Physik für Biologen und Zahnmediziner

Kapitel 7: Hydrostatik

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

29. November 2017

Übersicht

1. Mechanik deformierbarer Körper
   - Wiederholung: Verformung
   - Hydrostatik

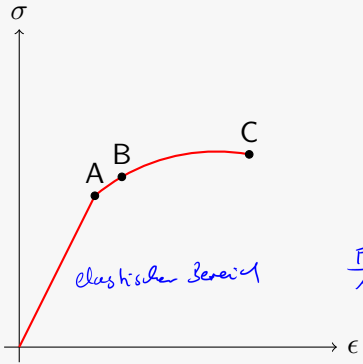
Elastizität → Verformung

- Verhältnis der ziehenden Kraft zur Querschnittsfläche: **Spannung**

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- Relative Längenänderung: **Dehnung**

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



$$\frac{F}{A} = E\,\varepsilon = E\,\frac{\Delta l}{l}$$

A Proportionalitätsgrenze

B Elastizitätsgrenze

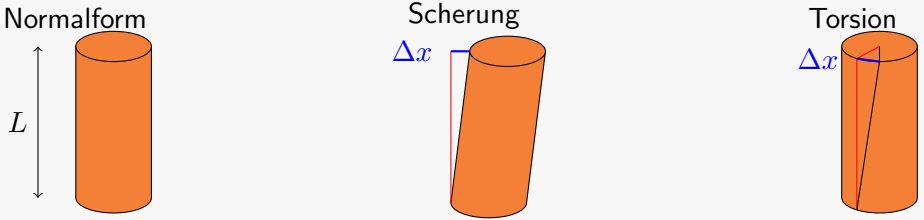
C Reißpunkt

Scherung und Torsion

- Bei parallel zu einer Fläche ansetzenden Kräften gilt

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}$$

- Scherung: Kraft im Mittelpunkt $\rightarrow$ Verkippen
- Torsion: Kraft erzeugt Drehmoment $\rightarrow$ Rotation
- G wird Scher-(/Schub-) oder Torsionsmodul genannt



Druck

- Eine Kraft F, die senkrecht auf eine Fläche A ausgeübt wird, erzeugt einen Druck p

$$p = \frac{F}{A}$$

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Pascal

Einheiten des Drucks

SI Einheit:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$$

Weitere Einheiten

- 1 bar = 100000 Pa = 1000 hPa
- 1 Torr = 1 mmHg = ca. 133,3 Pa ($\rightarrow$Blutdruck)
- 1 mWs (Meter Wassersäule) = 0,1 at = 9,80665 kPa
- 1 atm (Physik. Atmosphäre) = 760 Torr = 101325 Pa = 1013,25 hPa
- 1 psi=6894,757293168 Pa

Kompressibilität

- Wird auf ein Gas oder eine Flüssigkeit ein Druck ausgeübt, so ändert sich das Volumen

$$\Delta p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Kompressibilitätsmodul K

- Maß für die Kompressibilität eines Stoffes in Abhängigkeit des Druckes p
- negatives Vorzeichen $\Rightarrow$ höherer Druck $\hat{=}$ kleinerem Volumen

$$\frac{1}{K} = \kappa$$ Kompressibilität

κ „Kappa"

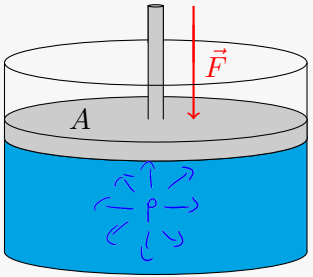
Kompressibilität einiger Materialien

Aluminium	$\kappa = 1.34 \cdot 10^{-11} \mathrm{m}^2\,\mathrm{N}^{-1}$
Wasser	$\kappa = 4.7 \cdot 10^{-10} \mathrm{m}^2\,\mathrm{N}^{-1}$
Ideales Gas	$\kappa = \frac{1}{P} \approx 10^{-5}\,\mathrm{m}^2\mathrm{N}^{-1}$

Hydrostatik

- Die Lehre von ruhenden Flüssigkeiten
- Betrachtet wird eine ideale Flüssigkeit:
  - Inkompressibel
  - Keine innere Reibung (Viskosität)
  - Keine Oberflächenspannung
  - Eigene Masse wird zunächst ignoriert

Stempeldruck



Druck auf Flüssigkeit

Kraft $\vec{F}$ senkrecht zu A übt den Druck

$$p = \frac{F}{A}$$ aus

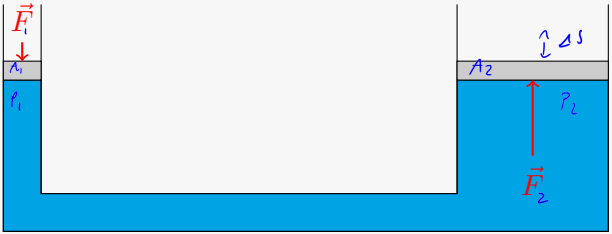
- Hydrostatischer Druck
- Allseitiger Druck
- Unabhängig von der Form des Gefäßes

Hydraulische Presse

Konstanter Druck

$$p_1 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

Arbeit ?



Volumenarbeit

Druck übt Kraft auf Kolben aus

$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A$

$\Rightarrow$ Kolben bewegt sich um Δs

Volumenarbeit $W = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s \Rightarrow \boxed{W = p \cdot \Delta V}$

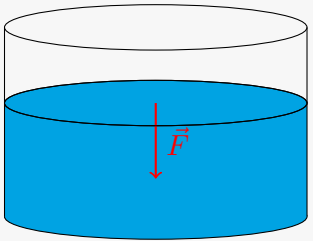
Energieerhaltung: Der große Kolben gewinnt an Kraft, verliert aber an Schlagweg

$W = F_1 \cdot \Delta s_1 = F_2 \cdot \Delta s_2 \Rightarrow \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{p A_2}{p A_1} = \frac{A_2}{A_1}$

Druck spielt bei Flüssigkeiten die Rolle einer Kraft

(Arbeit = Druck · Volumen)

Schweredruck



Flüssigkeit erfährt Schwerkraft

→ Eigengewicht führt zu Druck

Druck am Boden:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\text{Gewicht der Flüssigkeitssäule}}{\text{Fläche des Bodens}}$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V \cdot g}{A} = \frac{\rho \cancel{A} \cdot h \cdot g}{\cancel{A}} = \boxed{\rho \cdot h \cdot g = p}$$

Schweredruck

Wdh. Dichte $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$

$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$ oft oder auch $\frac{g}{cm^3}$

Hydrostatisches Paradoxon

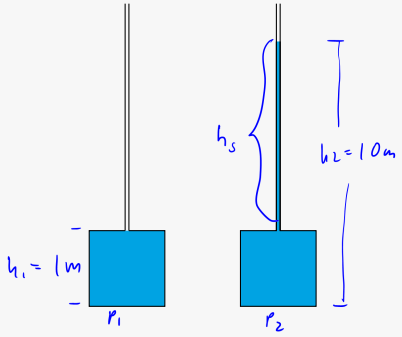
Der Schweredruck ist unabhängig von der Form des Gefäßes und hängt nur von h ab.

Beispiel: Würfel mit dünnem Rohr

- $1\,\mathrm{m}^3$ Würfel voll mit Wasser
- Druck am Boden p_1 $p_1 = \rho g h_1$
- Fülle Rohr bis $h = 10\,\mathrm{m}$
- Druck am Boden ?

$$p_2 = \rho g h_s + \rho g h_1 = \rho g (h_s + h_1) = \rho g h_2$$

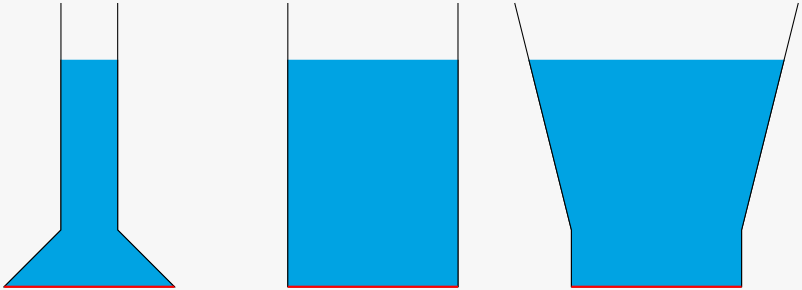
$$p_2 = 10 \cdot p_1$$



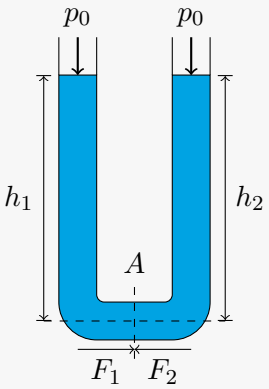
Hydrostatisches Paradoxon

- Gefäße haben alle die selbe Grundfläche

Trotz unterschiedliche Wassermengen ist der Druck in allen Gefäßen gleich



Kommunizierende Röhren



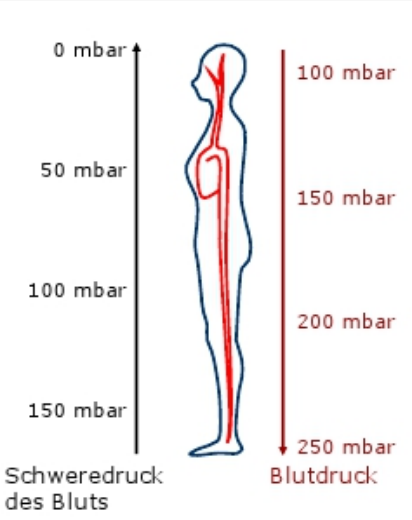
- Druck ist allseitig $\rightarrow$ An jeder Stelle in den Röhren ist der Druck von oben gleich dem von unten bzw. der von links gleich dem von rechts.
- Bei Gleichgewicht gilt also am untersten Verbindungspunkt:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot A = p_2 \cdot A$$

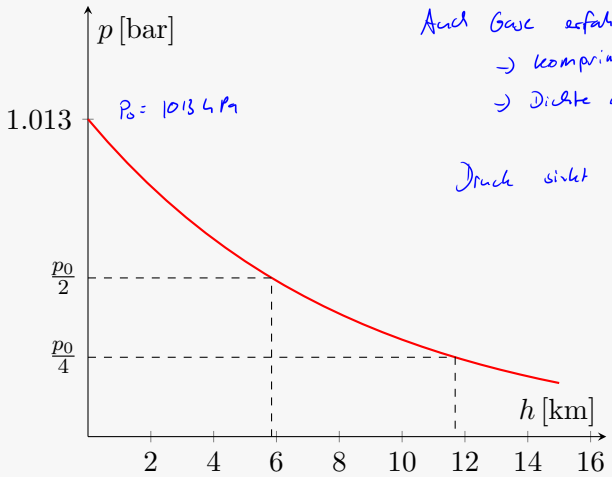
$$\cancel{\rho \cdot g} \cdot h_1 \cdot \cancel{A} = \cancel{\rho \cdot g} \cdot h_2 \cdot \cancel{A}$$

$$h_1 = h_2$$

Schweredruck beim Menschen



Exkurs Luftdruck – Barometrische Höhenformel



Auch Gase erfahren Schweredruck
→ komprimierbar
→ Dichte ändert sich

Druck sinkt exponentiell mit h

$$P(h) = P_0 \, e^{-\frac{h}{8432\,\text{m}}}$$

Magdeburger Halbkugeln

$P_L \rightarrow$ $\leftarrow P_L, P_0$

Luftdruck drückt auf die Kugel

$$F = P_0 \cdot A$$

$$= 10^5 \, Pa \, (\pi \cdot 0.3^2 \, m^2)$$

$$\sim 0.3 \, m^2$$

$$= 0.3 \times 10^4 \, N$$

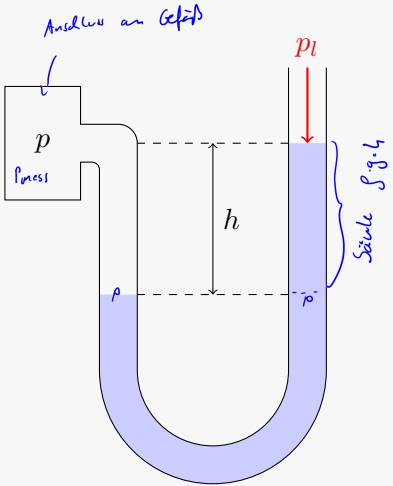
$$\hat{=} \; 3000 \, N$$

Bei uns: Radius 5cm $\Rightarrow A = \pi \cdot (0.05)^2 \, m^2$

$$\sim 0.1 \, m^2$$

$$F = 10^5 \times 10^{-1} \, N = 1000 \, N \; \hat{=} \; 100 \, kg$$

Flüssigkeitsmanometer

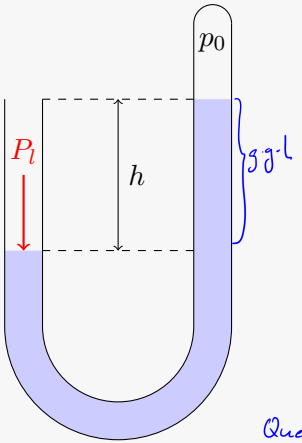


- Flüssigkeitsmanometer
- Druckmessung bei Gasen
- Z.B. mit Quecksilber gefüllt
- Druck für jeden Füllstand konstant

$p_l = p_L + \rho \cdot g \cdot h = p_{mess}$

$p_{mess} - p_e = \Delta p = \rho \cdot g \cdot h$

Manometer zur Luftdruckmessung



- Geschlossenes Flüssigkeitsmanometer
- Oberes Ende eines Schenkels evakuiert $\Rightarrow p_0 = 0$

$p_e = \rho \cdot g \cdot h$

$h = \frac{p_e}{\rho \cdot g}$

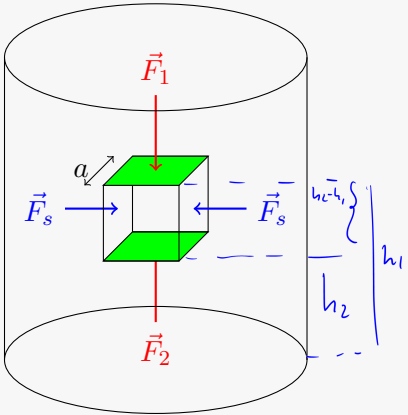
z.B. Wasser $\rho = \frac{1\,g}{cm^3} = \frac{1000\,kg}{m^3}$

$h = \frac{10^5\,Pa}{1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 10\,\frac{m}{s^2}} = \frac{10^5\,\frac{kg\,m}{s^2 m^2}}{10^4\,\frac{kg}{m^2 s^2}}$

$h = 10\,m$

Quecksilber Hg $\rho_{Hg} = \frac{13.5\,g}{cm^3}$ $h_{Hg} = \frac{10}{13.5}\,m \approx 0.74\,m$

Auftrieb



- Seitliche Kräfte kompensieren sich

Kraft auf obere Fläche

$F_1 = p_1 \cdot a^2 = \rho \cdot h_1 \cdot g \cdot a^2$

Kraft auf untere Fläche

$F_2 = p_2 \cdot a^2 = \rho \cdot h_2 \cdot g \cdot a^2$

Resultierende Kraft

$F = F_2 - F_1 = \rho \cdot g \cdot a^2 (h_2 - h_1) = \rho \cdot g \cdot a^2 \cdot a$

$F = \rho \cdot g \, V_k$

Archimedisches Prinzip

- Dichte des Körpers $>$ als Dichte der Flüssigkeit
  - Körper sinkt
- Dichte des Körpers $=$ der Dichte der Flüssigkeit
  - Körper schwebt
- Dichte des Körpers $<$ als Dichte der Flüssigkeit
  - Körper steigt

$$F = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_k = m_{Flü} \cdot g$$

Der Auftrieb entspricht der Gewichtskraft der durch den Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge

Cartesischer Taucher

$\rho_{Taucher} = \frac{m}{V}$ V: konstant m steigt, da Wasser in den Taucher fließt

$\Rightarrow$ Dichte steigt

Eintauchtiefe

Ein Körper taucht so weit in eine Flüssigkeit ein, bis das verdrängte Volumen seine Gewichtskraft kompensiert.

- Körper: Volumen V_K, Dichte ρ_K
- Flüssigkeit: Dichte $\rho_{Fl} > \rho_K$
- Volumenanteil ΔV der eintaucht?

$m_K = \rho_K V_K$

$F_A = \rho_{Fl} \cdot \Delta V \cdot g = m_K \cdot g$

$\Delta V = \frac{m_K \cdot g}{\rho_{Fl} \cdot g} = \frac{\rho_K V_K}{\rho_{Fl}}$

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho_K}{\rho_{Fl}}$

$\rho_{Eis} = 0.916 \frac{g}{cm^3}$

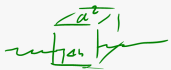
$\rho_{Wasser} \approx 0.999975 \frac{g}{cm^3}$ (bei 4°C)

$\Delta h \approx \frac{0.9}{1} h \Rightarrow 90\%$

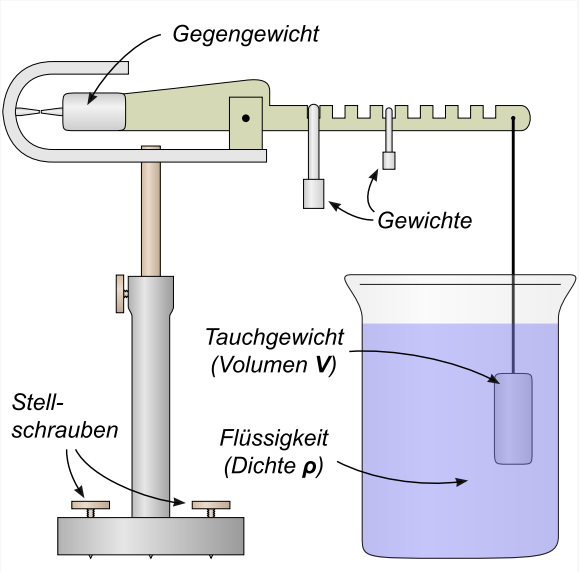
Bsp: Würfel Kantenlänge a

$V_K = a^3$

$\Delta V = a^2 \cdot \Delta h = \frac{\rho_K \cdot a^3}{\rho_{Fl}} \Rightarrow \Delta h = \frac{\rho_K}{\rho_{Fl}} \cdot a = \frac{\rho_K}{\rho_{Fl}} \cdot h$

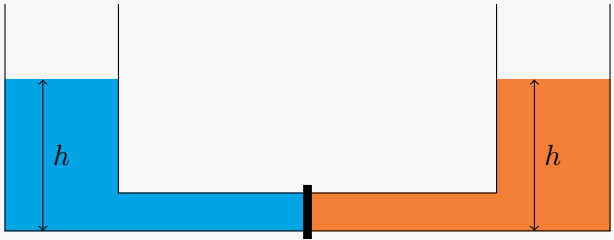


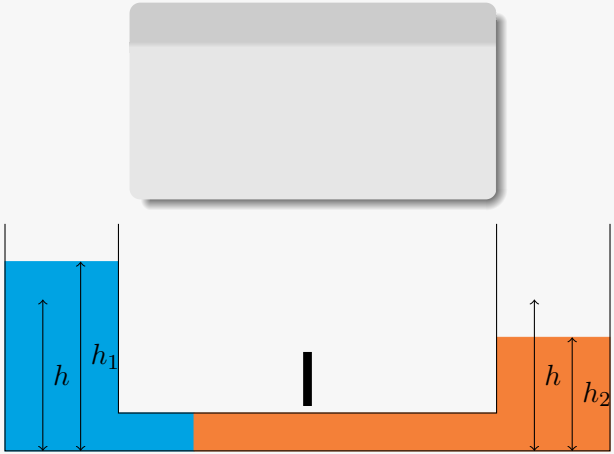
Mohrsche Wage



Dichtebestimmung von Flüssigkeiten

- Rohre mit unterschiedlichen Flüssigkeiten (unterschiedliche Dichten)
- Unterschiedlicher Schweredruck bei gleicher Höhe $\rho_1 hg \neq \rho_2 hg$



Dichtebestimmung von Flüssigkeiten

- Rohre mit unterschiedlichen Flüssigkeiten (unterschiedliche Dichten)
- Unterschiedlicher Schweredruck bei gleicher Höhe $\rho_1 hg \neq \rho_2 hg$