Physik für Biologen und Zahnmediziner

Kapitel 4: Arbeit, Energie und Meachnik starrer Körper

Dr. Daniel Bick

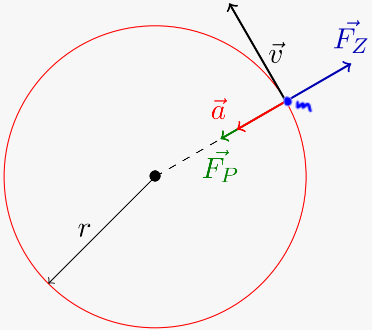
Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

17. November 2017

Übersicht

1. Wiederholung
2. Arbeit und Energie
3. Mechanik starrer, ausgedehnter Körper
   - Schwerpunkt
   - Drehmoment
   - Hebel
   - Gleichgewicht

- Radiale Beschleunigung auf einer Kreisbahn ist zum Mittelpunkt gerichtet



Zentralbeschleunigung $a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$

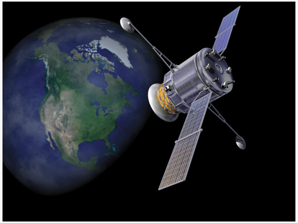
Zentripetalkraft

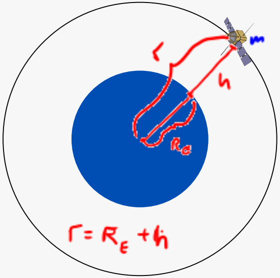
$$\vec{F_P} = m \cdot \vec{a}$$

Die **Zentripetalkraft** ist nach **innen** gerichtet.
Die **Zentrifugalkraft** $\vec{F_Z}$ ist eine **Scheinkraft**, der der Zentripetalkraft **entgegengesetzt** ist.

$$\vec{F_Z} = -\vec{F_P}$$

$$F_Z = m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{m \cdot v^2}{r}$$





$$F_G = G\frac{m M_E}{r^2} \qquad F_Z = \frac{m v^2}{r}$$

Kreisbahn $F_G = F_Z$

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$$

$$G\frac{\cancel{m} m_E}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{r}}$$

$$G\frac{m_E}{r} = v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$T = 24\,h$

$$G\frac{m_E T^2}{4\pi^2} = r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{G\frac{m_E T^2}{4\pi^2}}$$

$$h = r - R_E \quad \Rightarrow h = 35\,786\ \text{km}$$

Übersicht

Merksatz Arbeit = Kraft · Weg

bei konstanter Kraft: $W = F \cdot \Delta s$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

Allgemein $\vec{F}(\vec{s})$

$$W = \int_0^r \vec{F}(\vec{s})\, d\vec{s}$$

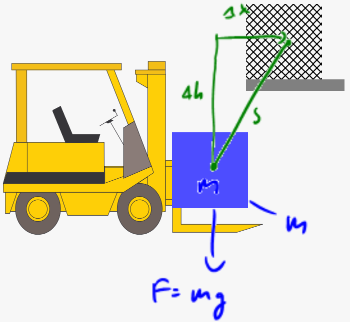
Einheit $[W] = Nm = kg\,\frac{m^2}{s^2} = J$

1 Joule

Arbeit, die nötig ist um eine Masse m um die Höhe Δh anzuheben

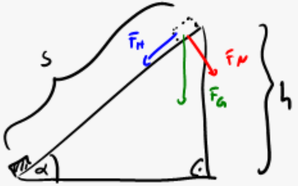
$$W_{Hub} = \vec{F}\cdot\vec{s} = \begin{pmatrix}0\\ mg\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta h\end{pmatrix} = 0\cdot\Delta x + mg\cdot\Delta h$$

$$\underline{W_{Hub} = m\cdot g\cdot\Delta h}$$



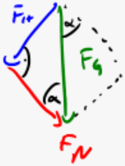
Arbeit auf einer schiefen Ebene

Ohne Reibung



$$\frac{F_H}{F_G} = \frac{h}{s} = \sin\alpha$$

$$F_H = \frac{h}{s} \cdot F_G$$



$$W = F_H \cdot s = \frac{h}{\cancel{s}} \underbrace{F_g}_{m \cdot g} \cdot \cancel{s} = m \cdot g \cdot h$$

Konservative Kräfte

Definition

Eine Kraft ist dann **konservativ**, wenn die **Arbeit**, die man aufbringen muss um von einem Punkt zum anderen zu gelangen **wegunabhängig** ist.

- Homogene, ortsunabhängige Kräfte z.B. F_G
- Zentralkraft

Gegenbeispiele

- zeitabhängige Kräfte
- Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Eine Masse, an der ich Hubarbeit verrichtet habe, kann anschließend selber wieder Arbeit leisten

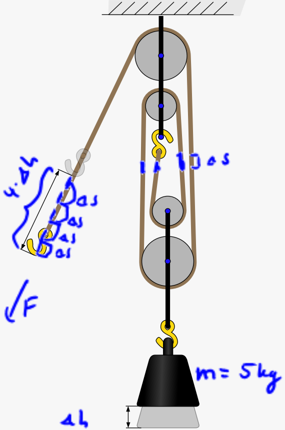
→ gespeichertes Arbeitsvermögen

Potentielle Energie

$$\boxed{E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$

Beispiel Flaschenzug

Mit welcher Kraft F muss man ziehen um das Gewicht anzuheben?



$\downarrow F_G = m \cdot g \approx 50 N$

z.B. $m = 5\,kg$ um $\Delta h = 10\,cm$ anheben

Ohne Flaschenzug $F_g = m \cdot g \approx 5\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} = 50\,N$

$$W = F \cdot 4 \cdot \cancel{\Delta h} = m \cdot g \cdot \cancel{\Delta h}$$

$$F = \frac{m \cdot g}{4} \approx 12.5\,N$$

Leistung = Arbeit pro Zeit

$P = \frac{W}{t}$ $\qquad [P] = \frac{J}{s} = W$ $\qquad$ 1 Watt

$\Rightarrow W = Pt$ $\qquad \Rightarrow 1\,J = 1\,W \cdot s$

Gebräuchliche Einheit für die Energie kWh

$= 1000\,W \cdot 3600\,s$

$= 3600000\,Ws$

$= 3.6 \times 10^6\,Ws$

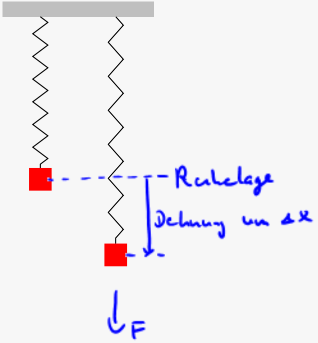
$= 3.6\,MWs$

$= 3.6\,MJ$

Bsp Flaschenzug

Ziehen mit Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv$$



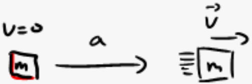
Hookesches Gesetz: $F(s) = D \cdot s$

$$W = \int_0^x F\,ds$$

$$W = \int_0^x D s\,ds = \left[\frac{1}{2} D s^2\right]_0^x = \frac{1}{2} D x^2$$

$$W_{Feder} = \frac{1}{2} D x^2 \qquad E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2$$

Beschleunigungsarbeit



Gleichmäßige Beschleunigung $\vec{a}$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$W = \vec{F}\vec{s} = m \cdot \vec{a} \cdot \vec{s}$

$\vec{a} \parallel \vec{s}$

$W = m \cdot a \cdot s$

Bewegungsgl. $s = \frac{1}{2} a t^2$

$= m \cdot a \, \frac{1}{2} a t^2 = m \cdot \frac{1}{2} a^2 t^2$

$v = at$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m v^2}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

Energie, die in der Bewegung steckt

Energieerhaltung:

Die Summe von potentieller und kinetischer Energie ist konstant

Mit welcher Geschwindigkeit kommt der Klotz an? (freier Fall)

oben $E_{pot} + E_{kin} = m \cdot g \cdot h + 0$

unten " $= 0 + \frac{1}{2} m v^2$

$$\Rightarrow \cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2$$

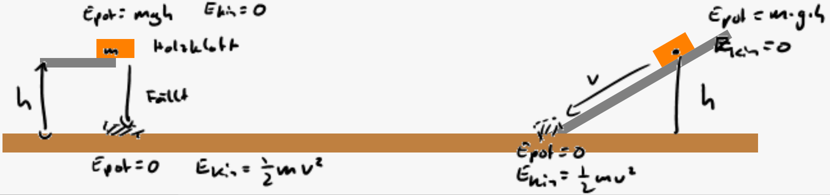
$$\Rightarrow 2gh = v^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2gh} = v$$

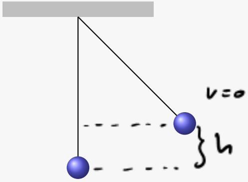
Vergleich $a = g$

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$v = gt = g \cdot \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{2gs}$$



Fadenpendel



$v = 0$ $\quad E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

$v = ?$

$E_{pot} = 0$

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

Potentielle Energie

- Lageenergie
- in Bezug auf eine bestimmte Position
- z.B. Hubarbeit

Kinetische Energie

- Bewegungsenergie, gewonnen durch Beschleunigung

Energie kann die Erscheinungsform ändern, dabei geht aber nichts verloren

Energieerhaltung

In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie immer gleich!

Gestörtes Pendel

A Das Pendel schießt über die ursprüngliche Höhe hinaus.

B Das Pendel erreicht die ursprüngliche Höhe.

C Das Pendel bleibt unter der ursprünglichen Höhe.

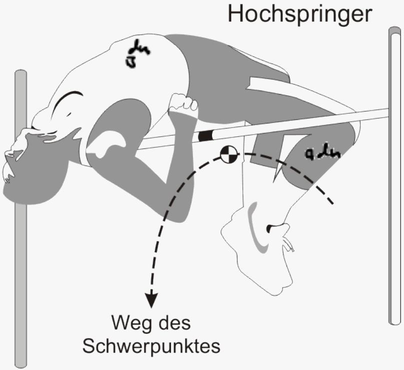
D Das Pendel überschlägt sich.

https://arsnova.eu/mobile/#id/77498708

Übersicht

- **Massenmittelpunkt**
- Punkt, der sich so bewegt, als ob die gesamte Masse dort konzentriert wäre und alle äußeren Kräfte dort ansetzen
- Mit Massen gewichtetes Mittel aller Massepunkte

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Für zwei Körper:

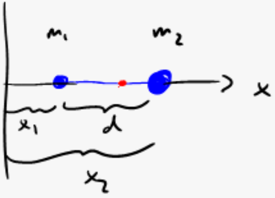
$$\vec{r}_s = \frac{\vec{r}_1 \cdot m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Allgemein:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i \vec{r}_i \cdot m_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \int_K \vec{r}_{(m)} \, dm$$

Massen seien starr verbunden

→ wähle Koordinatensystem so, dass beide Massen auf der x-Achse sind



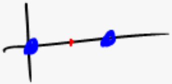
$$X_s = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

$x_1 = 0$

$$x_s = \frac{0 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

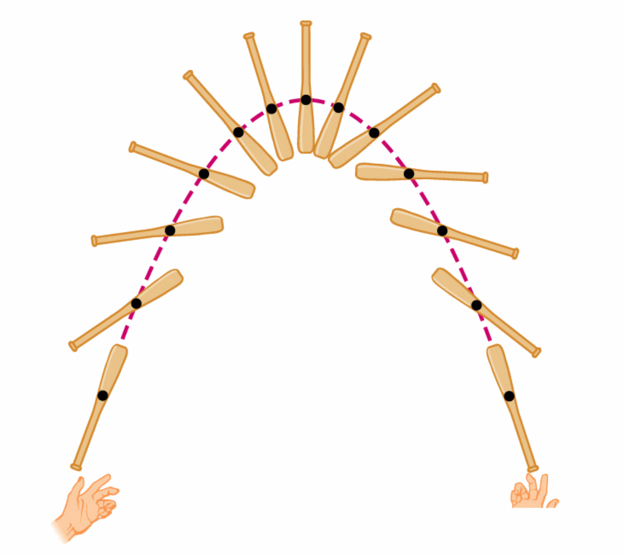
$$= \frac{x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{d\, m_2}{m_1 + m_2}$$

$m_1 = m_2 = m$ $\quad x_1 = 0$



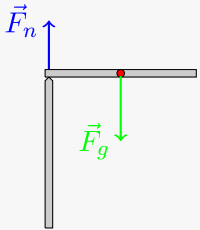
$$x_s = \frac{d \cdot m}{m + m} = \frac{dm}{2m} = \frac{d}{2}$$

Schwerpunktbewegung



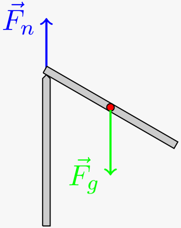
Drehbewegung

- Wenn unterschiedliche Kräfte an unterschiedlichen Punkten angreifen, kann es eine Drehung geben.
- Meistens zusätzliche Translation.



Drehbewegung

- Wenn unterschiedliche Kräfte an unterschiedlichen Punkten angreifen, kann es eine Drehung geben.
- Meistens zusätzliche Translation.

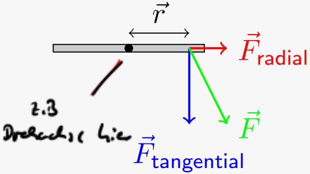


Drehung hängt ab von

- Größe der Kraft $\rightarrow \vec{F}$
- Richtung der Kraft $\rightarrow \vec{F}_{\text{tangential}}$
- Ansatzpunk der Kraft $\rightarrow \vec{r}$

Das **Drehmoment** $\vec{M}$ ist ein Maß für die Drehwirkung

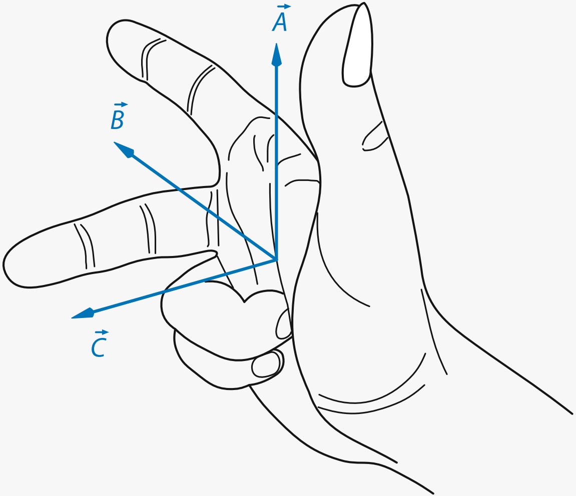
$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



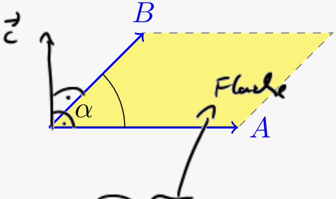
- Richtung von $\vec{M}$ gibt Drehsinn an

$$[M] = [r][F] = Nm = kg\,\frac{m^2}{s^2}$$

Erinnerung: Kreuzprodukt



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

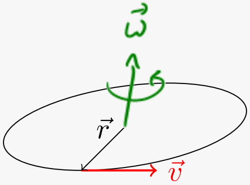


$$C = A \cdot B \cdot \sin\alpha$$

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha$$

Winkelgeschwindigkeit als Vektor

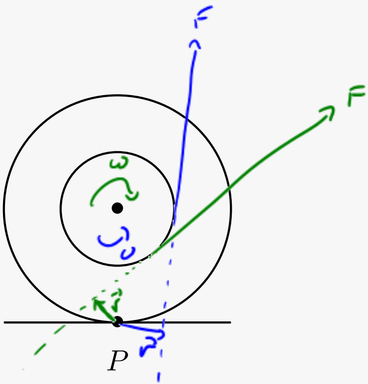
- Bahngeschwindigkeit bisher: $v = \omega \cdot r$
- Zusätzlich: Richtung der Drehachse $\Rightarrow$ vektoriel



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{M}, \vec{\omega}$: Axialvektoren

Garnrolle



- Je nach Winkel des Fadens, an dem ich ziehe, rollt die Garnrolle sich auf oder ab.