# Physik für Biologen und Zahnmediziner

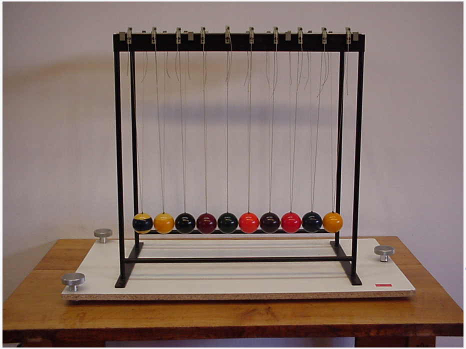
## Kapitel 6: Drehimpuls, Verformung

Dr. Daniel Bick

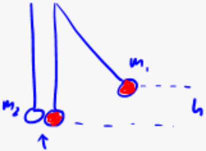
Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

24. November 2017

# Versuch: Newton Pendel



$m_1 = m_2 = m$




Kurz vor dem Stoß

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

$\vec{p} = m \vec{v}$ hier nur Betrag $p = mv$

Nach dem Stoß

$$E = E_{kin_1} + E_{kin_2} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$p = p_1 + p_2 = m v_1 + m v_2$$

Energie- und Impulserhaltung
„Vorher = Nachher"

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v_2^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad ①$$

$$\cancel{m} v = \cancel{m} v_1 + \cancel{m} v_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2 \quad ②$$

② in ①

$$(v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$\cancel{v_1^2} + 2 v_1 v_2 + \cancel{v_2^2} = \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2}$$

$$2 v_1 v_2 = 0$$

Vorher:

$m_1 \longrightarrow v_1 \qquad v_2 \longleftarrow m_2$

$p = m_1 v_1 \qquad p = m_2 v_2$

Nachher:

$v_1' \longleftarrow m_1 \qquad m_2 \longrightarrow v_2'$

$p = m_1 v_1' \qquad p = m_2 v_2'$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2$$

$$\Rightarrow \quad m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 {v_1'}^2 + m_2 {v_2'}^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_1^2 = {v_1'}^2 + \frac{m_2}{m_1} {v_2'}^2} - \frac{m_2}{m_1} v_2^2$$

$v_2 = 0$

Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1} v_2'} - \frac{m_2}{m_1} v_2$$

$$v_1^2 = {v_1'}^2 + 2 \frac{m_2}{m_1} v_1' v_2' + \frac{m_2^2}{m_1^2} {v_2'}^2$$

$$\cancel{v_1^2} + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 = \cancel{v_1^2} + 2\frac{m_2}{m_1} v_1' v_2' + \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2'^2 \qquad /: \frac{m_2}{m_1} v_2'$$

$$v_2' = 2 v_1' + \frac{m_2}{m_1} v_2' \quad \Rightarrow \quad 2 v_1' = v_2' - \frac{m_2}{m_1} v_2' \quad \Rightarrow \quad v_1' = \frac{1}{2} v_2' - \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1} v_2'$$

→ In Impulserhaltung

$$v_1 = \frac{1}{2} v_2' - \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1} v_2' + \frac{m_2}{m_1} v_2' = \frac{1}{2} v_2' + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1} v_2' = \frac{1}{2} v_2' \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = \frac{1}{2} v_2' \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$$

$$\boxed{v_2' = 2 v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

→ In Imp.

$$v_1 = v_1' + \frac{m_2}{\cancel{m_1}}\left(2 v_1 \frac{\cancel{m_1}}{m_1 + m_2}\right) = v_1' + 2\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\Rightarrow v_1 \left(1 - 2\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = v_1'$$

$$\Rightarrow v_1 \left(\frac{m_1 + m_2 - 2 m_2}{m_1 + m_2}\right) = v_1'$$

$$\boxed{v_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) = v_1'}$$

# Zentraler elastischer Stoß: $v_2 = 0$

1. Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1}v_2'^2$
2. Impulserhaltung: $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1}v_2'$

$$v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1}v_2'^2 = v_1'^2 + 2\frac{m_2}{m_1}v_1'v_2' + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2$$

$$\frac{m_2}{m_1}v_2'^2 = 2\frac{m_2}{m_1}v_1'v_2' + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2 \quad \Big\backslash : \frac{m_2}{m_1}v_2'$$

$$v_2' = 2v_1' + \frac{m_2}{m_1}v_2' \quad \Rightarrow \quad v_1' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_2'$$

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_2' + \frac{m_2}{m_1}v_2' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)v_2' = \frac{m_1 + m_2}{2m_1}v_2'$$

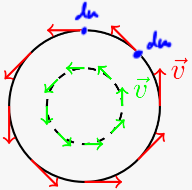
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \qquad v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$$

# Übersicht

## Kinetische Energie eines rotierenden Körpers

$v = \omega r$

Erinnerung: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$
Beispiel Ring/Scheibe




**Ring**: Betrag der Geschwindigkeit $v$ ist gleich für jeden Massepunkt.
**Scheibe**: Lediglich die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ ist gleich:

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$$

$$E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 \rightarrow \int \frac{1}{2} v^2(r)\, dm$$

$$= \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2} \omega \underbrace{\int r^2 dm}_{I}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2 = E_{rot}$$

### Trägheitsmoment $I$

$$I = \int r^2_{(m)}\, dm$$

→ tabelliert

# Beispiele für Trägheitsmomente

Bei Drehung um die Symmetrieachse des Körpers

| | $I$ |
|---|---|
| Dünner Ring | $m \cdot r^2$ |
| Vollzylinder | $\frac{1}{2} m \cdot r^2$ |
| Hohlzylinder | $\frac{1}{2} m \cdot (r_1^2 + r_2^2)$ |
| Kugel | $\frac{2}{5} m \cdot r^2$ |


$$[I] = [m][r^2] = \mathrm{kg\,m^2}$$

# Trägheitsmoment und Drehmoment

- Das Trägheitsmoment ist ein Maß dafür, wie schwer ein Körper in Drehung zu versetzen ist.
- Für eine punktförmige Masse gilt $I = m \cdot r^2$

Zusammenhang zwischen Drehmoment und Winkelbeschleunigung $\alpha$

**Dynamisches Grundgesetz der Rotation**

$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

vgl. $\vec{F} = m\vec{a}$

## Analogie Translation – Rotation

Translation: Kraft $\vec{F}$ verursacht Beschleunigung $\vec{a}$

Rotation: Drehmoment $\vec{M}$ verursacht Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$

Mit Steiner

$\omega = \frac{v}{r}$

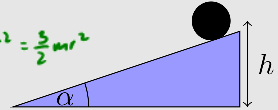
## Welche Rolle ist schneller?

Energieerhaltung $E = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

### Vollzylinder

$I = \frac{1}{2} m r^2$

$I = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2$




$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} \cancel{m} \cancel{r^2}\right) \frac{v^2}{\cancel{r^2}} + \frac{1}{2} \cancel{m} v^2$$

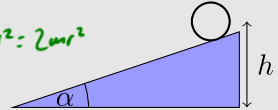
$$g \cdot h = \frac{3}{4} v^2 + \frac{1}{2} v^2 = \frac{5}{4} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3} g \cdot h}$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{5} g \cdot h} \qquad v = \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{gh}$$

### Hohlzylinder → Dünner Ring

$I = m r^2$

$I = m r^2 + m r^2 = 2 m r^2$

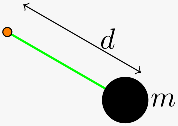



$$\cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\left(2 \cancel{m} \cancel{r^2}\right) \frac{v^2}{\cancel{r^2}} + \frac{1}{2} \cancel{m} v^2$$

$$g \cdot h = \frac{3}{2} v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} g h}$$

# Steinerscher Satz




Das Trägheitsmoment eines Körpers bei Drehung um seine Symmetrieachse unterscheidet sich von dem bei Drehung um eine andere Achse.

- Beispiel: Ein rollender Körper dreht sich um seinen Auflagepunkt

Das tatsächliche Trägheitsmoment kann mit dem **Satz von Steiner** berechnet werden:

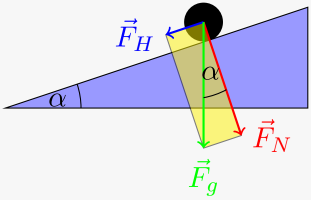
$$I = I_{Schwerpunkt} + md^2$$

Spielt auch Rolle bei Zylinder auf p.10


$$I = I_S + mr^2$$

# Rollreibung

- Rollreibung wirkt dem Drehmoment entgegen
- Analog zur Gleitreibung: $M = \mu_{\text{roll}} \cdot F_N \cdot r$




- Normalkraft $\vec{F}_N$
- Graviationskraft $\vec{F}_g$
- Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$

$$\vec{F}_N = \vec{F}_g \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{F}_H = \vec{F}_g \cdot \sin(\alpha)$$

Bei welchem Winkel $\alpha$ fängt die Rolle an sich zu drehen?

$$M = \cancel{r} F_H = \mu_{roll} \cdot F_N \cdot \cancel{r}$$

$$\cancel{F_g} \sin\alpha = \mu_{roll} \cancel{F_g} \cos\alpha$$

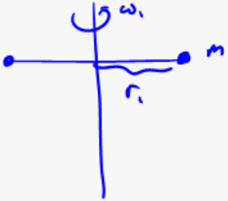
$$\mu_{roll} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\alpha = \arctan(\mu_{roll})$$

$$\tan^{-1}(\mu_{roll})$$

- Kein zusätzliches Drehmoment

• Anziehen der Arme vergrößert die Rotationsgeschwindigkeit





$$I_1 = 2 m r_1^2$$

$$I_2 = 2 m r_2^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$I$: kleiner $\Rightarrow$ $\omega$: größer

$\rightarrow$ schnellere Drehung

Wir nehmen an, es liegt kein äußeres Drehmoment vor:

$$\vec{M} = 0$$

Es gilt $\vec{M} = I\vec{\alpha}$

$$\int \vec{M}\, dt = \int I \vec{\alpha}\, dt$$

$$\underbrace{\int 0\, dt}_{\text{const}} = I \int \frac{d\vec{\omega}}{dt}\, dt = I \int d\vec{\omega}$$

$$= \underbrace{I\vec{\omega}}_{\vec{L}}$$

Drehstuhl:

$$L_1 = L_2$$

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

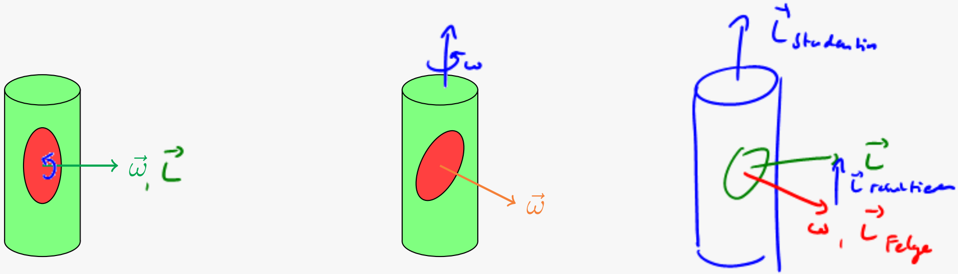
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2mr_1^2}{2mr_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist eine Erhaltungsgröße

# Drehstuhl mit Kreisel

Felge

- Ein sich schnell in der Vertikalen rotierendes Objekt wird verdreht




Drehimpulserhaltung gilt vektoriell

- $\vec{\omega}$ ist ein **Axialvektor**
- $\Rightarrow$ Auch $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ist ein Axialvektor
- Ausserdem: $\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{M}$

Es gilt für einen Massepunkt:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\int \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) dt = \int \frac{d\vec{L}}{dt}\, dt$$

$$\vec{r} \times \int \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \vec{L}$$

$$\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ort | $\vec{r}$ , $\vec{s}$ | Winkel | $\varphi$ | |
| Zeit | $t$ | Zeit | $t$ | |
| Geschwindigkeit | $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ | Winkelgeschwindigkeit | $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$ | $\vec{\omega} \sim \vec{r} \times \vec{v}$ |
| Beschleunigung | $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ | Winkelbeschleunigung | $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ | $\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a}$ |
| Masse | $m$ | Trägheitsmoment | $I = \sum_i m_i r_i^2$ | |
| Kraft | $\vec{F} = m\vec{a}$ | Drehmoment | $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ | $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ |
| Kinetische Energie | $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ | Rotationsenergie | $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ | |
| Impuls | $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ | Drehimpuls | $\vec{L} = I\vec{\omega}$ | $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ |

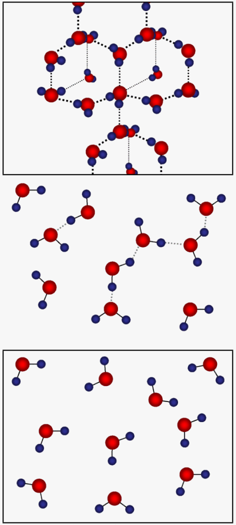
# Vergleich Translation Rotation

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ort | $\vec{s}$ | Winkel | $\varphi$ |
| Zeit | $t$ | Zeit | $t$ |
| Geschwindigkeit | $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ | Winkelgeschwindigkeit | $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$ |
| Beschleunigung | $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ | Winkelbeschleunigung | $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ |
| Masse | $m$ | Trägheitsmoment | $I = \sum_i m_i r_i^2$ |
| Kraft | $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ | Drehmoment | $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$ |
| Kinetische Energie | $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$ | Rotationsenergie | $E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$ |
| Impuls | $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ | Drehimpuls | $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ |

# Übersicht

# Aggregatzustände

- Festkörper
  - Bestimmte Gestalt **formstabil**
  - Bestimmtes Volumen **volumenstabil**
  - Bei kleinen Kräften **formelastisch**
- Flüssigkeiten
  - Festes Volumen $\rightarrow$ volumenstabil
  - Aber nicht formstabil
- Gase
  - Nehmen zur Verfügung stehenden Raum ein
  - Volumen leicht veränderbar
  - Weder feste Gestalt noch festes Volumen



Bildquelle http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wasser/wasser.htm

Temperatur $T$ ist ein Maß für die Bewegungsenergie der Moleküle/Atome

Mit hoher Bewegungsenergie können die Bindungen der Moleküle überwunden werden

Mit steigender Temperatur

fest $\rightarrow$ flüssig $\rightarrow$ gasförmig

Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ nimmt dabei ab.

(Ausnahme: Wasser)

# Verformung eines Festkörpers

- Ein fester Körper ist kein starrer Körper!
- Abstand der Bestandteile (Moleküle) ändert sich durch Einwirkung einer Kraft

Elastische Verformung

– kehrt sich von alleine wieder um, wenn die Kraft loslässt

Plastische Verformung

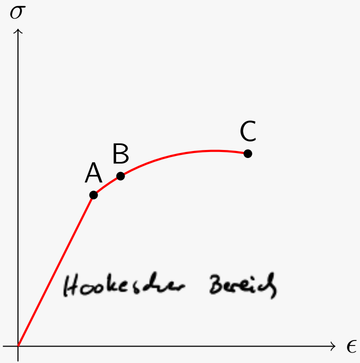
– ist dauerhaft

- Verhältnis der ziehenden Kraft $F$ zur Querschnittsfläche $A$: **Spannung**

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- Relative Längenänderung: **Dehnung**

$$\epsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$




A: Proportionalitätsgrenze

B: Elastizitätsgrenze

C: Reißpunkt

- Im linearen Bereich gilt das Hookesche Gesetz $\epsilon \propto \sigma$
- Die Dehnung ist proportional zur Spannung

$F = A \cdot E \cdot \frac{\Delta l}{l}$

**Elastizitätsmodul $E$**

$\sigma = \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} = E \epsilon$

- $E$ ist ein Maß für die Festigkeit verschiedener Materialien

Feder:

$F = D \cdot \Delta l$

$D = \frac{A E}{l}$

| | |
|---|---|
| Stahl | $200\ \frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{m}^2}$ |
| Kupfer | $115\ \frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{m}^2}$ |
| Blei | $16\ \frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{m}^2}$ |
| Knochen | $9\ \frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{m}^2}$ |