Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 1: Grundlagen und Funktionen

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

18. Oktober 201~~6~~7

Aufteilung der Vorlesung

Propädeutikum &
Physik Teil 1 (18. Okt. - Mitte Dez.) Daniel Bick daniel.bick@desy.de
Physik Teil 2 Georg Steinbrück georg.steinbrueck@desy.de
Einteilung fürs Praktikum Freitag (20.10.) während der Vorlesung

Folien zum Propädeutikum:

- Nach jeder Vorlesung über Stine abrufbar.
- http://www.desy.de/~daniel/vorlesung/ws2017

Klausuren zum Praktikum (multiple choice):

1. Mathematische Einführung (20 Fragen) 25.11.2017
2. Physik (30 Fragen) $\Leftarrow$ wichtiger! 27.01.2017

Skript fürs Propädeutikum, Altklausuren, Übungen mit Lösungen:
http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm/Zahnmedizin.html

Literaturhinweise

- Haas: „Physik für Pharmazeuten und Mediziner“, Wiss. Verlagsges., 7. Auflage (2012), 49,80 €
- Harten: „Physik für Mediziner“, Springer-Lehrbuch, 14. Auflage (2014), 29,99 €
  Online lesbar im Universitätsnetz oder mit Stabi Ausweis
- Hellenthal: „Physik für Mediziner und Biologen“, Wiss. Verlagsges., 8. Auflage (2006), 29,80 €
- Trautwein, Kreibig, Hüttermann: „Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten“, de Gruyter-V., 7. Auflage (2008), 29,95 €
- Tritthart: „Medizinische Physik und Biophysik“, Schattauer-V., 2. Auflage (2011), 39,95 €

Skript von Dr. Salehi:
http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm/Zahnmedizin.html

Mathematische Hilfsmittel der Physik

- Funktionsbegriff
- Proportionalität und linearer Zusammenhang
- Funktionsgleichung einer Geraden, Graph
- Parabel
- Winkelfunktionen
- Exponentialfunktionen
- Logarithmusfunktionen

Physikalische Grundlagen

- Physikalische Begriffe und Größen
- Basisgrößen, Basiseinheiten, SI-System
- Abgeleitete Größen und Einheiten
- Vorsilben
- Messungen, Darstellung von Messergebnissen
- Messfehler
- Fehlerrechnung
- Vektoren
- Differentialquotient

Inhalt

Übersicht

1. Einleitung

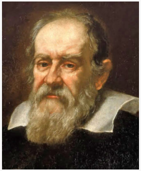
2. Mathematische Grundlagen

3. Lineare Funktionen

4. Potenzfunktionen

„Keine menschliche Forschung kann man **wahre Wissenschaft** heißen, wenn sie ihren Weg nicht durch die **mathematische Darlegung und Beweisführung** hin nimmt. Sagst du, die Wissenschaften, die vom Anfang bis zum Ende im Geist bleiben, hätten Wahrheit, so wird dies nicht zugestanden, sondern verneint aus vielen Gründen, und vornehmlich deshalb, weil bei solchem reingeistigen Abhandeln die Erfahrung (oder das **Experiment**) nicht vorkommt; ohne dies aber gibt sich kein Ding mit Sicherheit zu erkennen."

Leonardo Da Vinci, 1452-1519

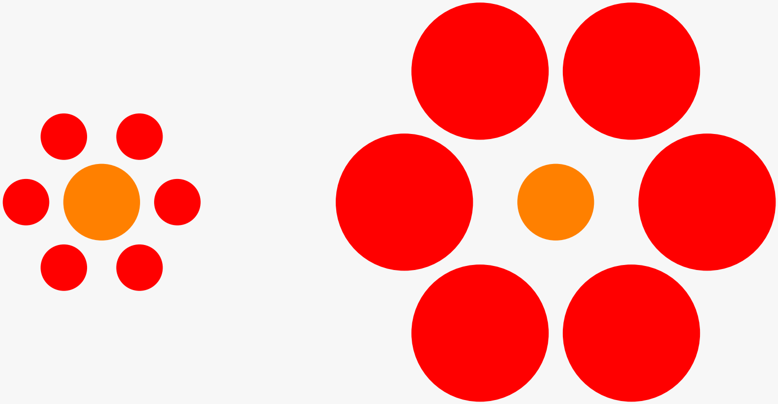


„**Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben**"

Galileo Galilei, 1564-1642

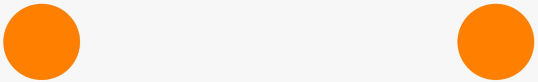
Titschenersche Täuschung

Welcher der beiden orangenen Kreise ist größer?



Titschenersche Täuschung

Welcher der beiden orangenen Kreise ist größer?



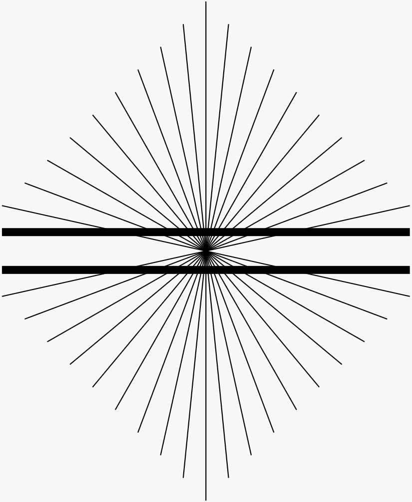
Beide sind gleich groß! Die Größe eines Objekts wird abhängig von seiner Umgebung wahrgenommen.

Heringsche Täuschung

- Die beiden Linien sind parallel

Heringsche Täuschung

- Die beiden Linien sind parallel
- Durch das Strahlenbündel erscheinen sie gekrümmt

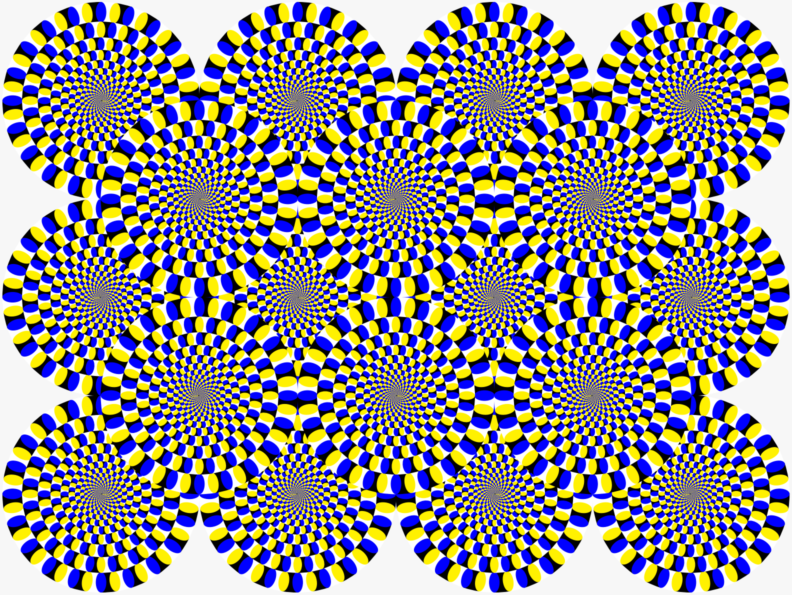


Escher Geometrien

- Paradoxe räumliche Eindrücke
- Auge/Gehirn ist 3D gewohnt

$\Rightarrow$ versucht 2D so zu interpretieren

Rotierende Kreise?



Experimentelles Prinzip

Fazit: Messgeräte unabdingbar, um Beobachtungen unabhängig von Sinneseindrücken zu machen (neutrale Beobachter)

- quantifizierbar
- reproduzierbar
- unbestechlich

Um die Ergebnisse **vergleichbar und bewertbar** (Fehlerrechnung) zu machen, braucht man die Mathematik

Physikalische Arbeitsmethodik

Induktive Methode:

Beobachtung eines Vorgangs

↓

Experiment zur qualitativen und quantitativen Untersuchung des Vorgangs

↓

Modell zur Beschreibung des Vorgangs (und evtl. darüber hinaus)

↓

Gesetz (Verallgemeinerung auf ähnliche Fälle)

↓

Vorhersage neuer Phänomene

Übersicht

- Gesetze der Physik liefern Zusammenhänge zwischen **physikalischen Größen** wie Länge, Zeit, Kraft, ...
- Meist werden physikalische Größen mit Buchstaben abgekürzt, z.B. Zeit t, Länge $\underset{s}{L}$, Kraft F, ...
- Eine physikalische Größe G ist ein Produkt aus Zahlenwert $\{G\}$ und Einheit [G]:

$$G = \{G\} \cdot [\mathrm{G}]$$

z.B. Zeit:

$t = 3{,}5\ \mathrm{s}$

- Gesetze der Physik liefern Zusammenhänge zwischen **physikalischen Größen** wie Länge, Zeit, Kraft, ...
- Meist werden physikalische Größen mit Buchstaben abgekürzt, z.B. Zeit t, Länge L, Kraft F, ...
- Eine physikalische Größe G ist ein Produkt aus Zahlenwert $\{G\}$ und Einheit [G]:

$$G = \{G\} \cdot [\mathrm{G}]$$

z.B. Zeit: $t = 3{,}5\,\mathrm{s}$

Historische Einheiten

Länge

- Häufig über menschl. Körper definiert
- Klafter, Elle, Fuß, Hand, Finger
- engl. Rute $= 5\frac{1}{2}$ Gerten $\approx 5{,}03\,\mathrm{m}$

Gewicht

- Pfund, Unze
- Nürnberger Apotheker-Pfund: $357{,}845\,\mathrm{g} \approx 1\,\mathrm{lb}$
- $1\,\mathrm{lb} = 12$ Unzen $= 96$ Drachmen $= 288$ Skrupel $= 576$ Oboloi $= 5760$ Gran $(1 : 12 : 8 : 3 : 2 : 10)$

Historische Einheiten

Länge

- Häufig über menschl. Körper definiert
- Klafter, Elle, Fuß, Hand, Finger
- engl. Rute $= 5\frac{1}{2}$ Gerten $\approx$ 5,03 m

Gewicht

- Pfund, Unze
- Nürnberger Apotheker-Pfund: 357,845 g $\approx$ 1 lb
- 1 lb $=$ 12 Unzen $=$ 96 Drachmen $=$ 288 Skrupel $=$ 576 Oboloi $=$ 5760 Gran $(1:12:8:3:2:10)$

Nachteile

- Sehr starke regionale oder individuelle Unterschiede
- Umständliche Umrechnung

Einheiten heute

Metrisches System – Vielfache von 10,100,1000,. . .

z.B.: 100 cm = 1 m

1000 g = 1 kg $10^3 g$

Ausnahme: Zeit

			1 Sekunde
		1 Minute	60 Sekunden
	1 Stunde	60 Minuten	3600 Sekunden
1 Tag	24 Stunden	1440 Minuten	86400 Sekunden

Regionale Ausnahmen: z.B. USA

1 mile	8 furlong	80 chain	1760 yard	5280 foot	63360 inches
			1 yard	3 foot	36 inches
				1 foot	12 inches

1 inch = 2.54 cm

Internationales Einheitensystem – SI-Einheiten

Basisgröße	SI-Einheit	Abkürzung
Zeit	Sekunde	s
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

- Alle anderen Einheiten können von diesen sieben **Basiseinheiten** ohne zusätzliche Faktoren abgeleitet werden
- Die Basisgrößen können *beliebig* aber möglichst zweckmäßig festgelegt werden
  - Klafter, Elle, etc. ungeeignet, da nicht leicht reproduzierbar

Definition der SI-Einheiten I

Meter m

Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299792458 Sekunde zurücklegt.

Kilogramm kg

Das Kilogramm ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps.

Sekunde s

Das 9192631770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Cäsium-Isotops ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Ampere A

Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, unendlich lange, geradlinige und im Vakuum im Abstand von 1 m voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorrufen würde.

Definition der SI-Einheiten II

Kelvin K

1 / 273,16 der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts von Wasser genau definierter isotopischer Zusammensetzung.

Mol mol

Die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso viel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 Gramm des Kohlenstoff-Isotops ^{12}C in ungebundenem Zustand enthalten sind.

Candela cd

Die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1 / 683 Watt pro Steradiant beträgt.

Beispiel kg

Willkürliche Definition des Kilogramms:

- kg wird noch durch Referenzkörper definiert
- Urkilogramm: Platin-Iridium-Zylinder in Paris
- Ca. 80 Kopien in anderen Ländern

- BIPM: Bureau International des Poids et Mesures
- Deutschland: Physikalisch Technische Bundesanstalt
- Problem: Die Masse nimmt ab! Bisher ca. 50 µg (Reinigung?)

Mögliche Neudefinition:

- Perfekte Kugel aus Silizium-28-Einkristall mit 9,38 cm Radius
- → Weniger als 30 nm Abweichung
- Entspricht Erde mit kleinster Erhebung von 1,82 m

Abgeleitete Größen

- Einheiten bzw. Größen, die sich auf SI-Einheiten bzw. Basisgrößen zurückführen lassen
- Zusammenhang folgt aus Naturgesetzen
- **Wichtig:** Einheiten sind Teil der Gleichungen
- Einheitentest als hilfreiche Kontrolle

Beispiel

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg(intervall)}}{\text{Zeit(intervall)}}$$

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{m}{s}$$

Abgeleitete Größen

- Einheiten bzw. Größen, die sich auf SI-Einheiten bzw. Basisgrößen zurückführen lassen
- Zusammenhang folgt aus Naturgesetzen
- **Wichtig:** Einheiten sind Teil der Gleichungen
- Einheitentest als hilfreiche Kontrolle

Beispiel

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg(intervall)}}{\text{Zeit(intervall)}}$$

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Beispiele für abgeleitete Größen

Größe	Berechnung	Einheit
Fläche	$A = \text{Länge} \times \text{Breite}$	m^2
Winkel	$\varphi = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$	$\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{m}} = \mathsf{rad}$
Raumwinkel	$\Omega = \frac{\text{Fläche des Kugelausschnitts}}{\text{Quadrat des Kugelradius}}$	$\frac{\mathsf{m}^2}{\mathsf{m}^2} = \mathsf{sr}$
Frequenz	$f = \nu = \frac{1}{\text{Perieodendauer}}$	$\frac{1}{\mathsf{s}} = \mathsf{Hz}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{\text{Wegintervall}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$
Kraft	$\vec{F} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$	$\mathsf{kg}\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2} = \mathsf{N}$
Arbeit, Energie	$W = E = \text{Kraft} \times \text{Weg}$	$\mathsf{kg}\frac{\mathsf{m}^2}{\mathsf{s}^2} = \mathsf{J}$
Leistung	$P = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeitintervall}}$	$\mathsf{kg}\frac{\mathsf{m}^2}{\mathsf{s}^3} = \mathsf{W}$

Würfel mit Kantenlänge $l = 10\,\mathrm{cm}$

Volumen:

$$V = l^3$$

$$V = 10\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm}$$

$$= 1000\,\mathrm{cm}^3$$

$$= 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}$$

$$= 0.001\,\mathrm{m}^3$$

Geschwindigkeit v eines Fahrrades

$$v = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v = 5\,\frac{\frac{1}{1000}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 5 \cdot \frac{3600}{1000}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$= 18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Beispiele: Umrechnen von Größen

Würfel mit Kantenlänge $l = 10\,\text{cm}$

Volumen:

$$
\begin{aligned}
V &= l^3 \\
V &= 10\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} \\
&= 1000\,\text{cm}^3 \\
&= 0{,}1\,\text{m} \cdot 0{,}1\,\text{m} \cdot 0{,}1\,\text{m} \\
&= 0{,}001\,\text{m}^3
\end{aligned}
$$

Geschwindigkeit v eines Fahrrades

$$
\begin{aligned}
v &= 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\
&= 5\,\frac{1/1000\,\text{km}}{1/3600\,\text{h}} \\
&= 5\,\frac{3600\,\text{km}}{1000\,\text{h}} \\
&= 5 \cdot 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&= 18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}
\end{aligned}
$$

Auswertung eines Experiments

Einfachster Fall: 2 Messgrößen

- Z.B.: Zeit t und zurückgelegte Strecke s
- Häufig: experimenteller Parameter (t) und Observable (s)

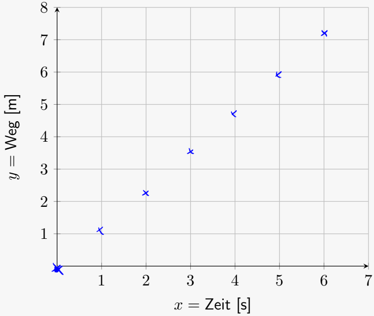
Beispiel: Bewegung mit $v = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$

Darstellung:

Wertetabelle

Zeit [s]	Weg [m]
0	0
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4.8
5	6.0
6	7.2

Graph



Einfachster Fall: 2 Messgrößen

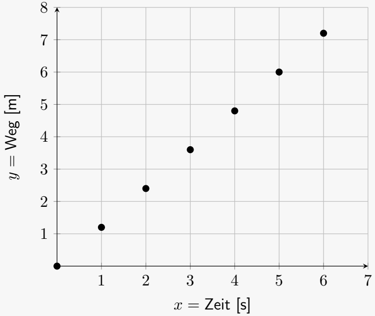
- Z.B.: Zeit t und zurückgelegte Strecke s
- Häufig: experimenteller Parameter (t) und Observable (s)

Beispiel: Bewegung mit $v = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$
Darstellung:

Wertetabelle

Zeit [s]	Weg [m]
0	0
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6
6	7.2

Graph



Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

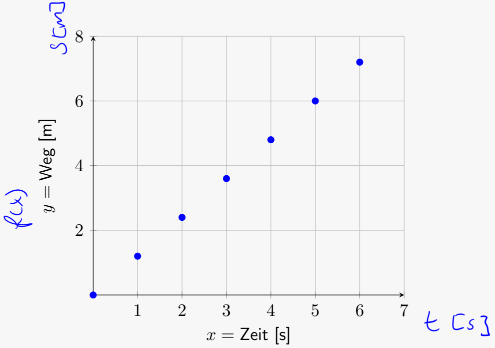
- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

$$y = f(x)$$

$f(x) = a \cdot x$

Hier : $s(t) = v \cdot t$



Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

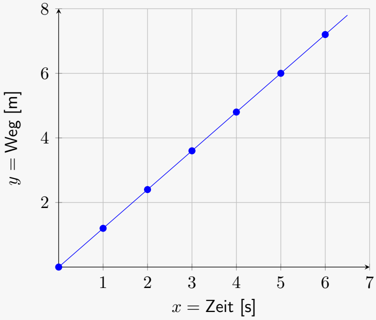
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



Analytische Beschreibung

Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

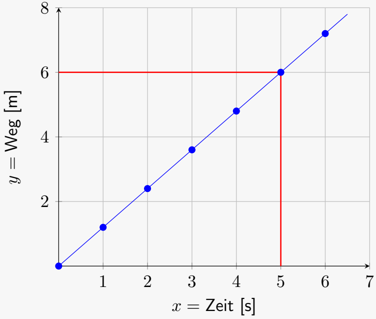
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



z.B.

$$s(5\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m}$$

Analytische Beschreibung

Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

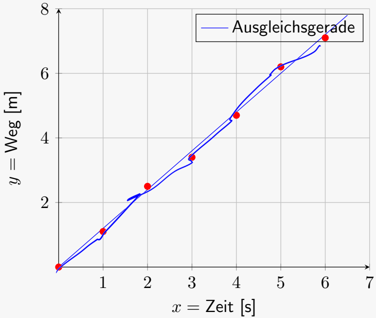
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



Bei einem Experiment nie einfach die Punkte des Graphens aller Messwerte verbinden, sondern **interpolieren** und so die **Ausgleichsgerade** finden!

Übersicht

Der Funktionsbegriff

Definition: Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen D und W, in der jedem Element aus D **ein Bestimmtes** Element aus W zugeordnet ist.

- D=Definitionsmenge
- W=Wertemenge

Lineare Funktion

Allgemeine Geradengleichung

$$f(x) = \overset{W}{\overset{\downarrow}{y}} = a \cdot \overset{D}{\overset{\downarrow}{x}} + b$$

b: y-Achsenabschnitt ($f(0) = b$)

Sonderfall: $b = 0$ Proportionalität

$$y \propto x \quad \rightarrow \quad y = f(x) = a \cdot x$$

a: Proportionalitätsfaktor

Steigung einer Geraden

Definition der Steigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Für eine Gerade:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$y = a \cdot x + b$

$y_1 = a x_1 + b$

$y_2 = a x_2 + b$

$\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta x = x_2 - x_1$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\overbrace{(a \cdot x_2 + b)}^{y_2} - \overbrace{(a \cdot x_1 + b)}^{y_1}}{x_2 - x_1} = \frac{a x_2 - a x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{(x_2 - x_1)}} = a$$

$$= \frac{a x_2 + b - a x_1 - b}{x_2 - x_1}$$

Steigung einer Geraden

Definition der Steigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Für eine Gerade:

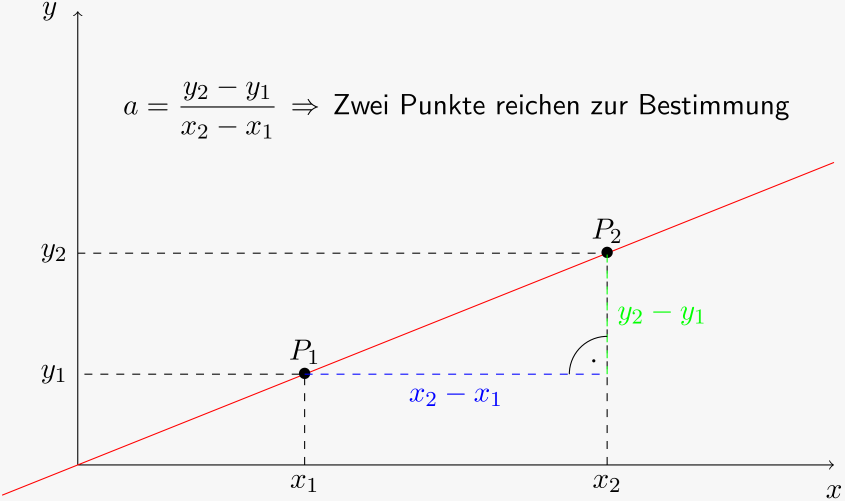
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a\end{aligned}$$

Steigung $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \text{Zwei Punkte reichen zur Bestimmung}$$

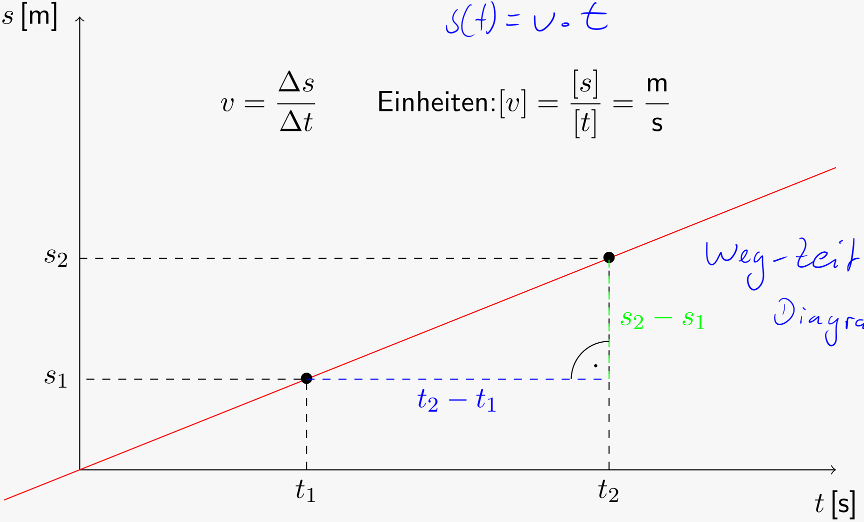


Beispiel: Geschwindigkeit

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Zurückgelegter Weg}}{\text{Benötigte Zeit}}$$

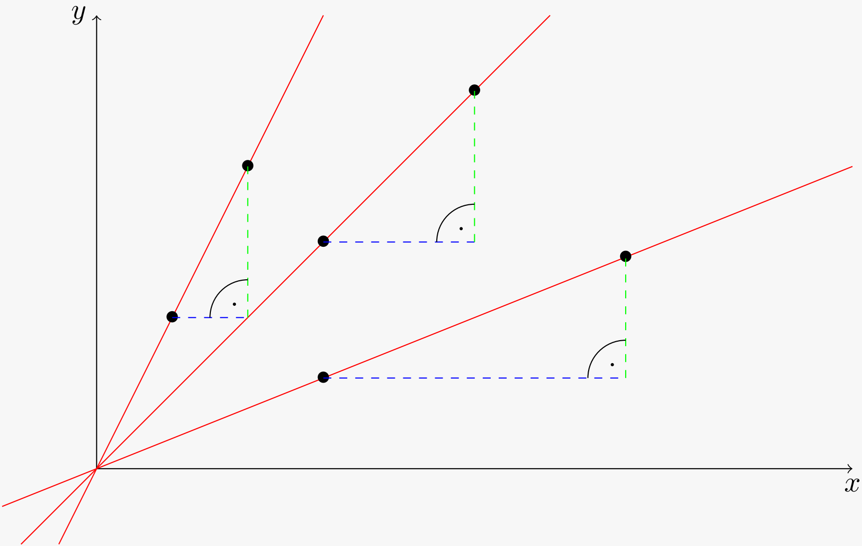
$s(t) = v \cdot t$

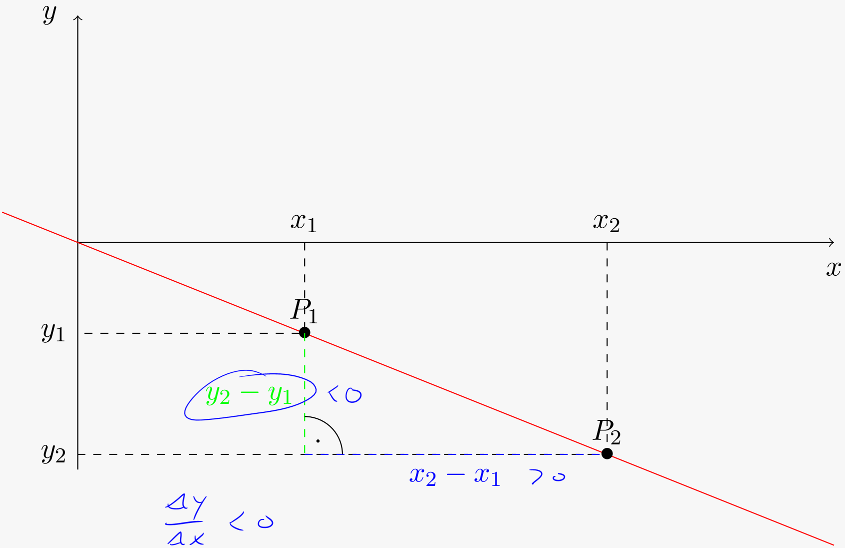
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{Einheiten:} [v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



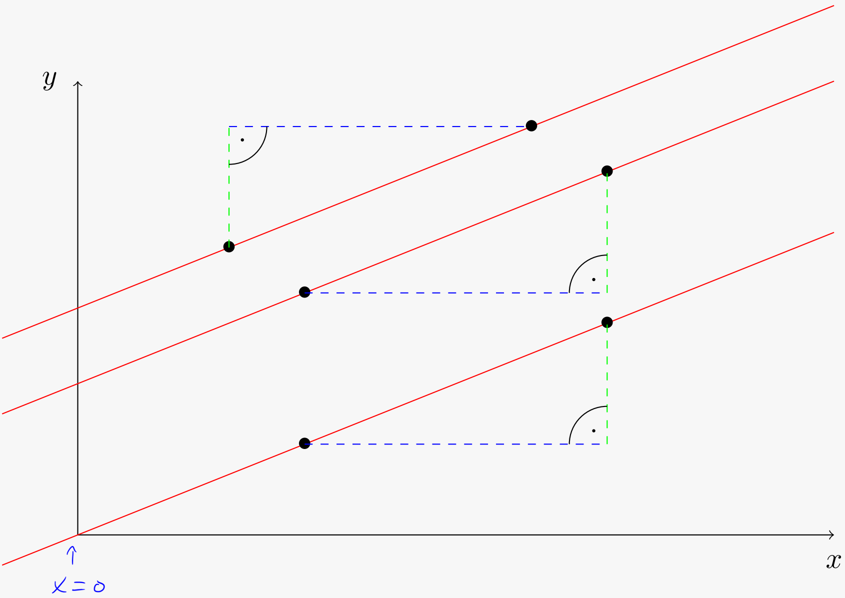
Weg-Zeit-Diagramm

Geraden unterschiedlicher Steigung




y
x
x_1
x_2
P_1
P_2
y_1
y_2
$y_2 - y_1 < 0$
$x_2 - x_1 > 0$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$

Parallele Geraden

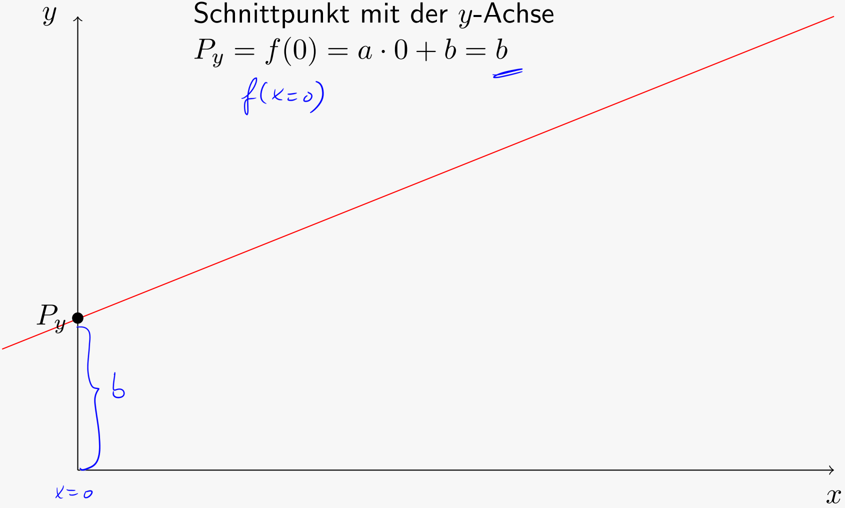


y-Achsenabschnitt

Schnittpunkt mit der y-Achse

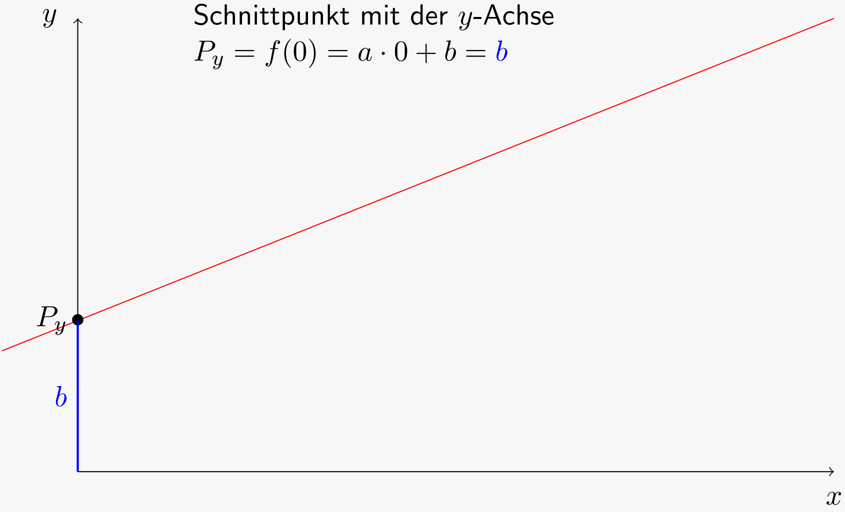
$P_y = f(0) = a \cdot 0 + b = \underline{b}$

$f(x=0)$



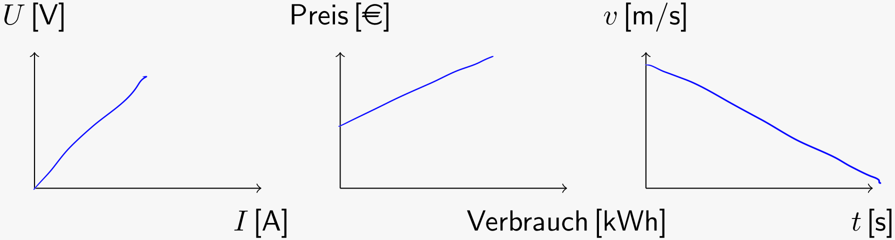
Schnittpunkt mit der y-Achse

$P_y = f(0) = a \cdot 0 + b = b$



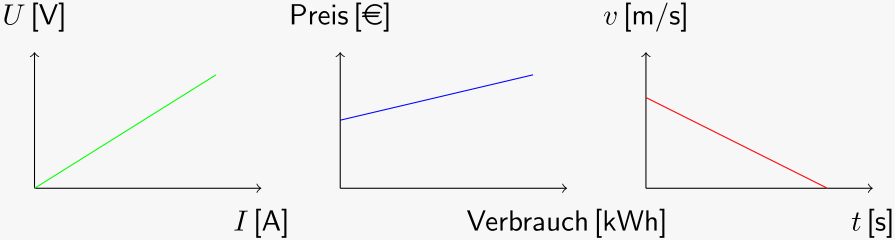
Beispiele für lineare Zusammenhänge

- Ohmsches Gestez: $U = R \cdot I$
- Stromkosten: Grundgebühr + Verbrauch
- Gleichförmig verzögerte Bewegung



Beispiele für lineare Zusammenhänge

- Ohmsches Gestez: $U = R \cdot I$
- Stromkosten: Grundgebühr + Verbrauch
- Gleichförmig verzögerte Bewegung



Übersicht

Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst

z.B.: $x \cdot x = x^2 \rightarrow$ 2. Potenz von x

- 0. Potenz: $x^0 = 1$
- 1. Potenz: $x = x^1$
- 2. Potenz: $x \cdot x = x^2$
- 3. Potenz: $x \cdot x \cdot x = x^3$
- n. Potenz: $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n} = x^n$

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots x)}_{m \text{ mal}} = x^{(n+m)}$$

n nennt man **Exponent** oder Hochzahl

Überlegung

$$x^n \cdot x = x^{n+1} \quad \Big| \cdot \frac{1}{x}$$

$$x^n \cdot \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$x^n = x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} = x^{(n+1-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Negative Potenzen

Überlegung

$$x^n \cdot x = x^{n+1}$$

$$x^n \cdot x \cdot \frac{1}{x} = x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$x^n = x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$X^0 = X^{n-n}$$

$$= X^n \cdot X^{-n}$$

$$= X^n \cdot \frac{1}{X^n} = \frac{X^n}{X^n} = 1$$

Negative Potenzen

Überlegung

$$
\begin{aligned}
x^n \cdot x &= x^{n+1} \\
x^n \cdot x \cdot \frac{1}{x} &= x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \\
x^n &= x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^0 &= x^{n-n} \\
&= x^n \cdot x^{-n} \\
&= \frac{x^n}{x^n} = 1 \\
&\Rightarrow x^0 = 1
\end{aligned}
$$

Rechnen mit Potenzen

Produkt

$$x^n \cdot x^m = (\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n}) \cdot (\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{m}) = x^{n+m}$$

Quotient

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n \cdot \frac{1}{x^m} = x^n \cdot x^{-m} = x^{n-m}$$

Potenz

$$(x^n)^m = \underbrace{(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n}) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n})}_{m} = x^{n \cdot m}$$

- $(-1)^6 =$ $-1\cdot -1\cdot -1\cdot -1\cdot -1\cdot -1 = \left((-1)^2\right)^3 = 1^3 = 1$
- $(1/10)^4 =$ $(10^{-1})^4 = 10^{-4}$
- $0{,}1^5 =$ $(10^{-1})^5 = 10^{-5}$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 =$ $8 + 16 - 32 = -8$
- $2^3\underbrace{(1+2-4)}_{-1} = -1\cdot 2^3 = -8$
- $a^5 \cdot a^2/a^4 =$ $a^{(5+2-4)} = a^3$
- $(a/b^2)^3 \cdot (b^2/a)^3 =$ $(a\cdot b^{-2})^3\cdot(b^2 a^{-1})^3 = a^3 b^{-6} b^6 a^{-3} = 1$ $a^0\cdot b^0$
- $a^{-2} \cdot a^{-3} \cdot a^4 =$ $a^{(-2-3+4)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $(a^{-1} \cdot b^{-5})^{-2} =$ $a^{(-1\cdot -2)}\cdot b^{(-5\cdot -2)} = a^2\cdot b^{10}$

Beispiele: Rechnen mit Potenzen

- $(-1)^6 = ((-1)^2)^3 = 1^3 = 1$
- $(1/10)^4 = (10^{-1})^4 = 10^{-4} = 1/10^4 = 0{,}0001$
- $0{,}1^5 = (1/10)^5 = 0{,}00001$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 = 8 + 16 - 32 = -8$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 = 2^3 + 2^1 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2^3 = 2^3(1 + 2 - 2^2) = 8 \cdot (-1) = -8$
- $a^5 \cdot a^2/a^4 = a^{(5+2-4)} = a^3$
- $(a/b^2)^3 \cdot (b^2/a)^3 = a^3 \cdot b^{-6} \cdot b^6 \cdot a^{-3} = a^0 \cdot b^0 = 1$
- $a^{-2} \cdot a^{-3} \cdot a^4 = a^{-2-3+4} = a^{-1} = 1/a$
- $(a^{-1} \cdot b^{-5})^{-2} = a^{-1\cdot-2} \cdot b^{-5\cdot-2} = a^2 \cdot b^{10}$

Potenzfunktionen

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen
Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$ $= a$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1$ $= a \cdot x$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2$
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3$
- n. Grades: $f(x) = a \quad \cdot x^n$

Potenzfunktionen

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen
Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1 + b$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- n. Grades: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$

Potenzfunktionen

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen
Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

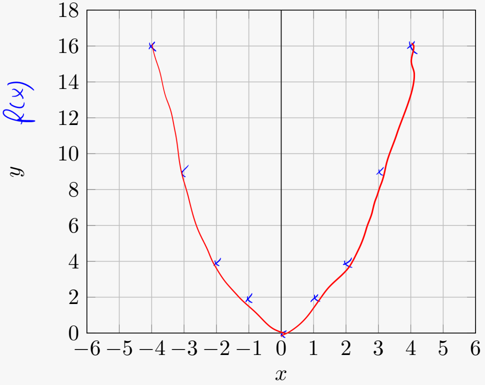
- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1 + b$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Quadratische Gleichung
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- n. Grades: $f(x) = a_n \cdot x^n$

Normalparabel

Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

$$f(x) = y = x^2$$

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

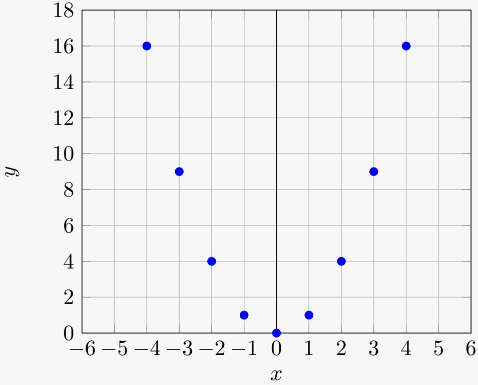


Normalparabel

Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

$$f(x) = y = x^2$$

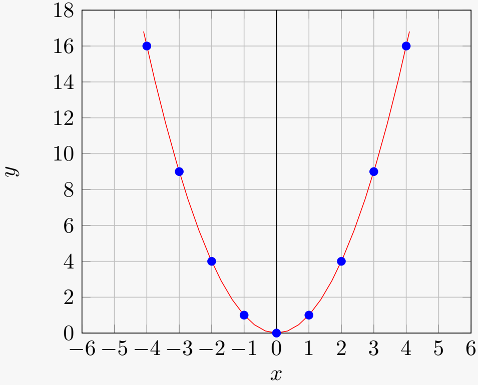
x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

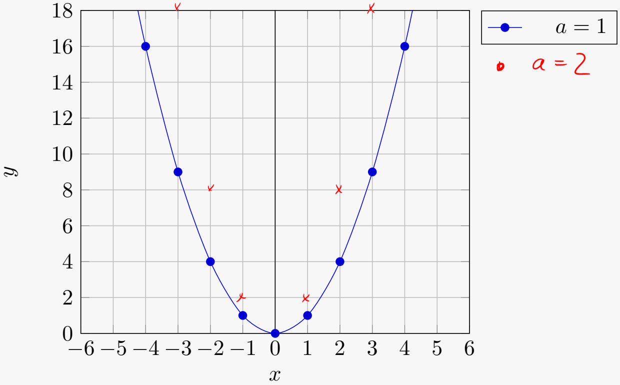
$$f(x) = y = x^2$$

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung

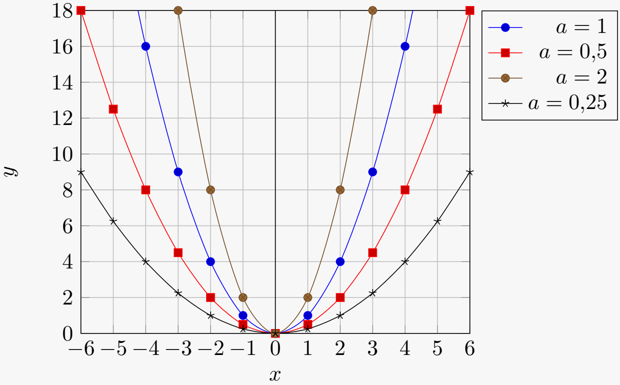
$$f(x) = a \cdot x^2$$



- $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = x^2 \to$ nur positive Werte
- $f(-x) = f(x) \to$ symmetrisch zur y-Achse
- $f(0) = 0 \to$ Scheitelpunkt im Ursprung

Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung

$$f(x) = a \cdot x^2$$



- $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = x^2 \rightarrow$ nur positive Werte
- $f(-x) = f(x) \rightarrow$ symmetrisch zur y-Achse
- $f(0) = 0 \rightarrow$ Scheitelpunkt im Ursprung

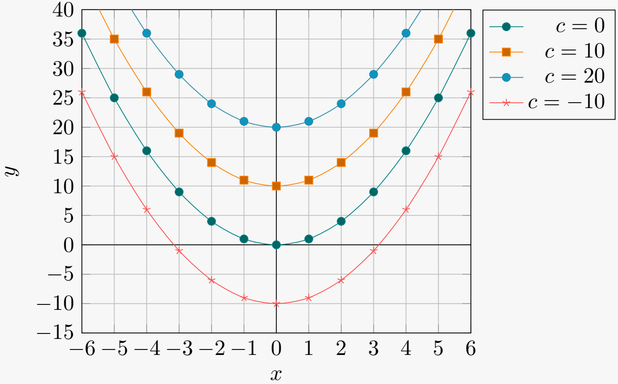
Verschieben in y-Richtung

$$f(x) = x^2 + c$$

$f(x) = x^2 + y_s$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt bei $y_s = c$

$x_s = 0$

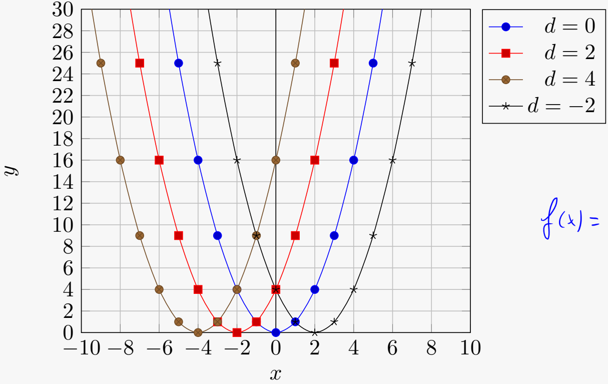


Verschieben in x-Richtung

$$f(x) = (x+d)^2$$

1. Binomische Formel: $(x+d)^2 = x^2 + \underbrace{2d}_{b} \cdot x + \underbrace{d^2}_{c}$

Scheitelpunkt bei $x_s = -d$



$f(x) = (x - x_s)^2$

Quadratische Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Wie finde ich den Scheitelpunkt S?

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$
$$y = a \cdot x^2 - 2a \cdot x_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s$$

$-2a \cdot x_s = b \quad | : -2a$

$x_s = \frac{b}{-2a} = \frac{-b}{2a}$

$c = a x_s^2 + y_s$

$y_s = c - a x_s^2 = c - a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4a}$

Quadratische Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Wie finde ich den Scheitelpunkt S?

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a \cdot x^2 - 2a \cdot x_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s$$

Koeffizientenvergleich:

$b = -2a \cdot x_s \quad \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a}$

$c = a \cdot x_s^2 + y_s \quad \Rightarrow y_s = c - a \cdot x_s^2 = c - \frac{b^2}{4a}$

Scheitelpunktsform

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Meistens ist aber gegeben: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$