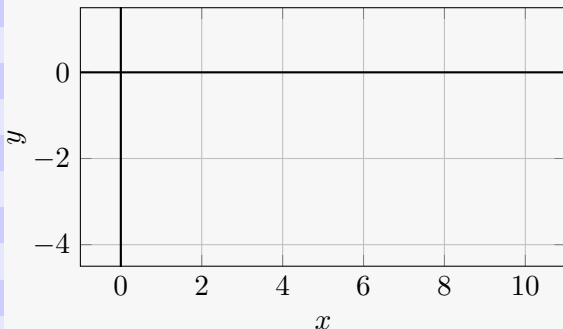
$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$$x = 4$$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4



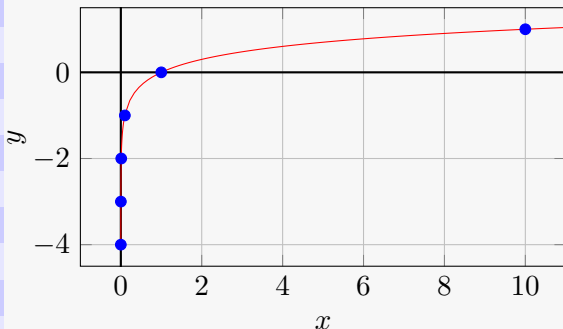
Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$$x = 4$$

$$x = \log_{10}(10000)$$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4



$$10^x = 10000$$

$$x = \log_{10}(10000) = 4$$

- $x = 4$: Anzahl der Nullen
- $\log_{10}$ steht für Logarithmus zur Basis 10
- Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit gleicher Basis
- Wächst extrem langsam

Gegeben

$$y = b^x \quad \text{mit } b > 0$$

Lösung: **Logarithmus von y zur Basis b**

$$x = \log_b y$$

Gegeben

$$y = b^x \quad \text{mit } b > 0$$

Lösung: **Logarithmus von y zur Basis b**

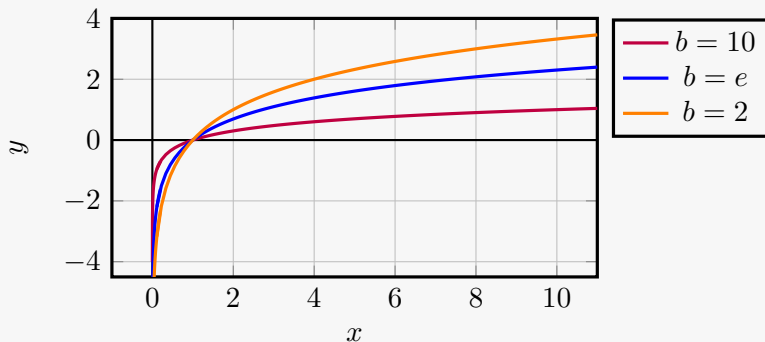
$$x = \log_b y$$

Besondere Basen:

$$10: \log_{10} y = \lg y$$

$$e: \log_e y = \ln y$$

Logarithmus als Funktion: $f(x) = y = \log_b x$



- y -Achse ist Asymptote
- Schneidet x -Achse bei $x = 1$

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} \\ &= 10^{\lg(A) + \lg(B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg(A \cdot B) &= \lg(10^{\lg(A) + \lg(B)}) \\ &= \lg(A) + \lg(B) \end{aligned}$$

Multiplikation

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

Division

$$\log_b(A/B) = \log_b(A) - \log_b(B)$$

Potenz

$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

Wurzel

$$\log_b(\sqrt[m]{A}) = \log_b(A)/m$$

$$\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) =$$

$$\begin{aligned}\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) &= \log_2\left(\frac{10 \cdot x}{40}\right) \\ &= \log_2\left(\frac{x}{4}\right) \\ &= \log_2\left(\frac{x}{2^2}\right) \\ &= \log_2(x \cdot 2^{-2}) \\ &= \log_2(x) + \log_2(2^{-2}) \\ &= \log_2(x) - 2\end{aligned}$$

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln(A)}$$

$$10^{\lg(A)} = A = e^{\ln(A)}$$

$$\ln(10^{\lg(A)}) = \ln(A)$$

$$\lg(A) \ln(10) = \ln(A)$$

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln(A)}$$

$$10^{\lg(A)} = A = e^{\ln(A)}$$

$$\ln(10^{\lg(A)}) = \ln(A)$$

$$\lg(A) \ln(10) = \ln(A)$$

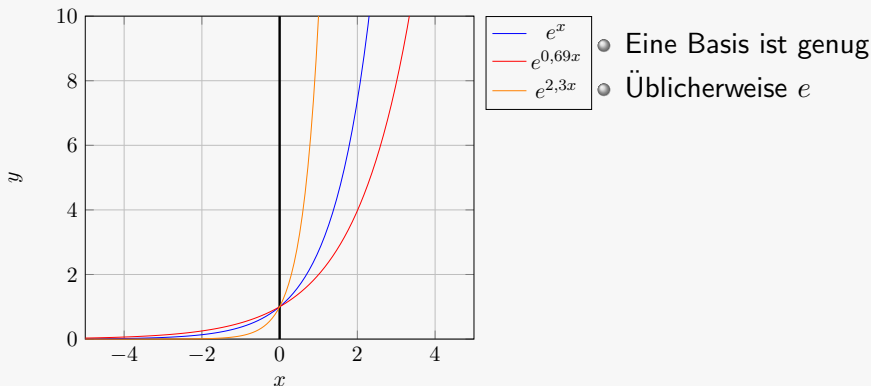
Allgemein

$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

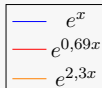
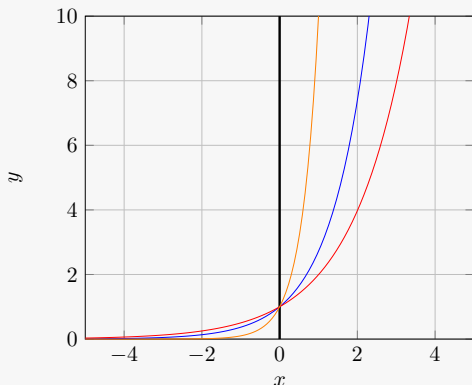
Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_0)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_0)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

Um von einer beliebigen Basis B auf die Basis e zu kommen:

$$B^x = e^{\ln(B) \cdot x}$$

Z.B. für die y -Achse

- Trage jeden Messwert y an der Stelle $\lg(y)$ auf.

$$1 \rightarrow \lg(1) = 0$$

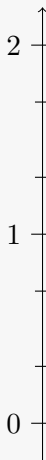
$$10 \rightarrow \lg(10) = 1$$

$$100 \rightarrow \lg(100) = 2$$

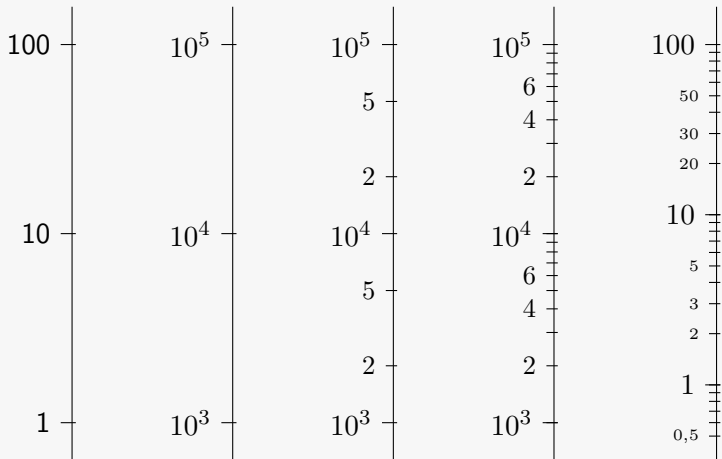
$$2 \rightarrow \lg(2) \simeq 0,3$$

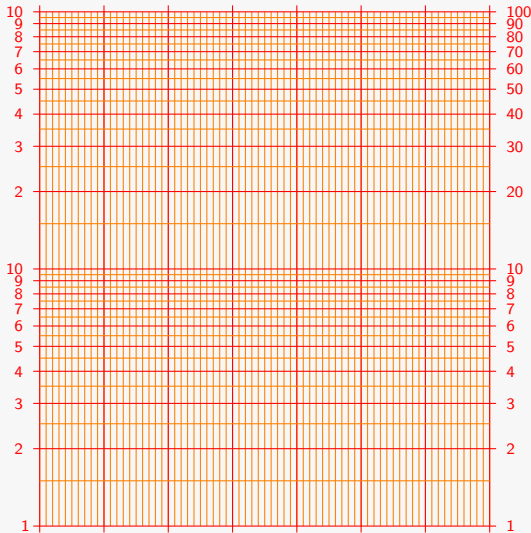
$$5 \rightarrow \lg(5) \simeq 0,7$$

- $\lg(x)$ nur für positive x
- Darstellung nur für positive y -Werte möglich

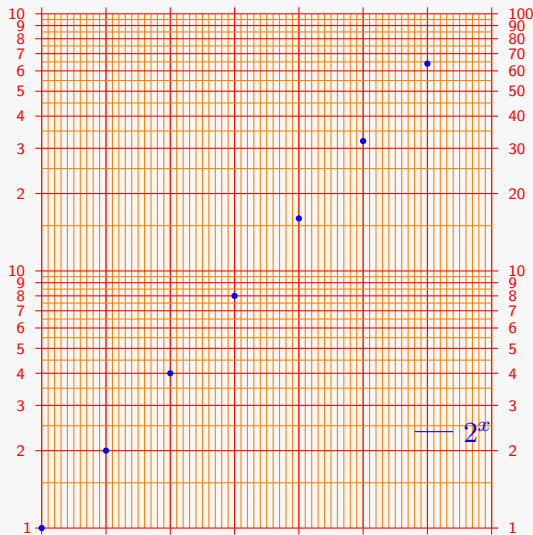


Verschiedene Beschriftungen möglich

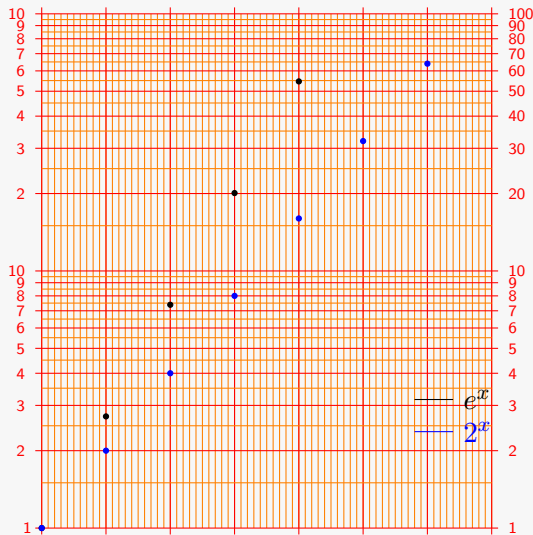




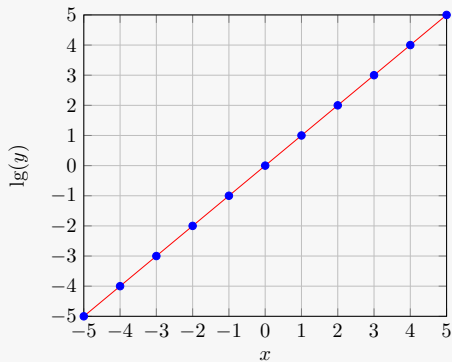
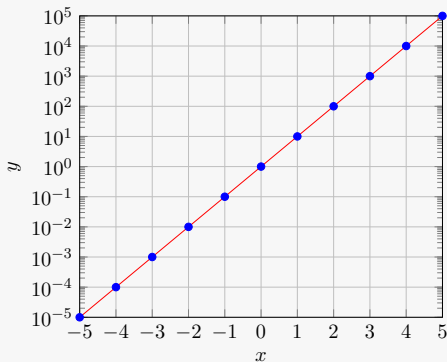
- logarithmische Y -Achse
- Einsatz bei
exponentiellen
Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null
unterschreiten



- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten



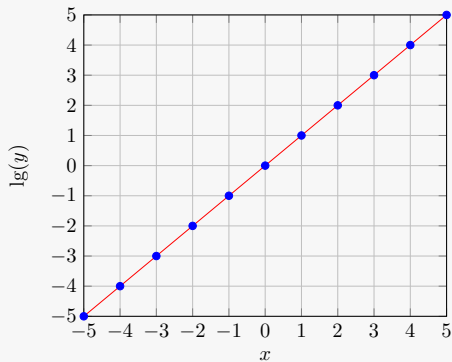
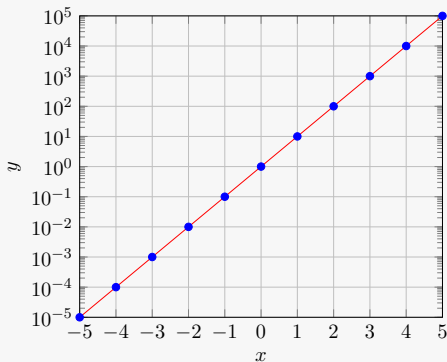
- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten



Beispiel 10^x : logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$

Steigung = c

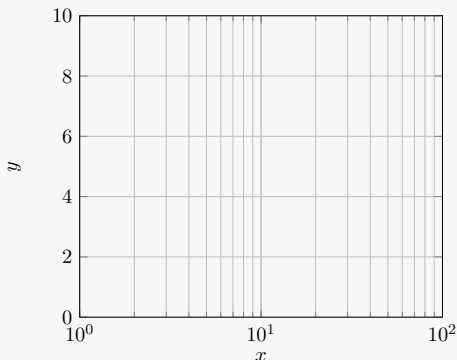


Beispiel 10^x : logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$

$$y = B^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x \cdot \lg(B)$$

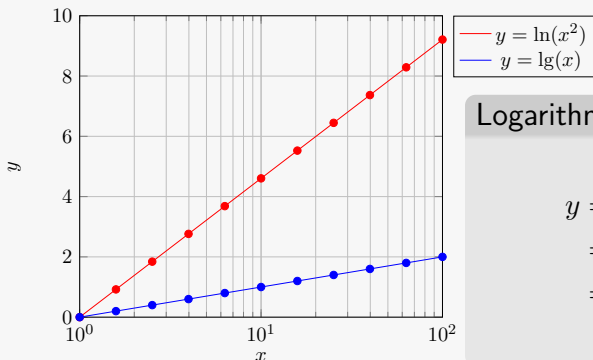
Steigung = $c \cdot \lg(B)$



Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned}y &= \log_b(x^n) \\&= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\&= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)\end{aligned}$$

Steigung: $n \log_b(10)$



Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned} y &= \log_b(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x) \end{aligned}$$

Steigung: $n \log_b(10)$

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

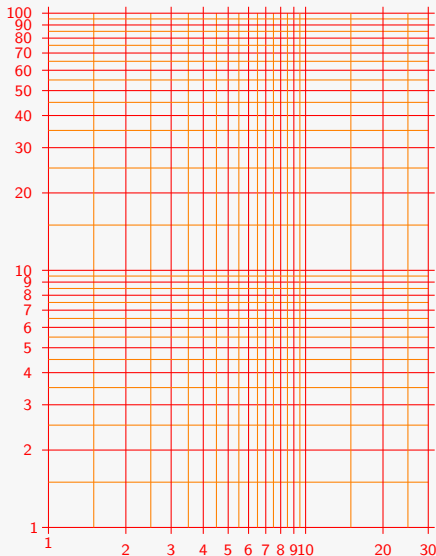
Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es
sind nur positive Werte dargestellt:

$\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

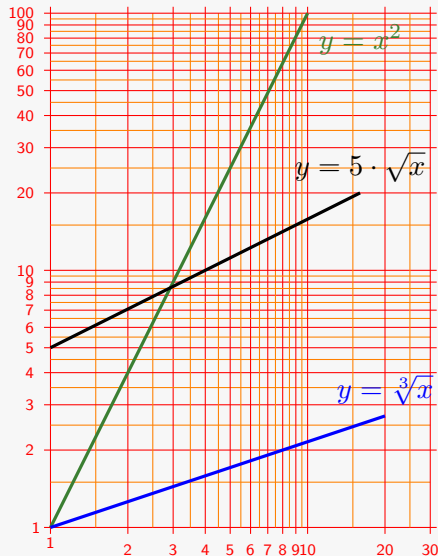
Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

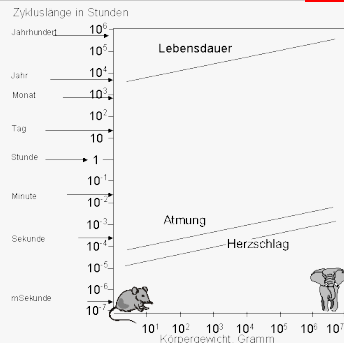
wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es
sind nur positive Werte dargestellt:

$\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



- Messen und Vergleichen von Beziehungen zwischen der Körpergröße von Lebewesen und deren Verhältnis zu verschiedensten biologischen Größen



Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Allometrie>

Klassische Allometrieformel

$$y = a \cdot x^b$$

1 Logarithmen

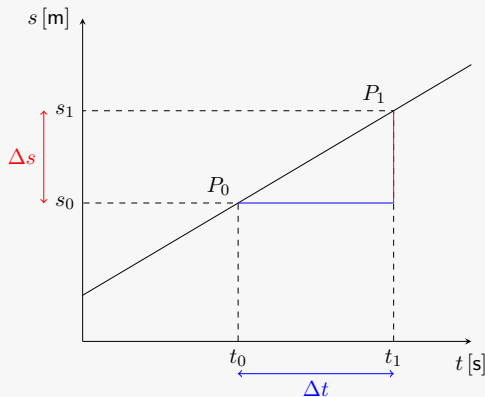
2 Differentiation

Beispiel:

- Auto mit **konstanter Geschwindigkeit** v
- Verhältnis aus zurückgelegtem Weg Δs und dafür benötigter Zeit Δt immer gleich

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

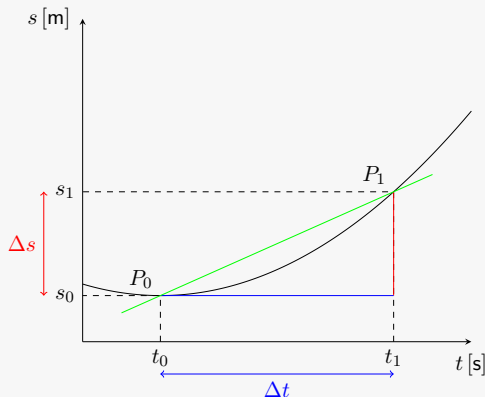
Um die Geschwindigkeit zu messen, reicht es Zeit und Ort an einem Startpunkt P_0 und an einem Stopppunkt P_1 zu bestimmen.



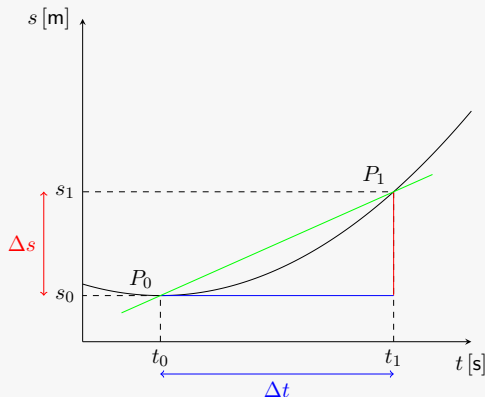
- P_0 : Startpunkt der Messung
 t_0 Startzeit, s_0 Startort
- P_1 : Stopppunkt der Messung
 t_1 Stopzeit, s_1 Stopport
- Geschwindigkeit konstant
 $\Rightarrow v$ ist Steigung der Geraden

Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



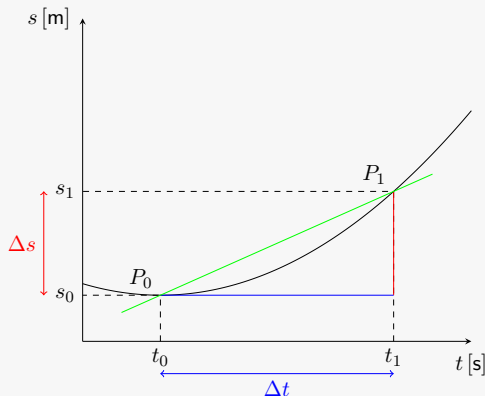
- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken



- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken

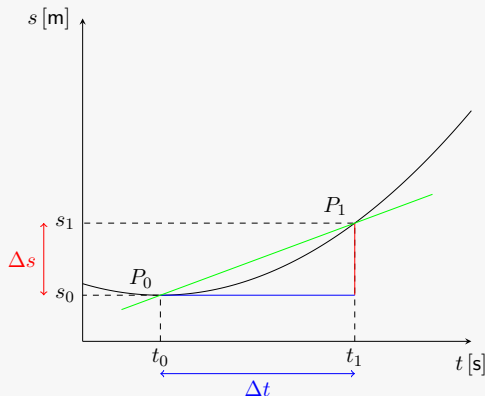
- Δt muss so klein gewählt werden, dass die Geschwindigkeitsänderung während Δt vernachlässigbar klein wird.

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



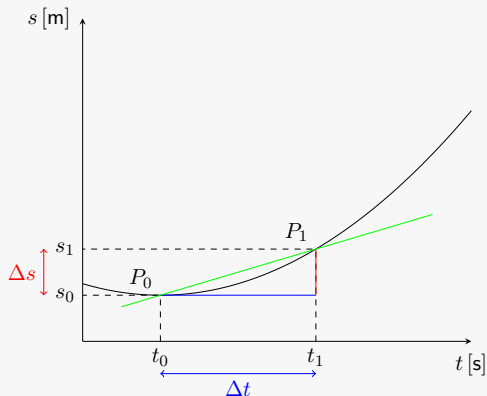
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



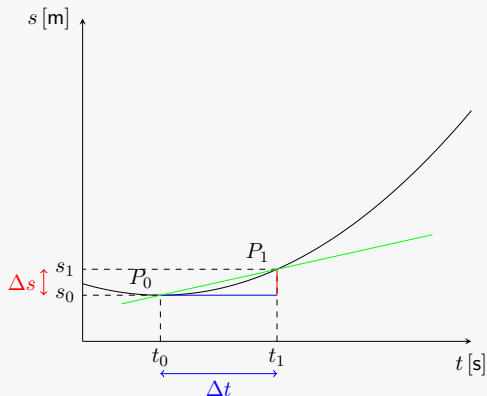
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



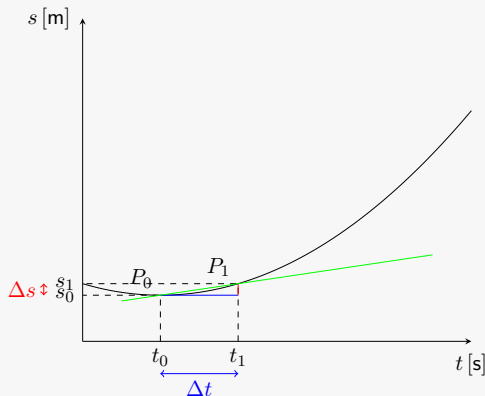
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



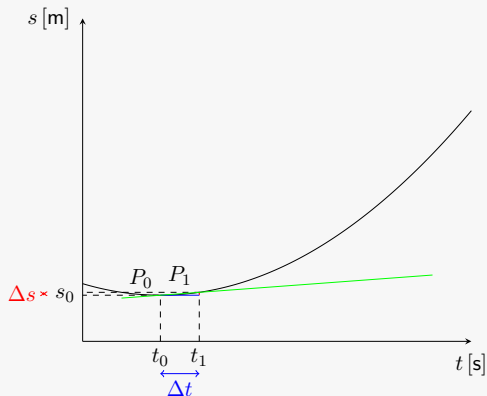
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



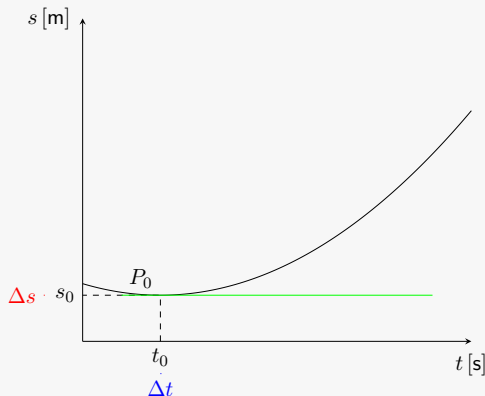
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$
- Tangente an die Kurve bei P_0

Mathematisch kann man Δt „unendlich klein“ werden lassen

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_0}$$

Die Steigung der Kurve im Punkt P ist die Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

- Die **Ableitung** an einem Punkt P der Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt P an.
- Mathematisch definiert durch den **Differentialquotienten** $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$
- Im Differentialquotienten sind die Differenzen infinitesimal klein.

Man schreibt:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$f(x)$	$y' = f'(x)$
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) =$

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{7}{x}$

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) =$

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + e^x$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$
$$\rightarrow f'(x) =$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x)/\cos(x)$$
$$\rightarrow f'(x) =$$

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)))/\cos^2(x) \\ &= 1 + \sin^2(x)/\cos^2(x) \\ &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ = f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u \\ f'(x) =$$

$$\begin{aligned} y = f(x) = f(u(x)) &\rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u) \cdot u'(x) \end{aligned}$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) = e^{x^2} &\rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u \\ f'(x) &= 2xe^{x^2} \end{aligned}$$

① Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

② Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

③ Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

④ Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v(x)^2$$

⑤ Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) = 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3/x^2$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) = 3/(5 \cdot \sqrt[5]{x^2})$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) = (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x + 1) \rightarrow f'(x) = (1 + 1/x - \ln(x))/(x + 1)^2$