

Physik für Biologen und Zahnmediziner

Kapitel 6: Drehimpuls, Verformung

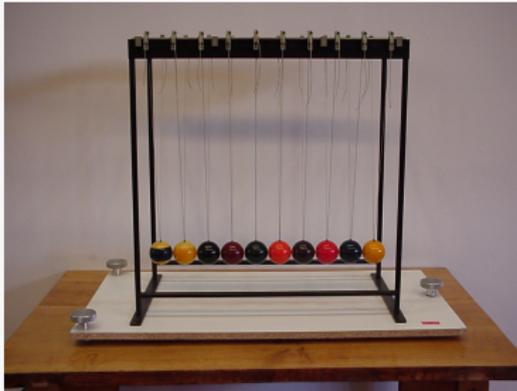
Dr. Daniel Bick



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

24. November 2017



Vorher:

$$m_1 \longrightarrow v_1$$

$$p = m_1 v_1$$

$$v_2 \longleftarrow m_2$$

$$p = m_2 v_2$$

Nachher:

$$v_1' \longleftarrow m_1$$

$$p = m_1 v_1'$$

$$m_2 \longrightarrow v_2'$$

$$p = m_2 v_2'$$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\Rightarrow m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 - \frac{m_2}{m_1} v_2^2$$

Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\Rightarrow v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1} v_2' - \frac{m_2}{m_1} v_2$$

Zentraler elastischer Stoß: $v_2 = 0$



Zentraler elastischer Stoß: $v_2 = 0$

- ① Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1}v_2'^2$
- ② Impulserhaltung: $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' \Rightarrow v_1 = v_1' + \frac{m_2}{m_1}v_2'$

$$v_1^2 = v_1'^2 + \frac{m_2}{m_1}v_2'^2 = v_1'^2 + 2\frac{m_2}{m_1}v_1'v_2' + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2$$

$$\frac{m_2}{m_1}v_2'^2 = 2\frac{m_2}{m_1}v_1'v_2' + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2 \quad \left| : \frac{m_2}{m_1}v_2' \right.$$

$$v_2' = 2v_1' + \frac{m_2}{m_1}v_2' \quad \Rightarrow \quad v_1' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) v_2'$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) v_2' + \frac{m_2}{m_1}v_2' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) v_2' = \frac{m_1 + m_2}{2m_1}v_2'$$

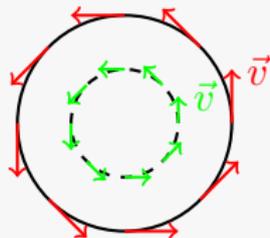
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$$

- 1 Drehungen
 - Trägheitsmoment
 - Rotationsbewegung mit Drehmoment
 - Drehimpuls
- 2 Mechanik deformierbarer Körper
 - Verformung

Kinetische Energie eines rotierenden Körpers

Erinnerung: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$

Beispiel Ring/Scheibe



Ring: Betrag der Geschwindigkeit v ist gleich für jeden Massepunkt.

Scheibe: Lediglich die Winkelgeschwindigkeit ω ist gleich:

Trägheitsmoment I

Dünnere Ring	$m \cdot r^2$
--------------	---------------

Vollzylinder	$\frac{1}{2}m \cdot r^2$
--------------	--------------------------

Hohlzylinder	$\frac{1}{2}m \cdot (r_1^2 + r_2^2)$
--------------	--------------------------------------

Kugel	$\frac{2}{5}m \cdot r^2$
-------	--------------------------

- Das Trägheitsmoment ist ein Maß dafür, wie schwer ein Körper in Drehung zu versetzen ist.
- Für eine punktförmige Masse gilt $I = m \cdot r^2$

Zusammenhang zwischen Drehmoment und Winkelbeschleunigung

Dynamisches Grundgesetz der Rotation

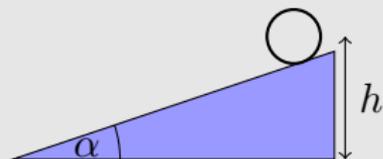
Analogie Translation – Rotation

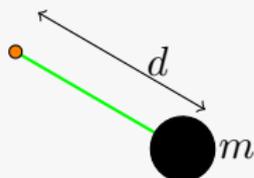
Welche Rolle ist schneller?

Vollzylinder



Hohlzylinder

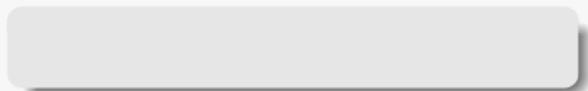




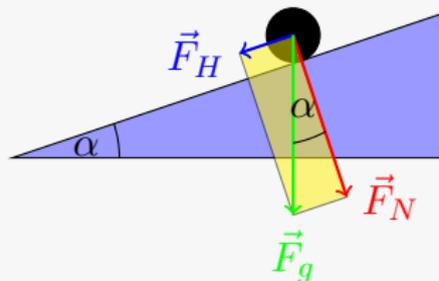
Das Trägheitsmoment eines Körpers bei Drehung um seine Symmetrieachse unterscheidet sich von dem bei Drehung um eine andere Achse.

- Beispiel: Ein rollender Körper dreht sich um seinen Auflagepunkt

Das tatsächliche Trägheitsmoment kann mit dem **Satz von Steiner** berechnet werden:



- Rollreibung wirkt dem Drehmoment entgegen
- Analog zur Gleitreibung: $M = \mu_{\text{roll}} \cdot F_N \cdot r$



- Normalkraft \vec{F}_N
- Graviationskraft \vec{F}_g
- Hangabtriebskraft \vec{F}_H

$$\vec{F}_N = \vec{F}_g \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{F}_H = \vec{F}_g \cdot \sin(\alpha)$$

Bei welchem Winkel α fängt die Rolle an sich zu drehen?

Wir nehmen an, es liegt kein äußeres Drehmoment vor:

- Ein sich schnell in der Vertikalen rotierendes Objekt wird verdreht



Drehimpuls als Vektorgröße

- $\vec{\omega}$ ist ein **Axialvektor**
- \Rightarrow Auch $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ist ein Axialvektor
- Ausserdem: $\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{M}$

Es gilt für einen Massepunkt:

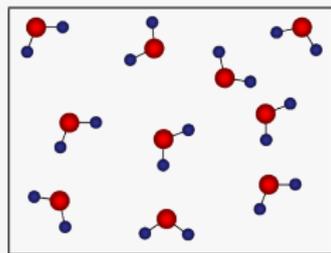
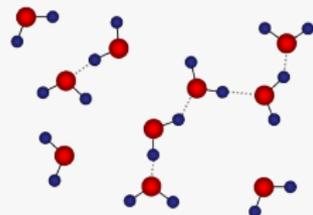
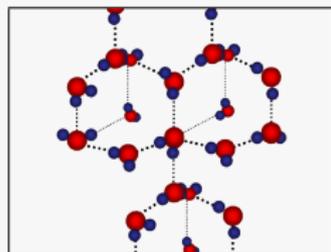
Ort	Winkel
Zeit	Zeit
Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	Winkelbeschleunigung
Masse	Trägheitsmoment
Kraft	Drehmoment
Kinetische Energie	Rotationsenergie
Impuls	Drehimpuls

Ort	\vec{s}	Winkel	φ
Zeit	t	Zeit	t
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Masse	m	Trägheitsmoment	$I = \sum_i m_i r_i^2$
Kraft	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Drehmoment	$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	Rotationsenergie	$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

- 1 Drehungen
 - Trägheitsmoment
 - Rotationsbewegung mit Drehmoment
 - Drehimpuls

- 2 Mechanik deformierbarer Körper
 - Verformung

- Festkörper
 - Bestimmte Gestalt **formstabil**
 - Bestimmtes Volumen **volumenstabil**
 - Bei kleinen Kräften **formelastisch**
- Flüssigkeiten
 - Festes Volumen → volumenstabil
 - Aber nicht formstabil
- Gase
 - Nehmen zur Verfügung stehenden Raum ein
 - Volumen leicht veränderbar
 - Weder feste Gestalt noch festes Volumen

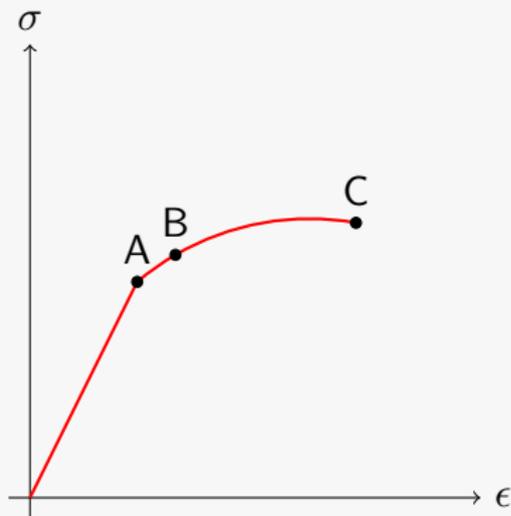


Bildquelle <http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/umat/wasser/wasser.htm>

- Ein fester Körper ist kein starrer Körper!
- Abstand der Bestandteile (Moleküle) ändert sich durch Einwirkung einer Kraft

- Verhältnis der ziehenden Kraft zur Querschnittsfläche:
Spannung

- Relative Längenänderung:
Dehnung



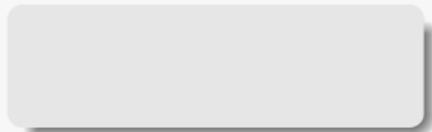
- Im linearen Bereich gilt das Hookesche Gesetz $\epsilon \propto \sigma$
- Die Dehnung ist proportional zur Spannung

Elastizitätsmodul E

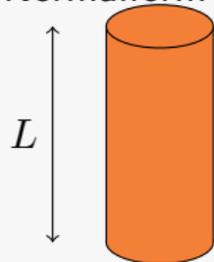
- E ist ein Maß für die Festigkeit verschiedener Materialien

Stahl	$200 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2}$
Kupfer	$115 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2}$
Blei	$16 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2}$
Knochen	$9 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2}$

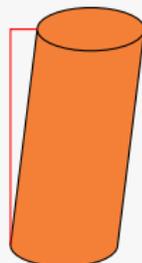
- Bei parallel zu einer Fläche ansetzenden Kräften gilt



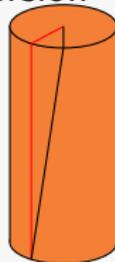
Normalform



Scherung



Torsion



- Eine Kraft F , die senkrecht auf eine Fläche A ausgeübt wird, erzeugt einen Druck p

SI Einheit:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

Weitere Einheiten

- 1 bar = 100000 Pa = 1000 hPa
- 1 Torr = 1 mmHg = ca. 133,3 Pa (→Blutdruck)
- 1 mWs (Meter Wassersäule) = 0,1 at = 9,80665 kPa
- 1 atm (Physik. Atmosphäre) = 760 Torr = 101325 Pa = 1013,25 hPa
- 1 psi=6894,757293168 Pa

- Wird auf ein Gas oder eine Flüssigkeit ein Druck ausgeübt, so ändert sich das Volumen

Aluminium	$\kappa = 1.34 \cdot 10^{-11} \text{m}^2 \text{N}^{-1}$
-----------	---

Wasser	$\kappa = 4.7 \cdot 10^{-10} \text{m}^2 \text{N}^{-1}$
--------	--

Ideales Gas	$\kappa = \frac{1}{P} \approx 10^{-5} \text{m}^2 \text{N}^{-1}$
-------------	---