Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 2: Noch mehr Funktionen

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

25. Oktober 2017

Inhalt

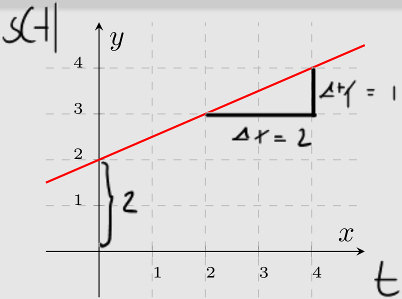
Übersicht

Lineare Funktionen

$$f(x) = y = a \cdot x + b$$

Steigung: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2}$

Auch andere Variablen als x möglich



$$f(x) = \frac{1}{2} x + 2$$

Potenzfunktionen

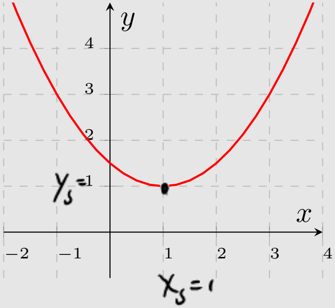
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Quadratische Gleichung ($n = 2$)

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Scheitelpunktsform

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$



$$a(x^2 - 2x x_s + x_s^2) + y^s$$

Übersicht

Nullstelle: $f(x) = y = 0$

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad / : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

$$p = \frac{b}{a} \qquad q = \frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \quad x^2 + px + q = 0$$

p-q-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Nullstellen einer Quadratischen Gleichung

Nullstelle: $f(x) = y = 0$

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Normierte Form: Teilen durch a

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Mit $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Lösung mit p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel: Kanone auf Hügel

Gegeben

- Höhe des Hügels $h_0 = 200\,\mathrm{m}$
- Startgeschwindigkeit in vertikaler Richtung $v_0 = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{mit } g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

Wie lange fliegt die Kugel?

$$h(T) = 0 = h_0 + v_0 \cdot T - g\,\frac{T^2}{2} \quad \Big/ :-\frac{g}{2} \quad \hat{=} \quad \cdot -\frac{2}{g}$$

$$0 = \underbrace{-\frac{2h_0}{g}}_{q} + \underbrace{\frac{-2v_0}{g}}_{p}\,T + T^2$$

$$T_{1/2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}} = \underbrace{\frac{200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}_{\sim 20\,\mathrm{s}} \pm \sqrt{400\,\mathrm{s}^2 + \underbrace{\frac{400\,\mathrm{m}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}_{40\,\mathrm{s}^2}} = 20\,\mathrm{s} \pm 21.4\,\mathrm{s}$$

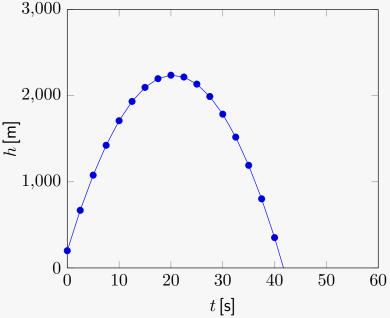
Beispiel: Kanone auf Hügel

Gegeben

- Höhe des Hügels $h_0 = 200\,\mathrm{m}$
- Startgeschwindigkeit in vertikaler Richtung $v_0 = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{mit } g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

Wie lange fliegt die Kugel?



$$h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot \frac{v_0}{g} \cdot t - 2 \cdot \frac{h_0}{g} = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2 \cdot \frac{h_0}{g}}$$

$$t_{1/2} = (20{,}4\,\mathrm{s} \pm 21{,}4\,\mathrm{s})$$

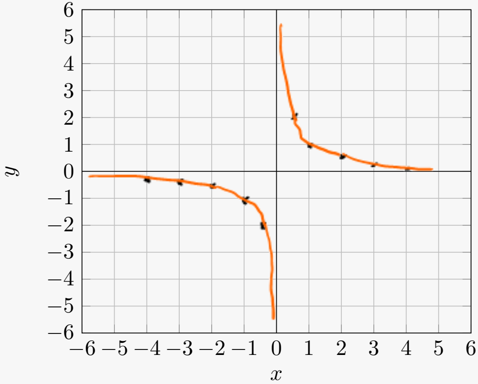
Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$ $= \frac{1}{x}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	$\frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} = -0.25$
-3	$-0.33\ldots$
-2	-0.5
-1	-1
0	
1	1
2	0.5
3	$0.33\ldots$
4	0.25

$0.5 \rightarrow 2$



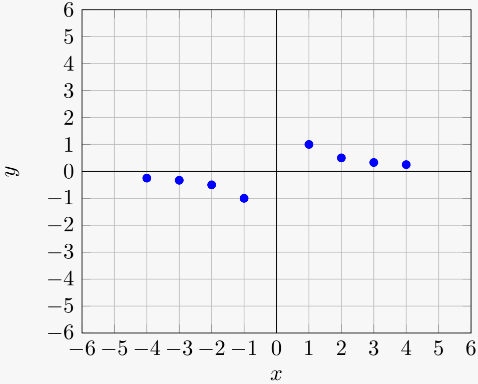
Funktionen mit negativen Potenzen

Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25

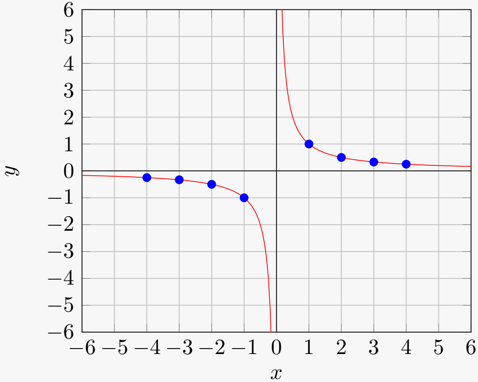


Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25

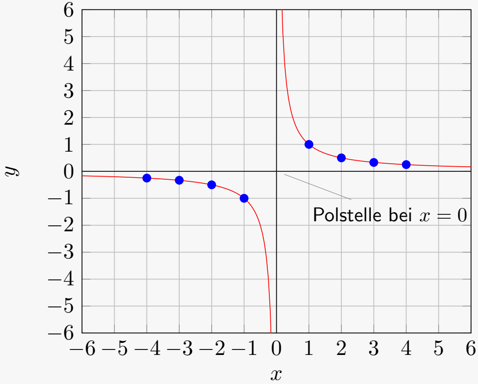


Negativen Potenz → Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25



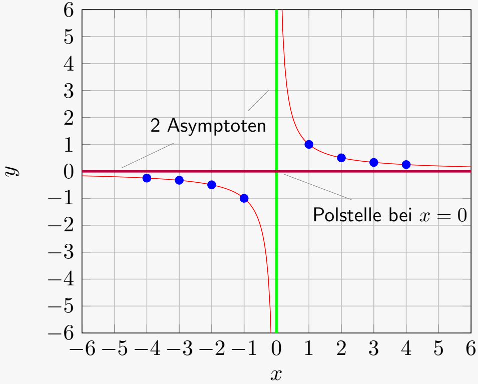
Funktionen mit negativen Potenzen

Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

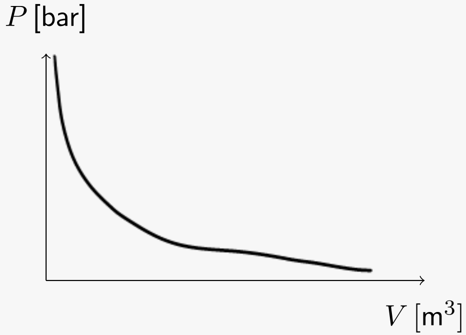
x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25



Beispiel Hyperbel

Gesetz von Boyle-Mariotte: Gilt für abgeschlossene Gasmenge bei konstanter Temperatur T mit Volumen V und Druck P

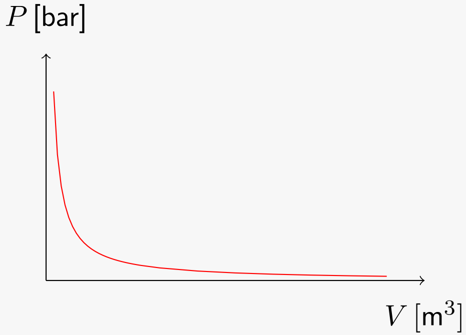
$$P \propto V^{-1} \text{ oder } P = c/V \text{ mit Konstante } c$$



Beispiel Hyperbel

Gesetz von Boyle-Mariotte: Gilt für abgeschlossene Gasmenge bei konstanter Temperatur T mit Volumen V und Druck P

$$P \propto V^{-1} \text{ oder } P = c/V \text{ mit Konstante } c$$



Gegeben: $y = f(x)$
Gesucht: Funktion, die zu jedem y-Wert den zugehörigen x-Wert liefert
Definition: Diese Funktion heißt Umkehrfunktion f^{-1}: $\boxed{x = f^{-1}(y)}$

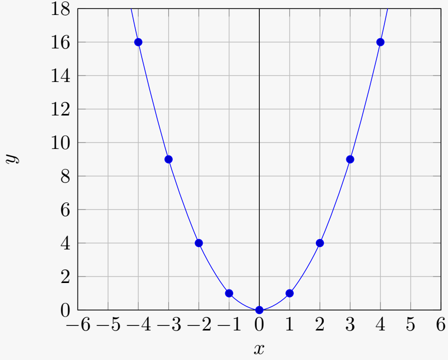
x	$f(x) = y = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

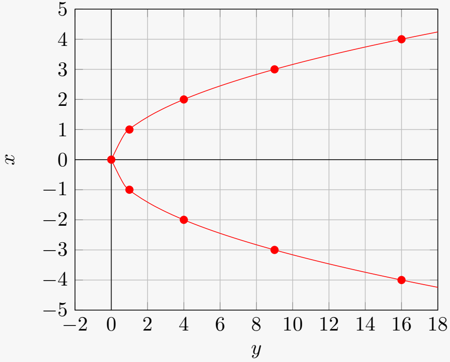
y	$x = f^{-1}(y)$
16	-4
9	-3
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

Graphische Folgen

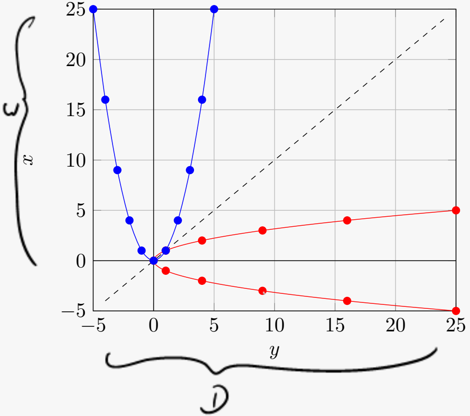
$f(x) = x^2$

$f^{-1}(y) =$



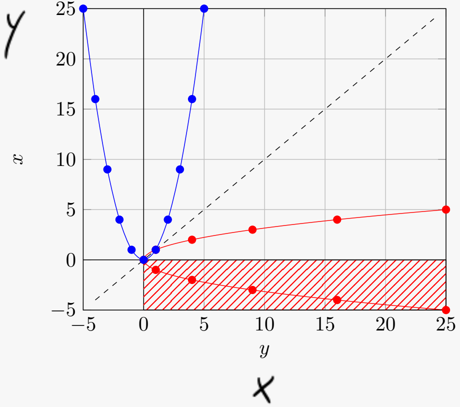


Normalparabel und Umkehrung



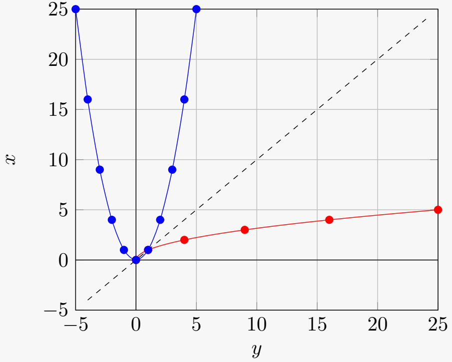
Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

Normalparabel und Umkehrung



Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

Funktion muss jedem x-Wert **eindeutig** einen Funktionswert y zuordnen



Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

Funktion muss jedem x-Wert **eindeutig** einen Funktionswert y zuordnen

Wurzeln

$\sqrt{x} \hat{=} \sqrt[2]{x}$ $\quad \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

Wurzel

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Umkehrfunktion zu einfachen Potenzen: $f(x) = x^m$

$$y = x^m \rightarrow x = \sqrt[m]{y}$$

Rechenregeln wie bei Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{1}{m} \cdot n} = x^{\frac{n}{m}} = x^{n \frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

Wurzel

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Umkehrfunktion zu einfachen Potenzen: $f(x) = x^m$

Rechenregeln wie bei Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

Beispiele: Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 5^2 = 25$$

$$\left(3\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 9 \cdot 2 = 18$$

$$a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} = a^2$$

Beispiele: Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$

$$\left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c \qquad /-c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

$$y - c = a\,x^{\frac{n}{m}} \qquad /:a$$

$$\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}} \qquad /\,(\;)^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}} = x^{1}$$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $\quad y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $\quad y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\quad \frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
3. Potenzieren mit m: $\left(\frac{y-c}{a}\right)^{m} = x^{n}$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
3. Potenzieren mit m: $\left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$
4. Ziehen der $n$ten Wurzel: $\sqrt[n]{\left(\frac{y-c}{a}\right)^m} = \left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $\quad y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\quad \frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
3. Potenzieren mit m: $\quad \left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$
4. Ziehen der $n$ten Wurzel: $\quad \sqrt[n]{\left(\frac{y-c}{a}\right)^m} = \left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$

Beispiel: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$s(t) = 0{,}5 \cdot a \cdot t^2 \qquad | \cdot 2$$

Nach welcher Zeit t wird eine bestimmte Strecke s zurückgelegt?

t(s)

$$2s = at^2 \qquad | :a$$

$$\frac{2s}{a} = t^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{\frac{2s}{a}} = t(s)$$

Beispiel: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$s(t) = 0{,}5 \cdot a \cdot t^2$$

Multiplikation mit 2:

$$2 \cdot s = a \cdot t^2$$

Division mit a:

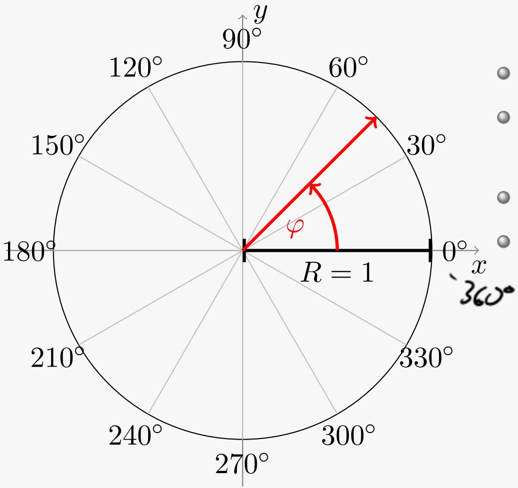
$$2 \cdot \frac{s}{a} = t^2$$

Ziehen der Quadratwurzel:

$$t(s) = \sqrt{2 \cdot \frac{s}{a}}$$

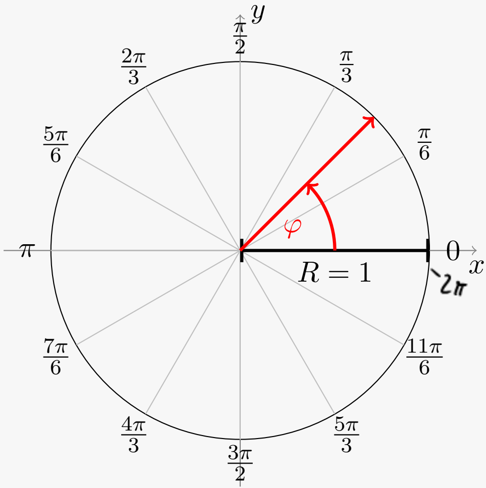
Übersicht

Einheitskreis



- Kreis mit Radius $R = 1$
- Winkel gegen den Uhrzeigersinn definiert (Rechtsdrehung)
- Eine Umdrehung: $360°$
- Kreisumfang: $U = 2\pi R$

Einheitskreis



- Kreis mit Radius $R = 1$
- Winkel gegen den Uhrzeigersinn definiert (Rechtsdrehung)
- Eine Umdrehung: $360°$
- Kreisumfang: $U = 2\pi R$
- $\rightarrow 360° = 2\pi\,\text{rad} = 2\pi$
- rad=Radiant=Bogenmaß
- Einheit „rad" wird weggelassen

Umrechnung Grad $\leftrightarrow$ Bogenmaß

- α: Winkel in Grad
- φ: Winkel im Bogenmaß

Es gilt:

$$360° \mathrel{\widehat{=}} 2\pi$$

Für den gleichen Winkel $\alpha = \varphi$ folgt also:

$$\alpha = \varphi$$

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot 360° = \frac{\varphi}{\pi} \cdot 180° \qquad \varphi = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$$

Umrechnung Grad $\leftrightarrow$ Bogenmaß

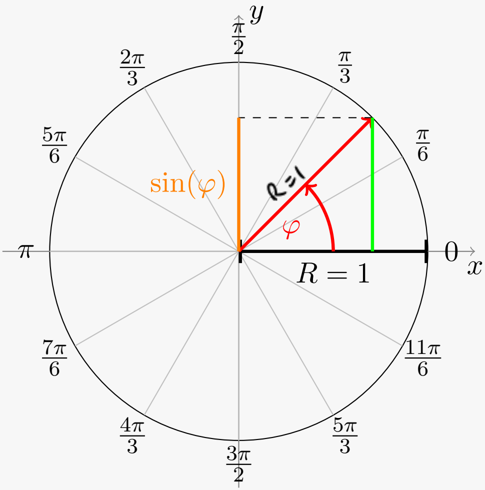
- α: Winkel in Grad
- φ: Winkel im Bogenmaß

Es gilt:

$$360^\circ \mathrel{\widehat{=}} 2\pi$$

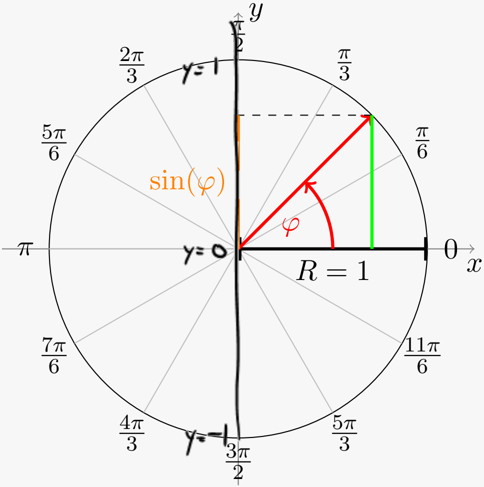
Für den gleichen Winkel $\alpha = \varphi$ folgt also:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \varphi \\
\frac{\alpha}{360^\circ} &= \frac{\varphi}{2\pi} \\
\alpha &= \frac{\varphi}{2\pi} 360^\circ = \varphi \frac{180^\circ}{\pi} \\
\frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi = \alpha \frac{\pi}{180^\circ} &= \varphi
\end{aligned}$$



- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- Gegenkathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

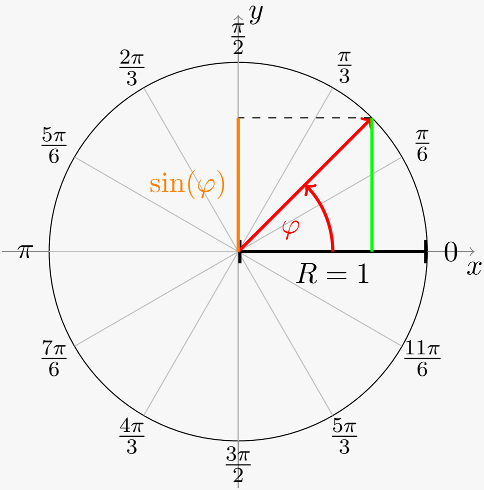
$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- Gegenkathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(0) = 0$$
$$\sin(\pi/2) = 1$$
$$\sin(\pi) = 0$$
$$\sin(3\pi/2) = -1$$

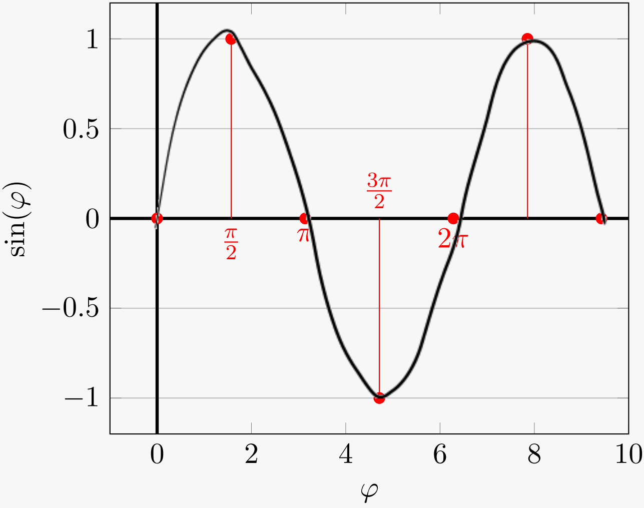


- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- Gegenkathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

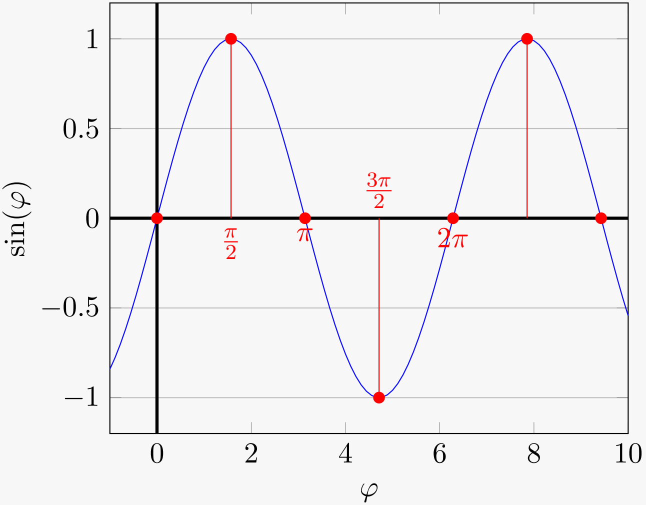
$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(0) = 0$$
$$\sin(\pi/2) = 1$$
$$\sin(\pi) = 0$$
$$\sin(3\pi/2) = -1$$

Graphen von Sinus



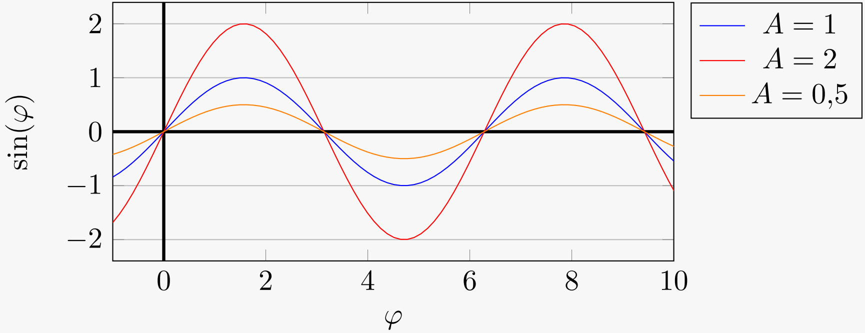
Graphen von Sinus



Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

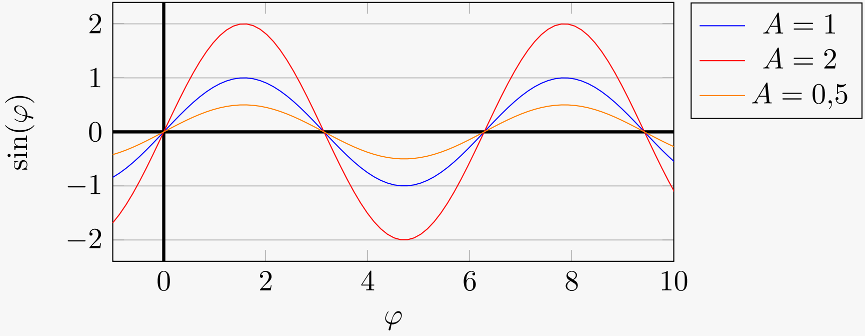
$\varphi_0 = 0$ $c = 1$ $\rightarrow$ $A \cdot \sin(\varphi)$



Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Amplitude: Höhe der Kurve
Entspricht Radius bzw. Hypotenuse

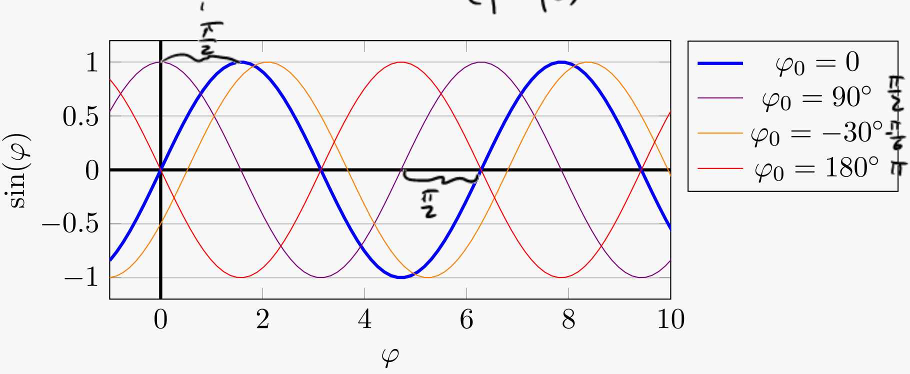


Sinus-Funktion mit Parametern - Phase

Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

$A = 1 \quad c = 1 \qquad \sin(\varphi + \varphi_0)$

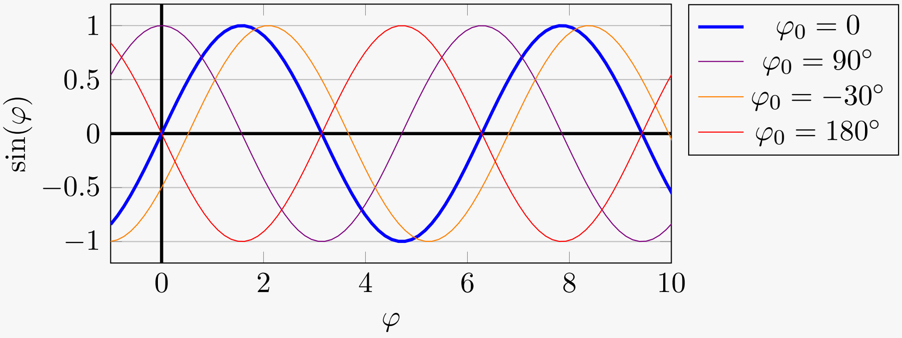


Sinus-Funktion mit Parametern - Phase

Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Phase: Verschiebung entlang x-Achse

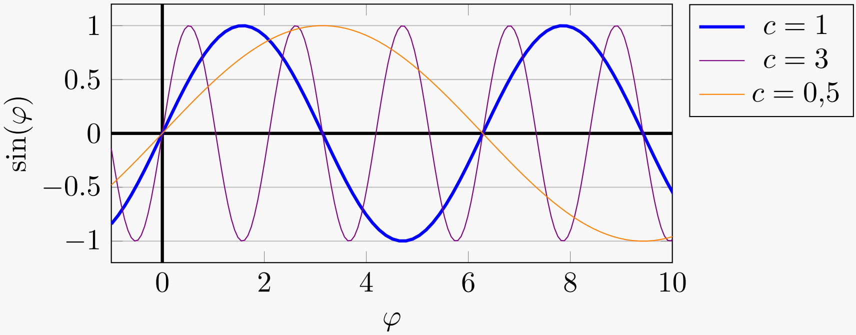


Sinus-Funktion mit Parametern - Periode

Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

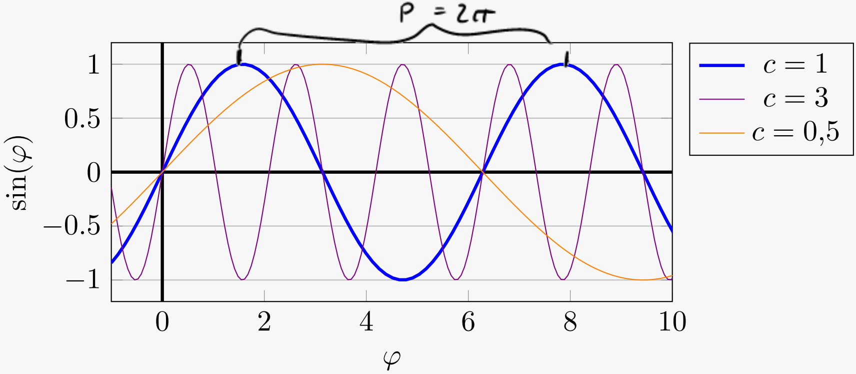
$A = 1 \quad \varphi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \sin(c \cdot \varphi)$



Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Periode P: Abstand zwischen zwei gleichen Kurvenpunkten, z.B. Maxima



Periode

- Normaler Sinus hat die Periode $P = 2\pi$
- Allgemeine Sinus-Funktion mit Periode P:

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\underbrace{\frac{2\pi}{P}}_{c}\varphi + \varphi_0\right)$$

- Also $c = \frac{2\pi}{P}$ bzw.:

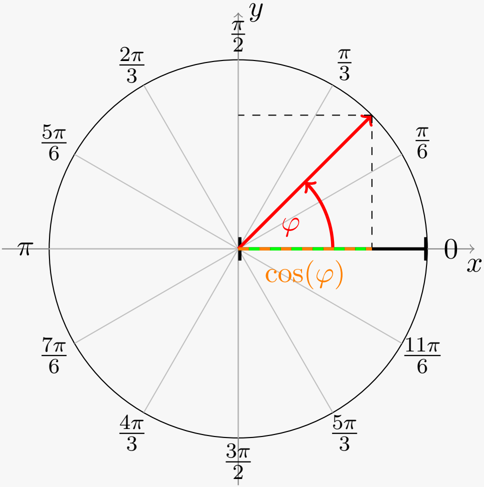
$$\boxed{P = \frac{2\pi}{c}}$$

$c = 1 \rightarrow P = 2\pi$

$c = 3 \rightarrow P = \frac{2\pi}{3}$

$c \cdot P = 2\pi$

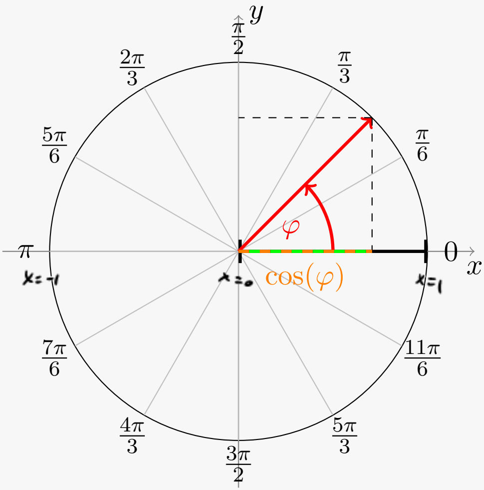
$\varphi = P \Rightarrow$ einmal rum



- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- Ankathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Cosinus-Funktion

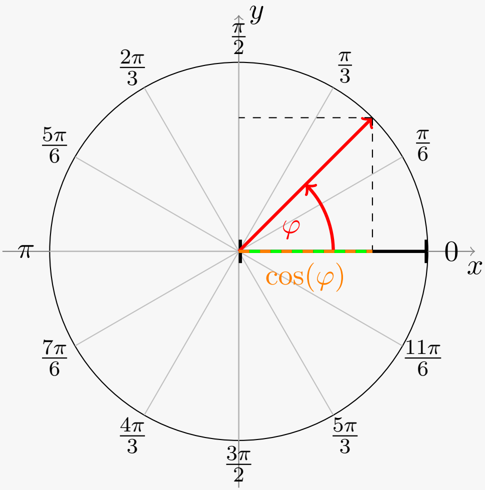


- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- Ankathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(0) = 1$$
$$\cos(\pi/2) = 0$$
$$\cos(\pi) = -1$$
$$\cos(3\pi/2) = 0$$

Cosinus-Funktion

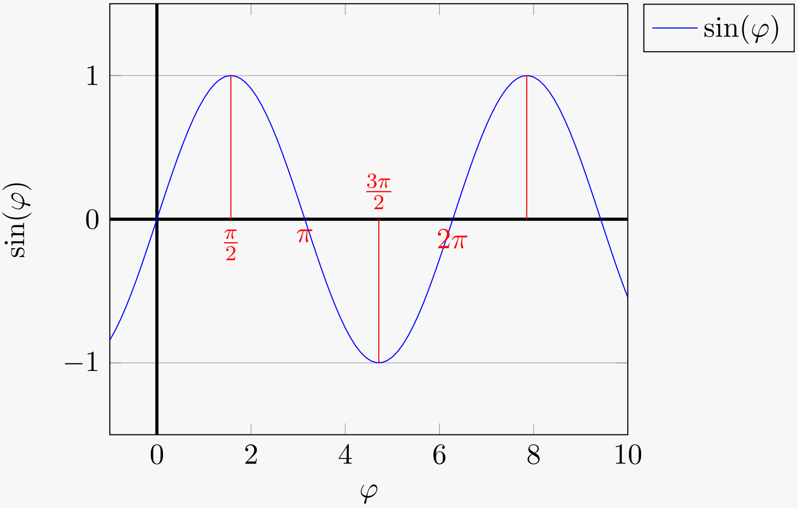


- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- Ankathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

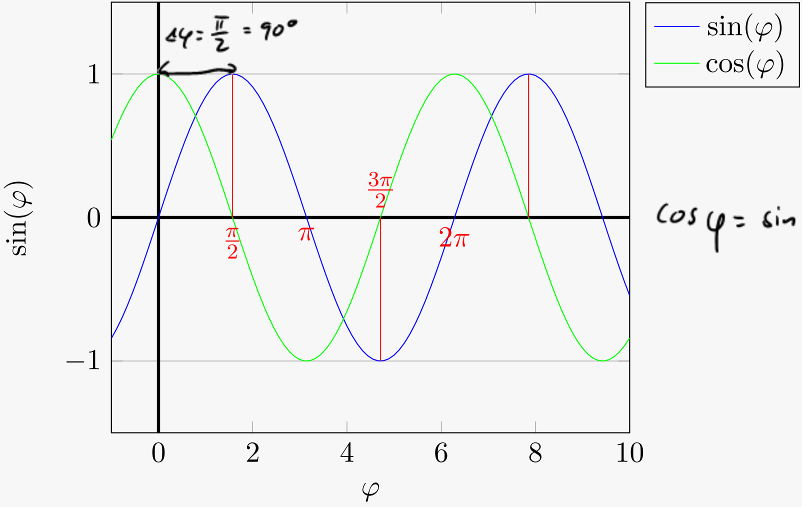
$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1 \\ \cos(\pi/2) &= 0 \\ \cos(\pi) &= -1 \\ \cos(3\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

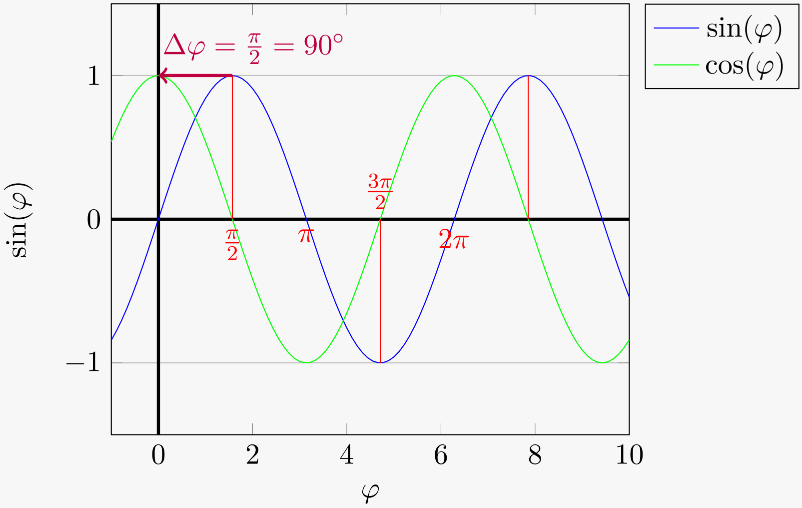
Graphen von Sinus und Cosinus



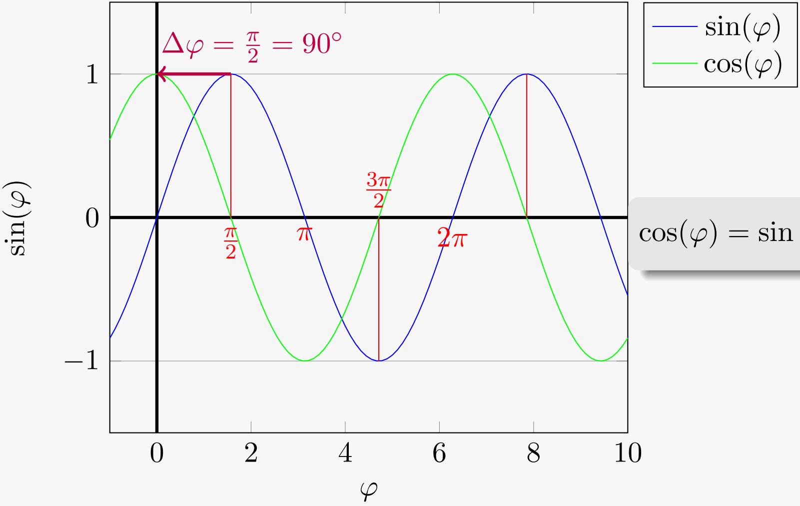
Graphen von Sinus und Cosinus



$$\cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

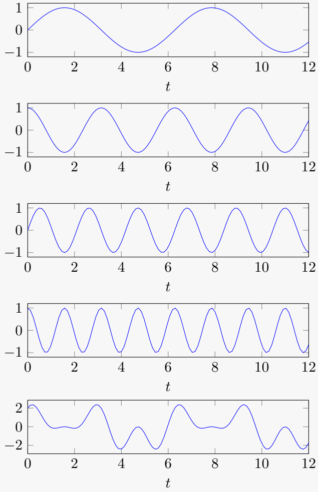

$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$
$\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi)$
1
0
−1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
0
2
4
6
8
10
φ
$\sin(\varphi)$

Graphen von Sinus und Cosinus



$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Überlagerung von harmonischen Schwingungen



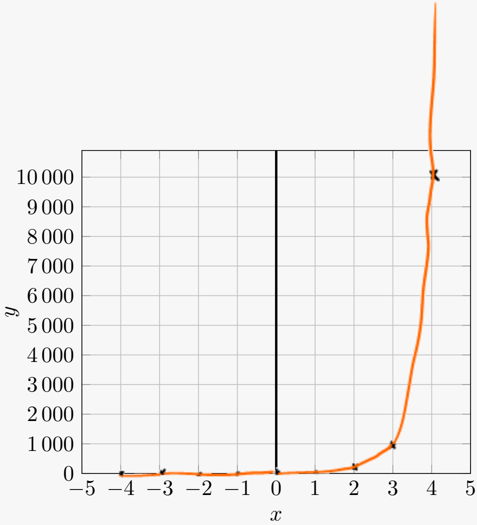
Übersicht

Exponentialfunktionen

- Variabler Exponent $f(x) = y = B^x$
- B nennt man Basis

Beispiel: $B = 10$

x	$f(x) = 10^x$
-4	$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$
-3	0.001
-2	0.01
-1	0.1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000

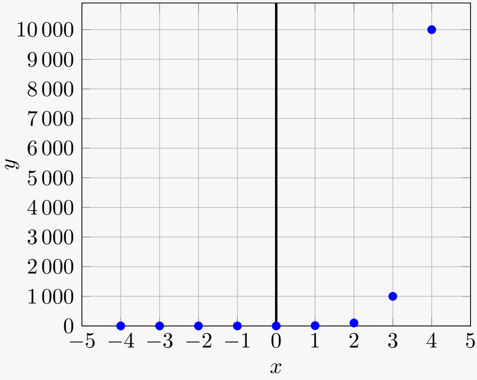


Exponentialfunktionen

- Variabler Exponent $f(x) = y = B^x$
- B nennt man Basis

Beispiel: $B = 10$

x	$f(x) = 10^x$
-4	0,0001
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000

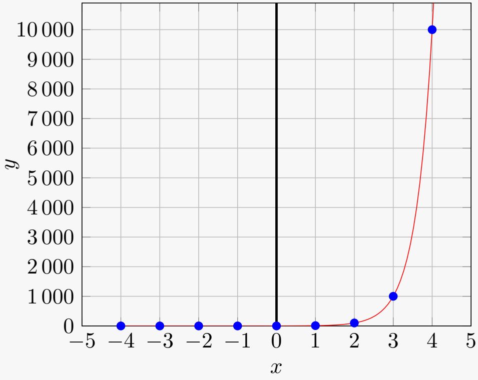


Exponentialfunktionen

- Variabler Exponent $f(x) = y = B^x$
- B nennt man Basis
- Extrem schnelles Wachstum! **Exponentielles Wachstum**

Beispiel: $B = 10$

x	$f(x) = 10^x$
-4	0,0001
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000



Größenordnungen

Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
10^{24}	Yotta	Y	10^{-1}	Dezi	d
10^{21}	Zetta	Z	10^{-2}	Zenti	c
10^{18}	Exa	E	10^{-3}	Milli	m
10^{15}	Peta	P	10^{-6}	Mikro	µ
10^{12}	Tera	T	10^{-9}	Nano	n
10^{9}	Giga	G	10^{-12}	Piko	p
10^{6}	Mega	M	10^{-15}	Femto	f
10^{3}	Kilo	k	10^{-18}	Atto	a
10^{2}	Hekto	h	10^{-21}	Zepto	z
10^{1}	Deka	da	10^{-24}	Yocto	y

Beispiele Größenordnungen – Längen

- Weltall 10^{26} m
- Galaxis 10^{20} m
- Sonnensystem 10^{14} m
- Erde 10^{7} m
- Mensch 10^{0} m 1.8×10^{0} m
- DNA 10^{-7} m
- Atom 10^{-10} m
- Atomkern 10^{-14} m
- Proton 10^{-15} m

Astronomie, Astrophysik

Biologie, Biophysik, Medizin

Chemie

Atom- und Kernphysik

http://htwins.net/scale2/index.html
http://www.youtube.com/watch?v=0fKBhvDjuy0

Beispiele Größenordnungen – Zeiten

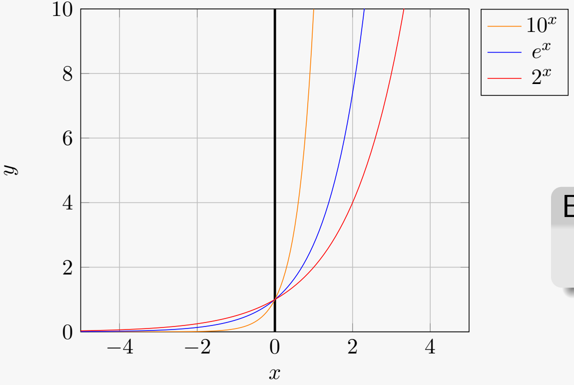
Lebensdauer des Higgs-Bosons	10^{-22} s
Schwingungsperiode von sichtbarem Licht	10^{-15} s
Laufzeit des Lichts durch das Auge (3 cm)	10^{-10} s
Taktzeit eines Pentiumprozessors	10^{-9} s
Blitz beim Fotoapparat	10^{-5} s
Nervenleitung (1 m)	10^{-2} s
Kürzeste Reaktionszeit	$2 \cdot 10^{-1}$ s
Konzentrationszeit	$5 \cdot 10^{3}$ s
Studiendauer	$1{,}6 \cdot 10^{8}$ s
Lebensdauer eines Menschen	$3 \cdot 10^{9}$ s
Unsere Milchstraße	$3 \cdot 10^{17}$ s
Alter des Universums (15 Mrd Jahre)	$5 \cdot 10^{17}$ s
Mittlere Lebensdauer eines Protons	$> 5 \cdot 10^{32}$ s

1 Jahr $\simeq \pi \cdot 10^7$ s

Beispiele Größenordnungen – Gewicht

Elektron	10^{-30} kg
Proton	10^{-27} kg
Aminosäure	10^{-25} kg
Hämoglobin	10^{-22} kg
Virus	10^{-20} kg
Salzkorn	10^{-8} kg
Menschliches Haar	10^{-6} kg
DIN A6 Blatt	10^{-3} kg
Mensch	10^{2} kg
Großer LKW	10^{4} kg
Pyramide	10^{10} kg
Sonne	10^{24} kg

Exponentialfunktion mit verschiedener Basis



- x-Achse ist Asymptote
- Schneidet immer bei $y = 1$

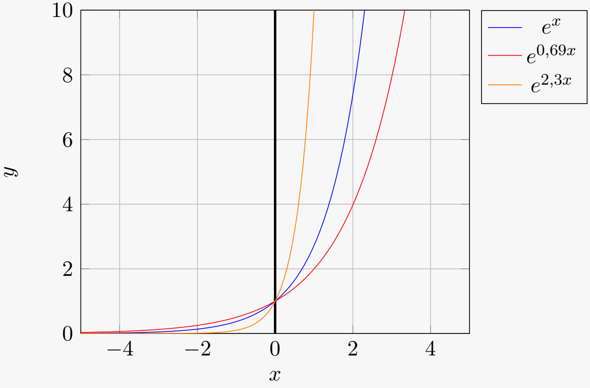
Eulersche Zahl

$$e \sim 2{,}718$$

Exponentialfunktion allgemein

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot \underbrace{B^{b(x-x_0)}}_{\left(B^b\right)^{(x-x_0)}} + c$$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e
- $e^x = \exp(x)$

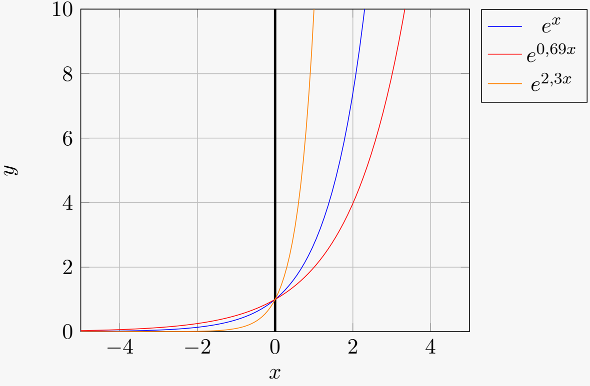
$e^{2.3x} = \exp(2.3x)$

Exponentialfunktion allgemein

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$

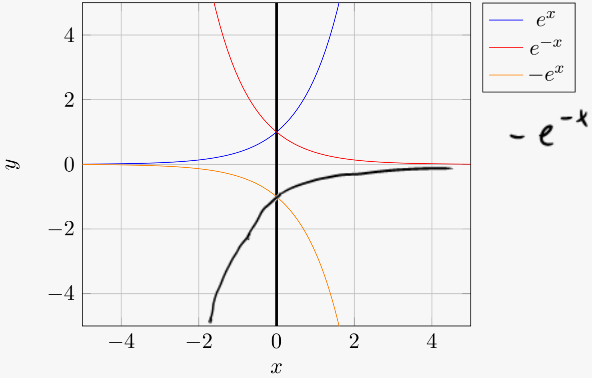


- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e
- $e^x = \exp(x)$

Abfallende Exponentialfunktion

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

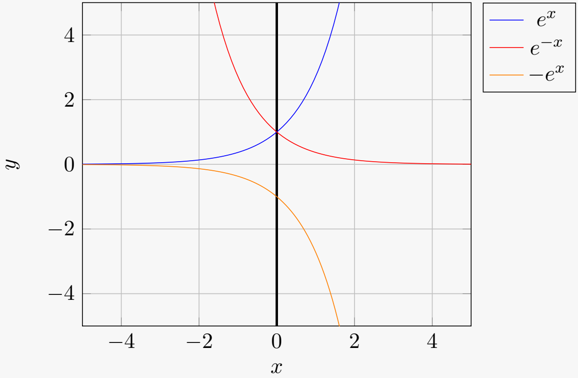


Abfallende Exponentialfunktion

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Negative b: **exponentiell fallend** $(e^{-x} = 1/e^x)$



Übersicht Exponentialfunktionen

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

- Faktor b im Exponenten $\rightarrow$ wirkt wie andere Basis
- Negative b $\rightarrow$ **exponentiell fallend**
- Verschiebung entlang der x-Achse :x_0
- Verschiebung entlang der y-Achse :c

$c = 0$

$$a B^{b(x-x_0)} = a B^{bx - bx_0} = a B^{bx} \underbrace{B^{-bx_0}}_{\text{Zahl}} = A \cdot B^{bx}$$

Beispiele: Exponentielles Wachstum

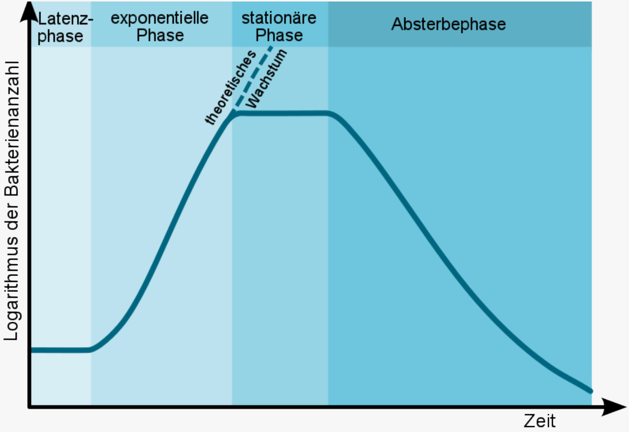
- Vermehrung von Bakterien
- Findet durch Zellteilung statt
- Im Mittel feste Periode

Beispiel: Generationszeit von $T_G = 10$ Minuten

Teilungen	Bakterien	Zeit
0	1	0
1	2	10
2	4	20
3	8	30
4	16	40
⋮	⋮	⋮
12	8096	120

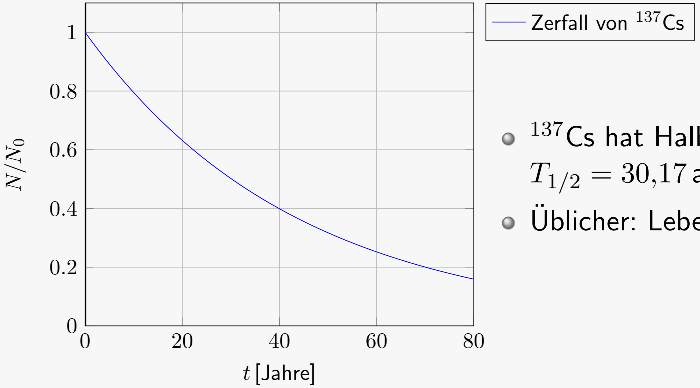
$$B(t) = B_0 \cdot 2^{t/T_G}$$

Ideale Wachstumskurve einer statischen Bakterienkultur



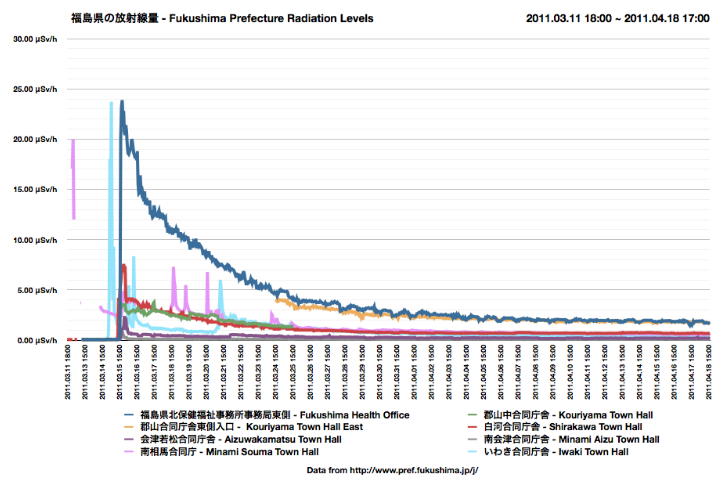
Quelle http://de.wikipedia.org/wiki/Bakterielles_Wachstum

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



- ^{137}Cs hat Halbwertszeit $T_{1/2} = 30{,}17\,\text{a}$
- Üblicher: Lebensdauer $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$

Radioaktiver Zerfall – Strahlenbelastung

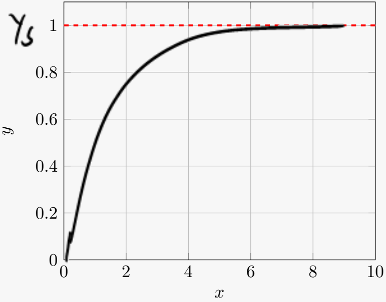


Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fukushima_I_radiation,_Fukushima_Prefecture_2,_March-April_2011.png

Sättigungsfunktion

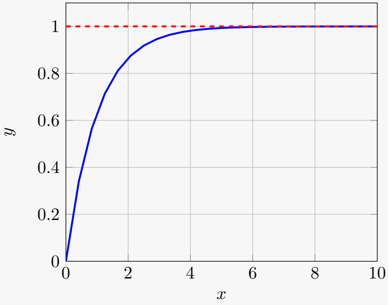
- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasand ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle
- Beispiel: Laden einen Kondensators, ...

$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasand ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle
- Beispiel: Laden einen Kondensators, ...

$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



Beispiel: Laden eines Kondensators

$$Q(t) = Q_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$