Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum: Zusammenfassung aller Folien

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

15. - 24. Oktober 2014

Oganisatorisches

Aufteilung der Vorlesung

Propädeutikum (16. - 24. Okt.) Daniel Bick daniel.bick@desy.de
Physik Teil 1 Björn Wonsak bwonsak@mail.desy.de
Physik Teil 2 Georg Steinbrück georg.steinbrueck@desy.de

Folien zum Propädeutikum:
http://www.desy.de/˜daniel/vorlesung/ws2014

Klausuren zum Praktikum (multiple choice):

1. Mathematische Einführung (20 Fragen)
2. Physik (30 Fragen) $\Leftarrow$ wichtiger!

Skript fürs Propädeutikum, Altklausuren, Übungen mit Lösungen:
http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm/Zahnmedizin.html

Literaturhinweise

- Haas: „Physik für Pharmazeuten und Mediziner“, Wiss. Verlagsges., 7. Auflage (2012), 49,80 €
- Harten: „Physik für Mediziner“, Springer-Lehrbuch, 13. Auflage (2011), 29,95 €
  Online lesbar im Universitätsnetz oder mit Stabi Ausweis
- Hellenthal: „Physik für Mediziner und Biologen“, Wiss. Verlagsges., 8. Auflage (2006), 29,80 €
- Trautwein, Kreibig, Hüttermann: „Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten“, de Gruyter-V., 7. Auflage (2008), 29,95 €
- Tritthart: „Medizinische Physik und Biophysik“, Schattauer-V., 2. Auflage (2011), 39,95 €

Skript von Dr. Salehi:
http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm/Zahnmedizin.html

Propädeutikum Lehrstoff I

Mathematische Hilfsmittel der Physik

- Funktionsbegriff
- Proportionalität und linearer Zusammenhang
- Funktionsgleichung einer Geraden, Graph
- Parabel
- Winkelfunktionen
- Exponentialfunktionen
- Logarithmusfunktionen

Propädeutikum Lehrstoff II

Physikalische Grundlagen

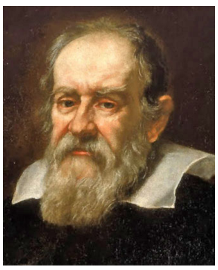
- Physikalische Begriffe und Größen
- Basisgrößen, Basiseinheiten, SI-System
- Abgeleitete Größen und Einheiten
- Vorsilben
- Messungen, Darstellung von Messergebnissen
- Messfehler
- Fehlerrechnung
- Vektoren
- Differentialquotient

Inhalt

Übersicht

Einleitung

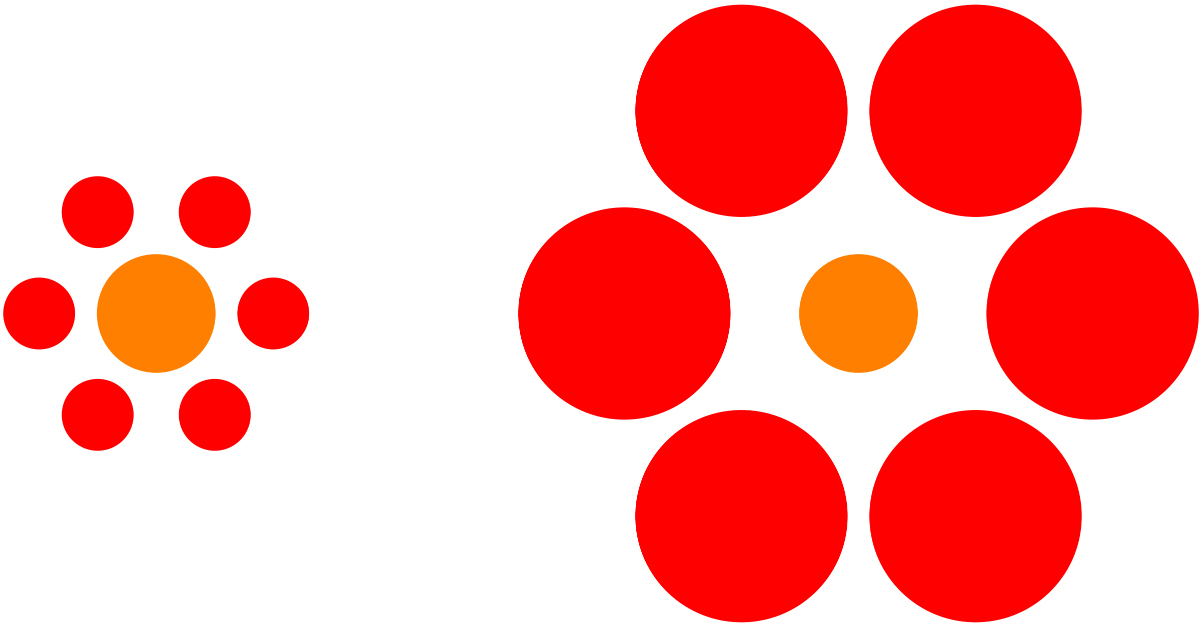
„Keine menschliche Forschung kann man **wahre Wissenschaft** heißen, wenn sie ihren Weg nicht durch die **mathematische Darlegung und Beweisführung** hin nimmt. Sagst du, die Wissenschaften, die vom Anfang bis zum Ende im Geist bleiben, hätten Wahrheit, so wird dies nicht zugestanden, sondern verneint aus vielen Gründen, und vornehmlich deshalb, weil bei solchem reingeistigen Abhandeln die Erfahrung (oder das **Experiment**) nicht vorkommt; ohne dies aber gibt sich kein Ding mit Sicherheit zu erkennen.“
Leonardo Da Vinci, 1452-1519



„**Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben**“
Galileo Galilei, 1564-1642

Titschenersche Täuschung

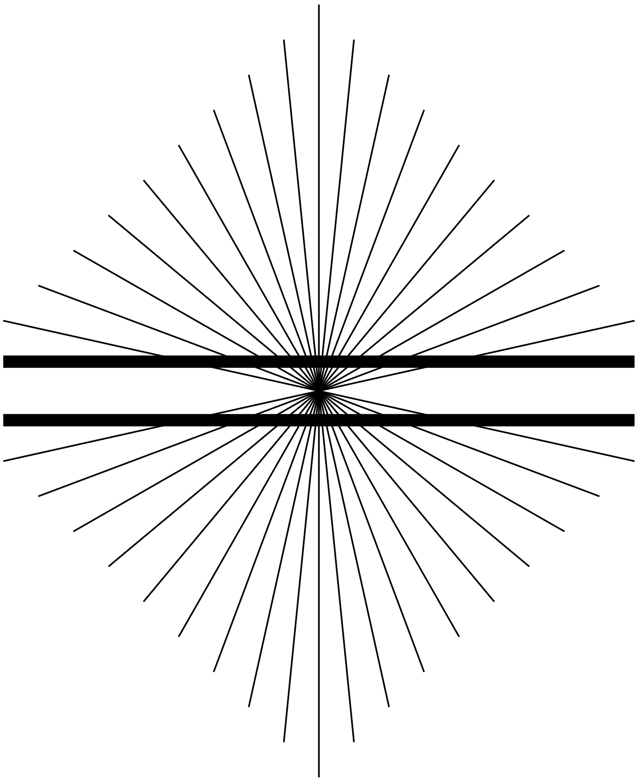
Welcher der beiden orangenen Kreise ist größer?



Beide sind gleich groß! Die Größe eines Objekts wird abhängig von seiner Umgebung wahrgenommen.

Heringsche Täuschung

- Die beiden Linien sind parallel
- Durch das Strahlenbündel erscheinen sie gekrümmt

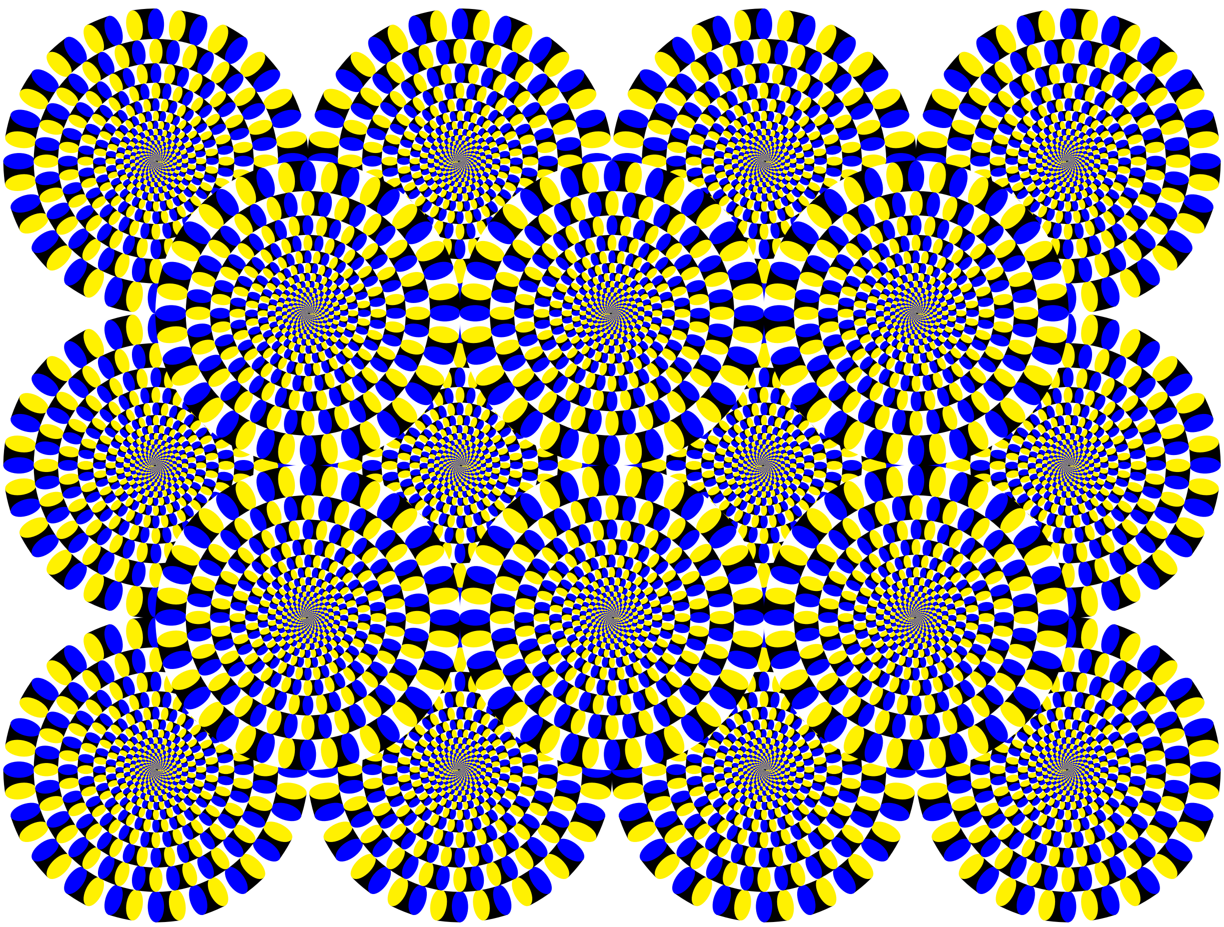


Escher Geometrien

- Paradoxe räumliche Eindrücke
- Auge/Gehirn ist 3D gewohnt

⇒ versucht 2D so zu interpretieren

Rotierende Kreise?



Experimentelles Prinzip

Fazit: Messgeräte unabdingbar, um Beobachtungen unabhängig von Sinneseindrücken zu machen (neutrale Beobachter)

- quantifizierbar
- reproduzierbar
- unbestechlich

Um die Ergebnisse **vergleichbar und bewertbar** (Fehlerrechnung) zu machen, braucht man die Mathematik

Physikalische Arbeitsmethodik

Induktive Methode:

Beobachtung eines Vorgangs

↓

Experiment zur qualitativen und quantitativen Untersuchung des Vorgangs

↓

Modell zur Beschreibung des Vorgangs (und evtl. darüber hinaus)

↓

Gesetz (Verallgemeinerung auf ähnliche Fälle)

↓

Vorhersage neuer Phänomene

Übersicht

Grundbegriffe des Messens

- Gesetze der Physik liefern Zusammenhänge zwischen **physikalischen Größen** wie Länge, Zeit, Kraft, ...
- Meist werden physikalische Größen mit Buchstaben abgekürzt, z.B. Zeit t, Länge L, Kraft F, ...
- Eine physikalische Größe G ist ein Produkt aus Zahlenwert $\{G\}$ und Einheit [G]:

$$G = \{G\} \cdot [\mathrm{G}]$$

z.B. Zeit: $t = 3{,}5\,\mathrm{s}$

Historische Einheiten

Länge

- Häufig über menschl. Körper definiert
- Klafter, Elle, Fuß, Hand, Finger
- engl. Rute $= 5\frac{1}{2}$ Gerten $\approx 5{,}03\,\mathrm{m}$

Gewicht

- Pfund, Unze
- Nürnberger Apotheker-Pfund: $357{,}845\,\mathrm{g} \approx 1\,\mathrm{lb}$
- $1\,\mathrm{lb} = 12$ Unzen $= 96$ Drachmen $= 288$ Skrupel $= 576$ Oboloi $= 5760$ Gran $(1 : 12 : 8 : 3 : 2 : 10)$

Nachteile

- Sehr starke regionale oder individuelle Unterschiede
- Umständliche Umrechnung

Einheiten heute

Metrisches System – Vielfache von 10,100,1000,. . .

z.B.: $100\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{m}$

$1000\,\mathrm{g} = 1\,\mathrm{kg}$

Ausnahme: Zeit

			1 Sekunde
		1 Minute	60 Sekunden
	1 Stunde	60 Minuten	3600 Sekunden
1 Tag	24 Stunden	1440 Minuten	86400 Sekunden

Regionale Ausnahmen: z.B. USA

1 mile	8 furlong	80 chain	1760 yard	5280 foot	63360 inches
			1 yard	3 foot	36 inches
				1 foot	12 inches

Système International d'Unités

Internationales Einheitensystem – SI-Einheiten

Basisgröße	SI-Einheit	Abkürzung
Zeit	Sekunde	s
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

- Alle anderen Einheiten können von diesen sieben **Basiseinheiten** ohne zusätzliche Faktoren abgeleitet werden
- Die Basisgrößen können *beliebig* aber möglichst zweckmäßig festgelegt werden
  - Klafter, Elle, etc. ungeeignet, da nicht leicht reproduzierbar

Definition der SI-Einheiten I

Meter m

Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299792458 Sekunde zurücklegt.

Kilogramm kg

Das Kilogramm ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps.

Sekunde s

Das 9192631770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Cäsium-Isotops ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Ampere A

Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, unendlich lange, geradlinige und im Vakuum im Abstand von 1 m voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorrufen würde.

Definition der SI-Einheiten II

Kelvin K

1 / 273,16 der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts von Wasser genau definierter isotopischer Zusammensetzung.

Mol mol

Die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso viel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 Gramm des Kohlenstoff-Isotops ^{12}C in ungebundenem Zustand enthalten sind.

Candela cd

Die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1 / 683 Watt pro Steradiant beträgt.

Beispiel kg

Willkürliche Definition des Kilogramms:

- kg wird noch durch Referenzkörper definiert
- Urkilogramm: Platin-Iridium-Zylinder in Paris
- Kopien in anderen Ländern

Mögliche Neudefinition:

- Perfekte Kugel aus Silizium-28-Einkristall mit 9,38 cm Radius
- $\rightarrow$ Weniger als 30 nm Abweichung
- Erde mit kleinster Erhebung von 1,82 m

Abgeleitete Größen

- Einheiten bzw. Größen, die sich auf SI-Einheiten bzw. Basisgrößen zurückführen lassen
- Zusammenhang folgt aus Naturgesetzen
- **Wichtig:** Einheiten sind Teil der Gleichungen
- Einheitentest als hilfreiche Kontrolle

Beispiel

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg(intervall)}}{\text{Zeit(intervall)}}$$

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$$

Beispiele für abgeleitete Größen

Größe	**Berechnung**	**Einheit**
Fläche	$A = \text{Länge} \times \text{Breite}$	m^2
Winkel	$\varphi = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$	$\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{m}} = \text{rad}$
Raumwinkel	$\Omega = \frac{\text{Fläche des Kugelausschnitts}}{\text{Quadrat des Kugelradius}}$	$\frac{\mathsf{m}^2}{\mathsf{m}^2} = \text{sr}$
Frequenz	$f = \nu = \frac{1}{\text{Perieodendauer}}$	$\frac{1}{\mathsf{s}} = \text{Hz}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{\text{Wegintervall}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$
Kraft	$\vec{F} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$	$\text{kg}\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2} = \text{N}$
Arbeit, Energie	$W = E = \text{Kraft} \times \text{Weg}$	$\text{kg}\frac{\mathsf{m}^2}{\mathsf{s}^2} = \text{J}$
Leistung	$P = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeitintervall}}$	$\text{kg}\frac{\mathsf{m}^2}{\mathsf{s}^3} = \text{W}$

Beispiele: Umrechnen von Größen

Würfel mit Kantenlänge $l = 10\,\text{cm}$

Volumen:

$$
\begin{aligned}
V &= l^3 \\
V &= 10\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} \\
&= 1000\,\text{cm}^3 \\
&= 0{,}1\,\text{m} \cdot 0{,}1\,\text{m} \cdot 0{,}1\,\text{m} \\
&= 0{,}001\,\text{m}^3
\end{aligned}
$$

Geschwindigkeit v eines Fahrrades

$$
\begin{aligned}
v &= 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\
&= 5\,\frac{1/1000\,\text{km}}{1/3600\,\text{h}} \\
&= 5\,\frac{3600\,\text{km}}{1000\,\text{h}} \\
&= 5 \cdot 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&= 18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}
\end{aligned}
$$

Auswertung eines Experiments

Einfachster Fall: 2 Messgrößen

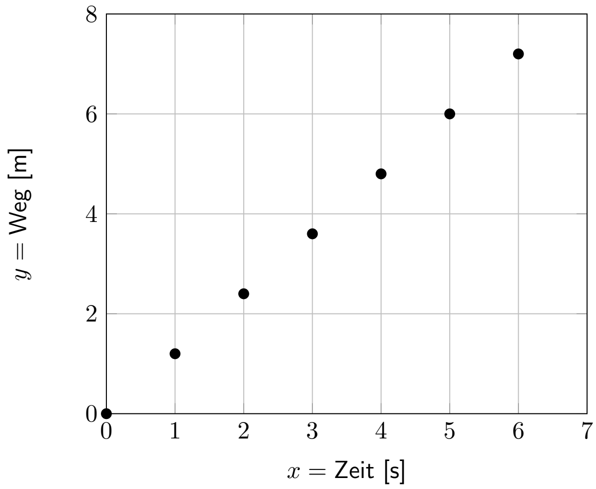
- Z.B.: Zeit t und zurückgelegte Strecke s
- Häufig: experimenteller Parameter (t) und Observable (s)

Beispiel: Bewegung mit $v = 1{,}2\,\text{m/s}$
Darstellung:

Wertetabelle

Zeit [s]	Weg [m]
0	0
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6
6	7.2

Graph



Analytische Beschreibung

Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

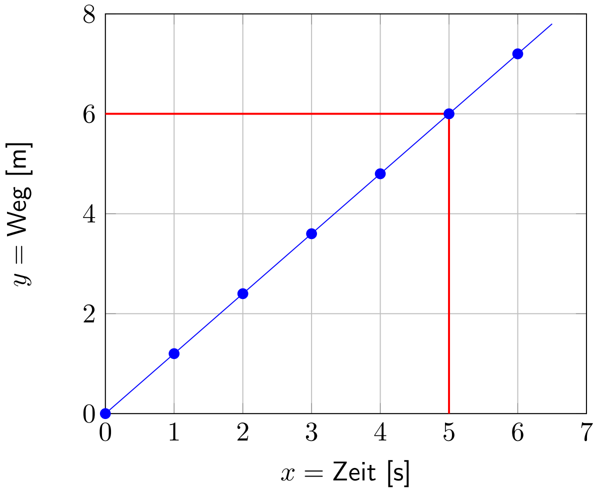
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



z.B.

$$s(5\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m}$$

Analytische Beschreibung

Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

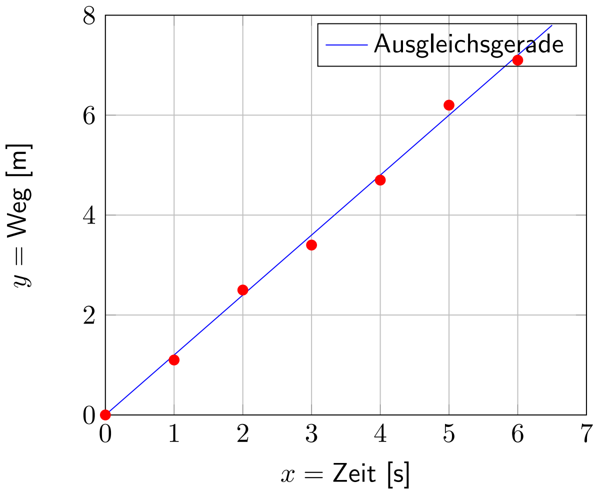
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



Bei einem Experiment nie einfach die Punkte des Graphens aller Messwerte verbinden, sondern **interpolieren** und so die **Ausgleichsgerade** finden!

Übersicht

Der Funktionsbegriff

Definition: Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen D und W, in der jedem Element aus D **ein Bestimmtes** Element aus W zugeordnet ist.

- D=Definitionsmenge
- W=Wertemenge

Lineare Funktion

Allgemeine Geradengleichung

$$f(x) = y = a \cdot x + b$$

b: y-Achsenabschnitt ($f(0) = b$)

Sonderfall: $b = 0$ Proportionalität

$$y \propto x$$

a: Proportionalitätsfaktor

Steigung einer Geraden

Definition der Steigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Für eine Gerade:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

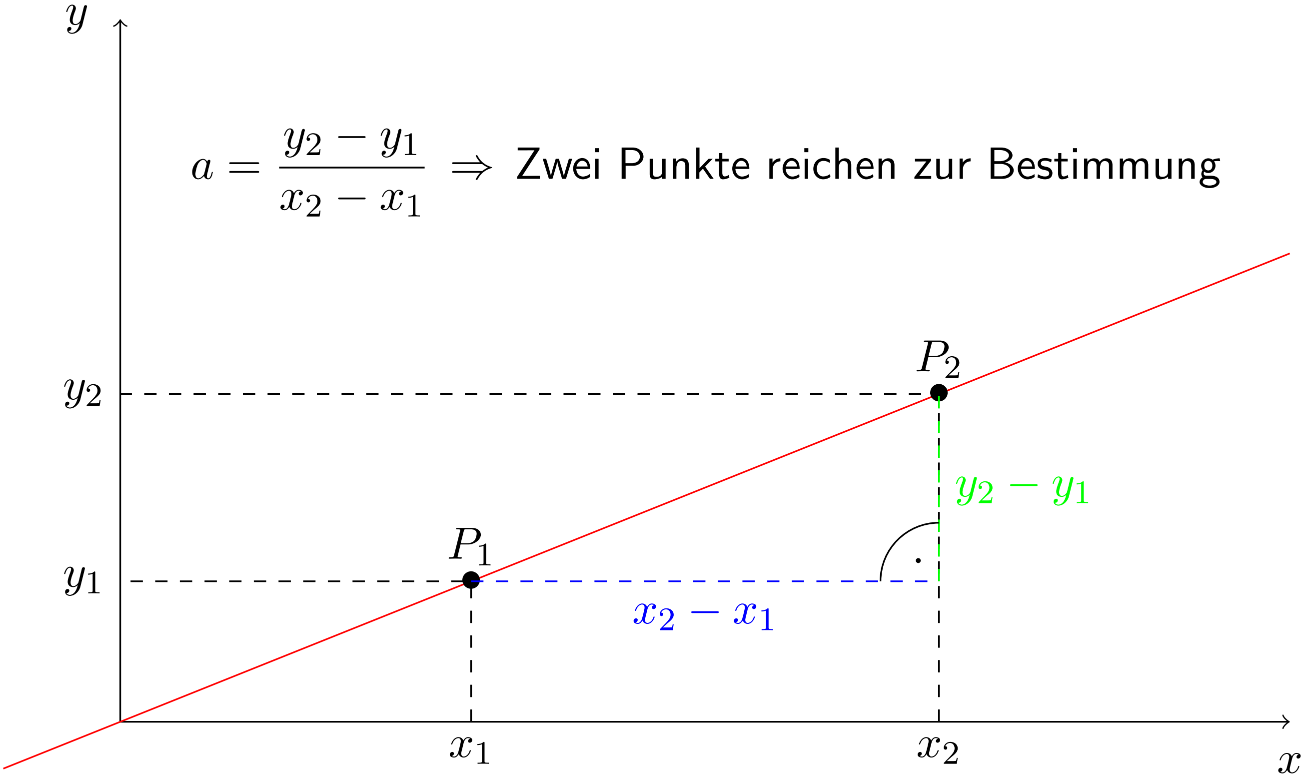
Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a
\end{aligned}$$

Steigung eine Geraden

Steigung $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

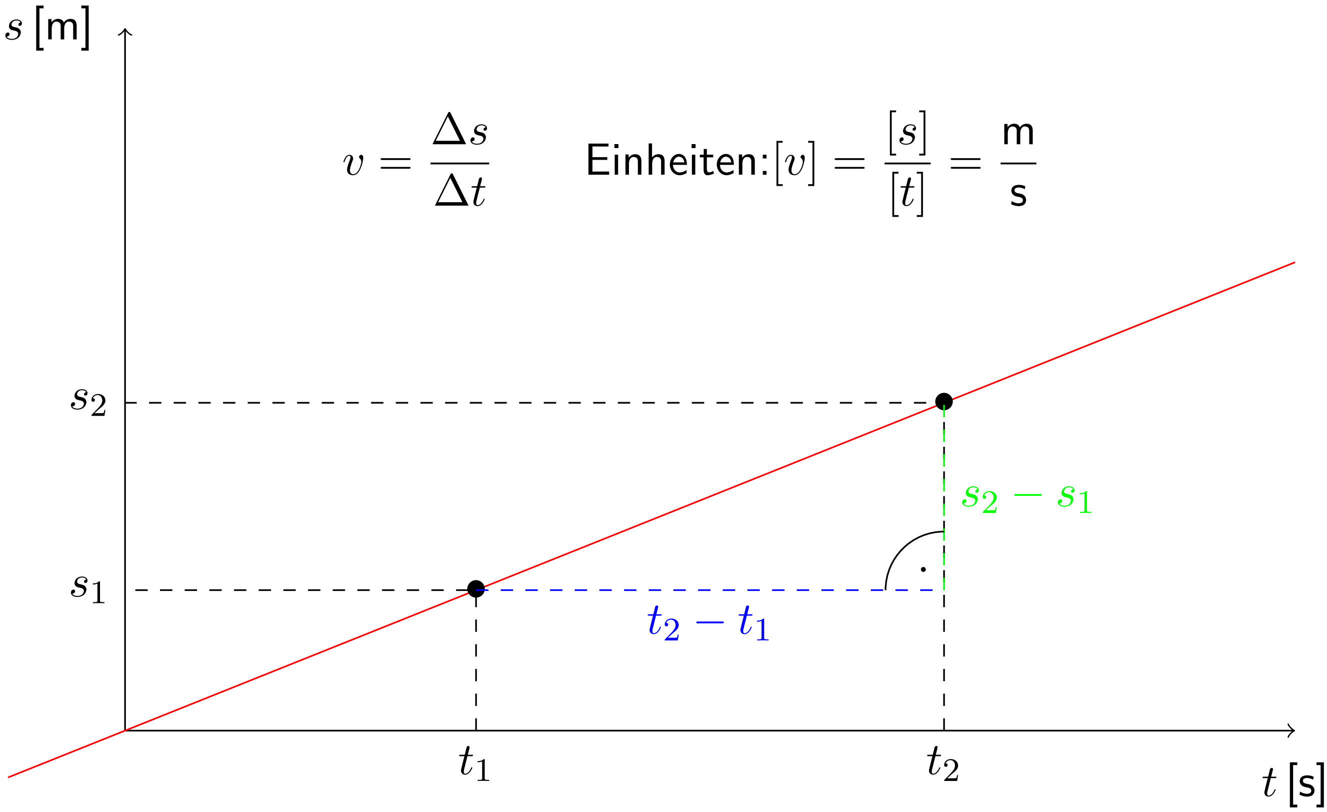
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \text{Zwei Punkte reichen zur Bestimmung}$$



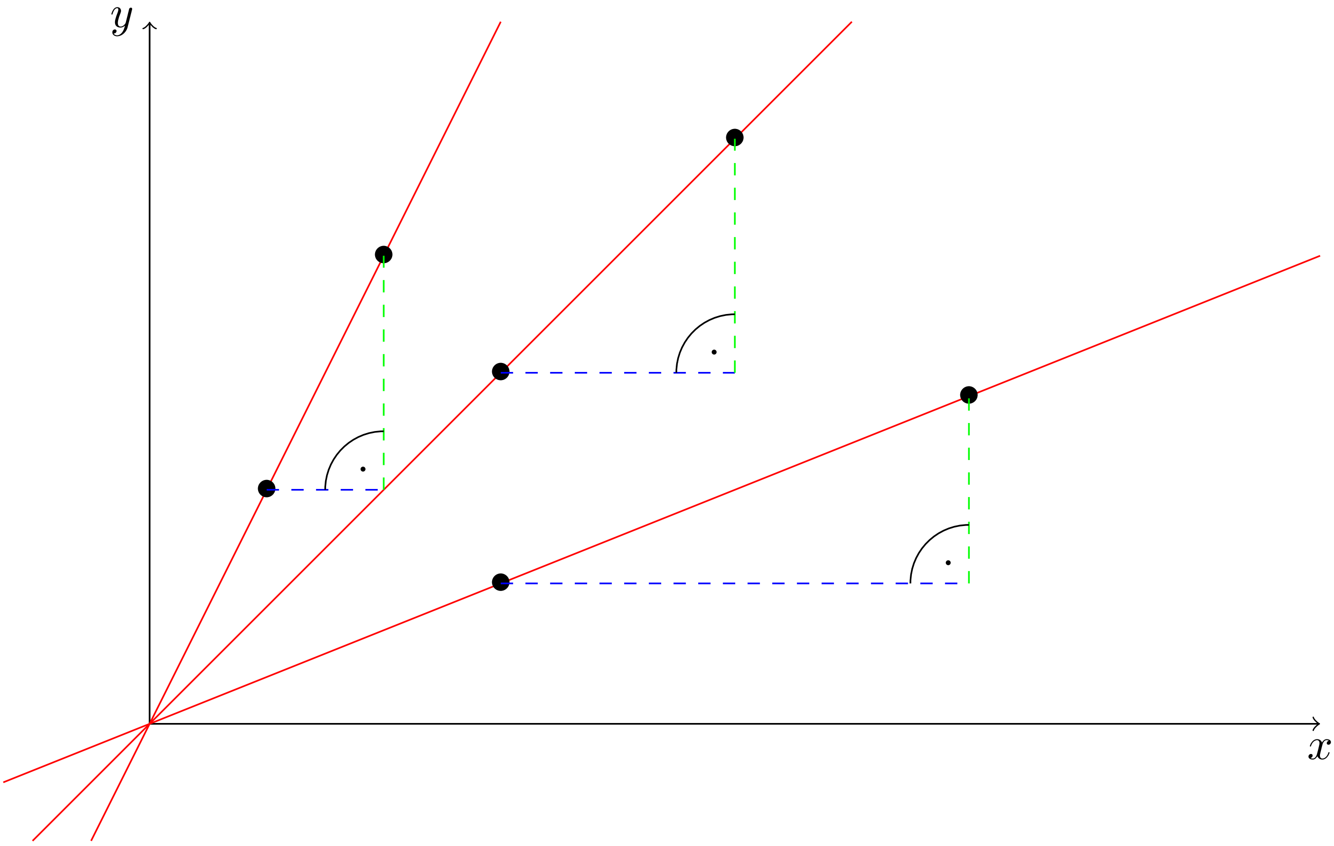
Beispiel: Geschwindigkeit

Geschwindigkeit $= \frac{\text{Zurückgelegter Weg}}{\text{Benötigte Zeit}}$

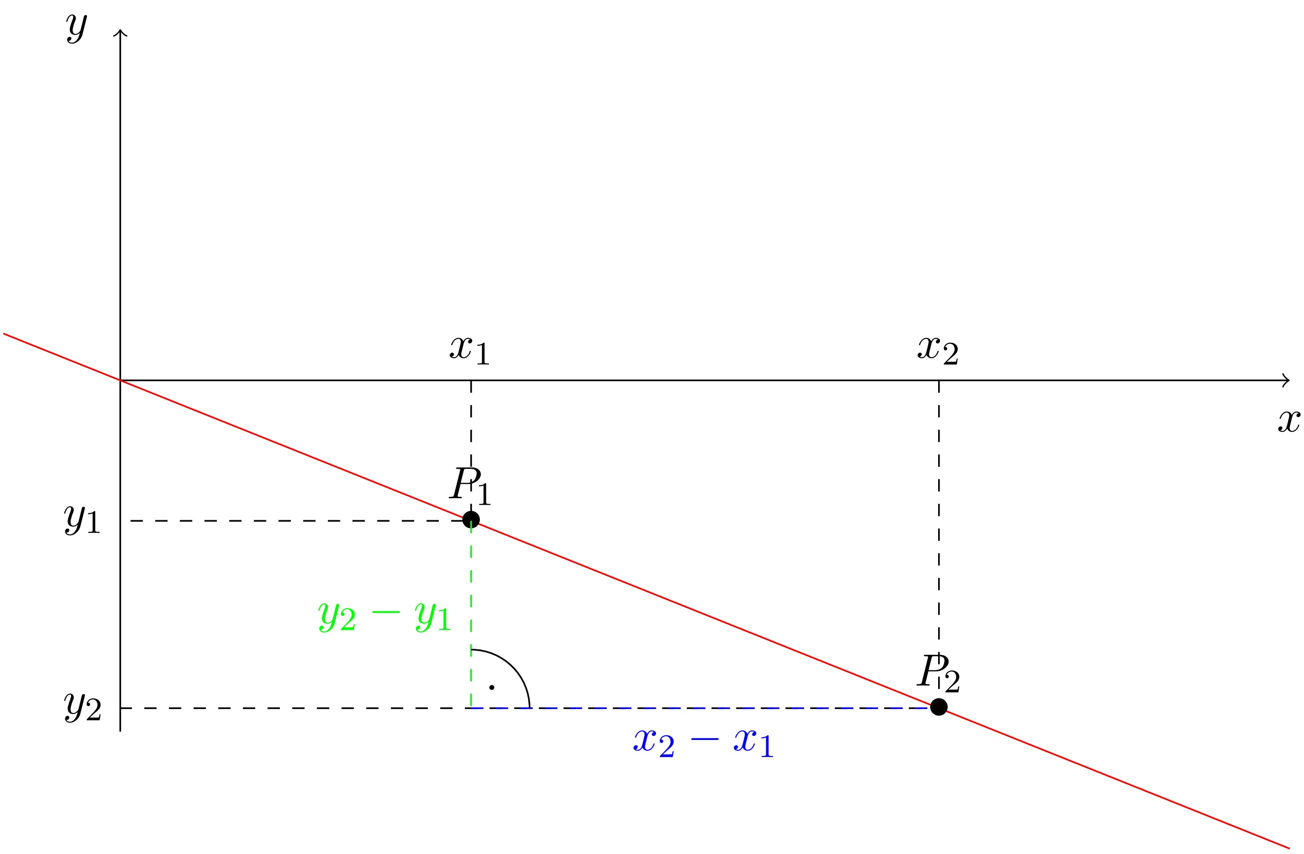
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{Einheiten:} [v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



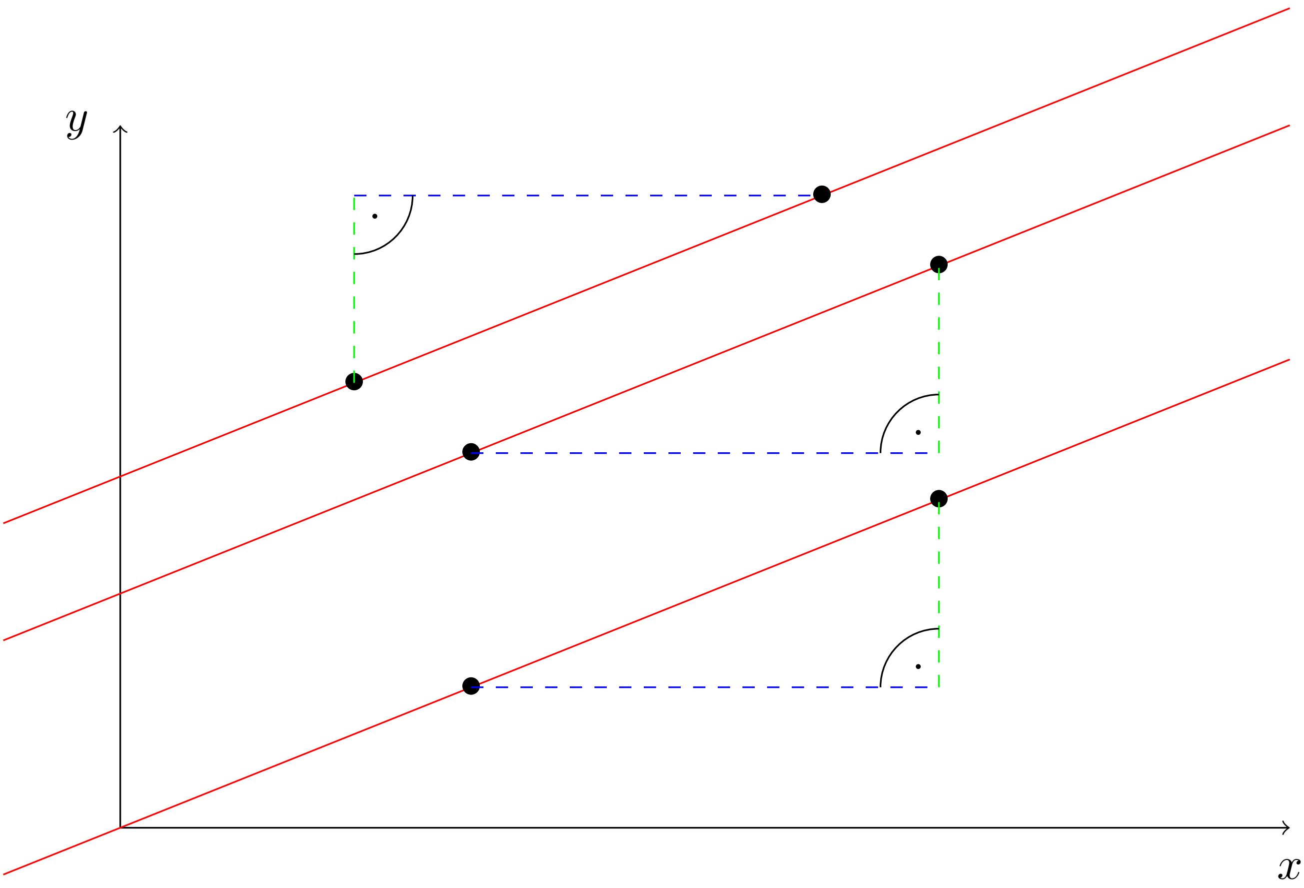
Geraden unterschiedlicher Steigung



Negative Steigung

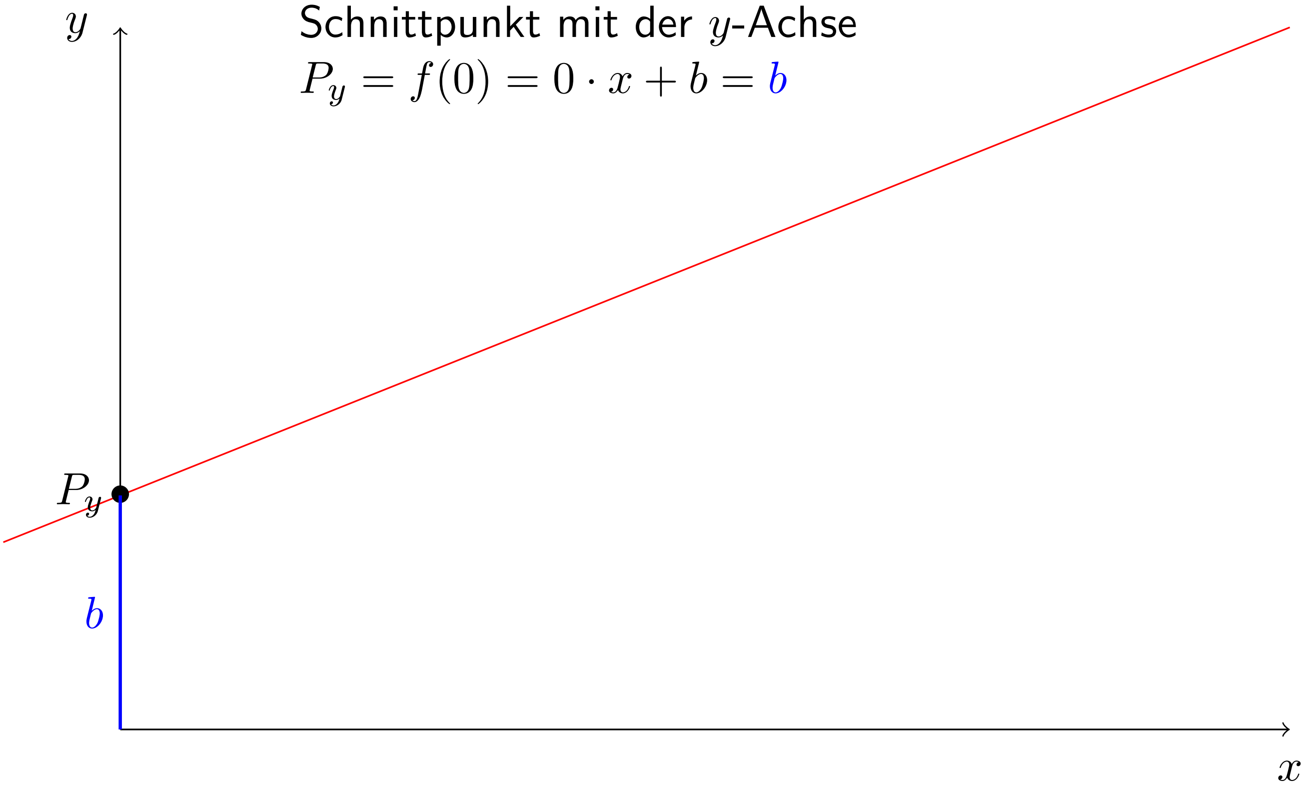


Parallele Geraden



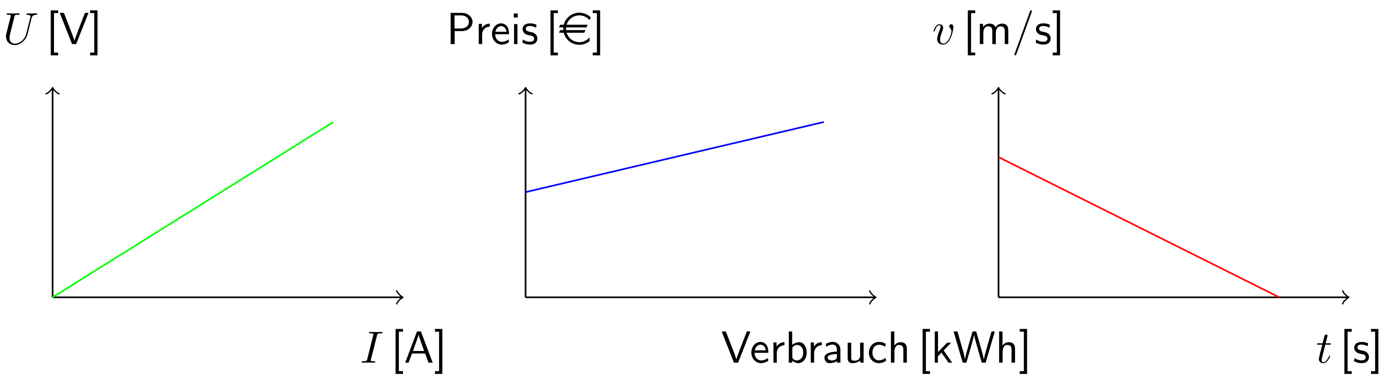
y-Achsenabschnitt

Schnittpunkt mit der y-Achse
$P_y = f(0) = 0 \cdot x + b = b$



Beispiele für lineare Zusammenhänge

- Ohmsches Gestez: $U = R \cdot I$
- Stromkosten: Grundgebühr + Verbrauch
- Gleichförmig verzögerte Bewegung



Übersicht

Potenzieren

Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst

z.B.: $x \cdot x = x^2 \rightarrow$ 2. Potenz von x

- 0. Potenz: $x^0 = 1$
- 1. Potenz: $x = x^1$
- 2. Potenz: $x \cdot x = x^2$
- 3. Potenz: $x \cdot x \cdot x = x^3$
- n. Potenz: $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n} = x^n$

n nennt man **Exponent** oder Hochzahl

Negative Potenzen

Überlegung

$$\begin{aligned} x^n \cdot x &= x^{n+1} \\ x^n \cdot x \cdot \frac{1}{x} &= x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \\ x^n &= x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \frac{1}{x} &= x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^0 &= x^{n-n} \\ &= x^n \cdot x^{-n} \\ &= \frac{x^n}{x^n} = 1 \\ &\Rightarrow x^0 = 1 \end{aligned}$$

Rechnen mit Potenzen

Produkt

$$x^n \cdot x^m = (\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n}) \cdot (\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{m}) = x^{n+m}$$

Quotient

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n \cdot \frac{1}{x^m} = x^n \cdot x^{-m} = x^{n-m}$$

Potenz

$$(x^n)^m = \underbrace{(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n}) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n})}_{m} = x^{n \cdot m}$$

Beispiele: Rechnen mit Potenzen

- $(-1)^6 = ((-1)^2)^3 = 1^3 = 1$
- $(1/10)^4 = (10^{-1})^4 = 10^{-4} = 1/10^4 = 0{,}0001$
- $0{,}1^5 = (1/10)^5 = 0{,}00001$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 = 8 + 16 - 32 = -8$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 = 2^3 + 2^1 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2^3 = 2^3(1 + 2 - 2^2) = 8 \cdot (-1) = -8$
- $a^5 \cdot a^2 / a^4 = a^{(5+2-4)} = a^3$
- $(a/b^2)^3 \cdot (b^2/a)^3 = a^3 \cdot b^{-6} \cdot b^6 \cdot a^{-3} = a^0 \cdot b^0 = 1$
- $a^{-2} \cdot a^{-3} \cdot a^4 = a^{-2-3+4} = a^{-1} = 1/a$
- $(a^{-1} \cdot b^{-5})^{-2} = a^{-1 \cdot -2} \cdot b^{-5 \cdot -2} = a^2 \cdot b^{10}$

Potenzfunktionen

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen
Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

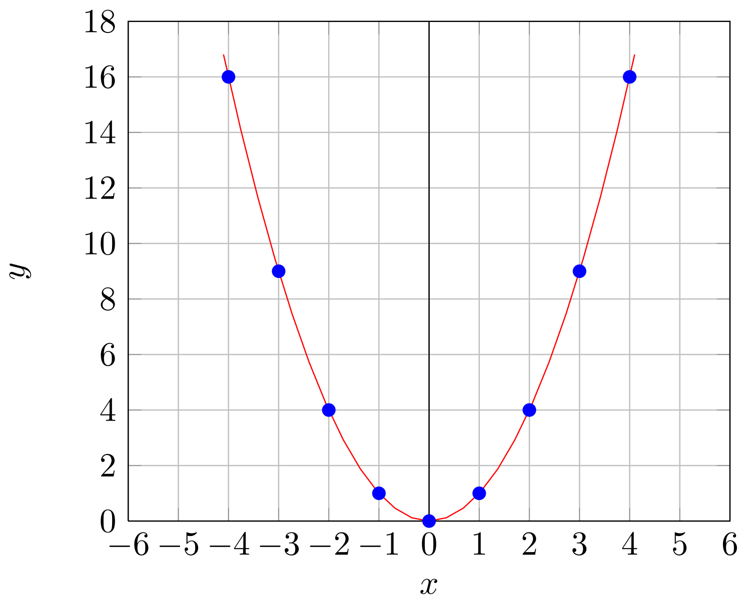
- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1 + b$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Quadratische Gleichung
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- n. Grades: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$

Normalparabel

Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

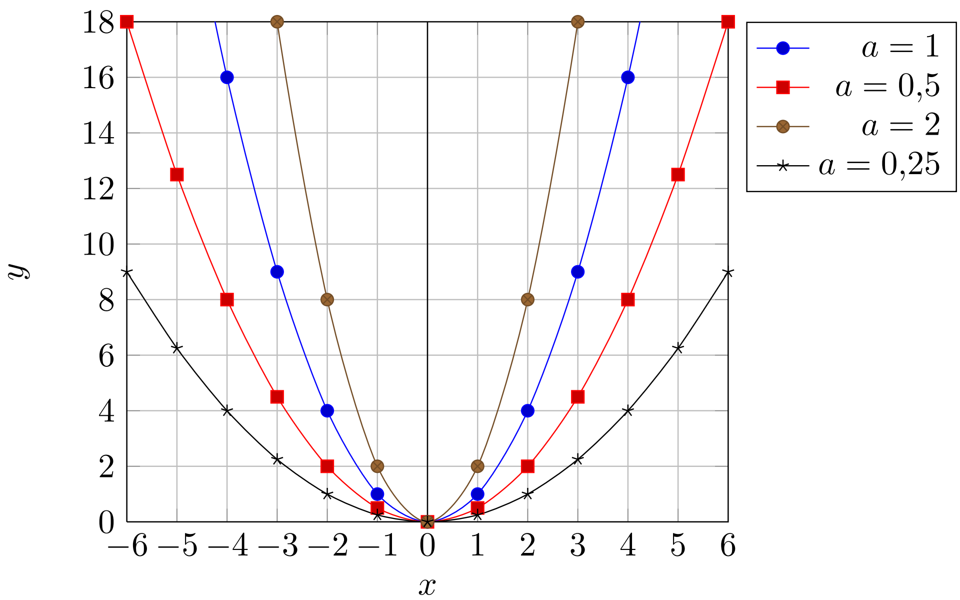
$$f(x) = y = x^2$$

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung

$$f(x) = a \cdot x^2$$

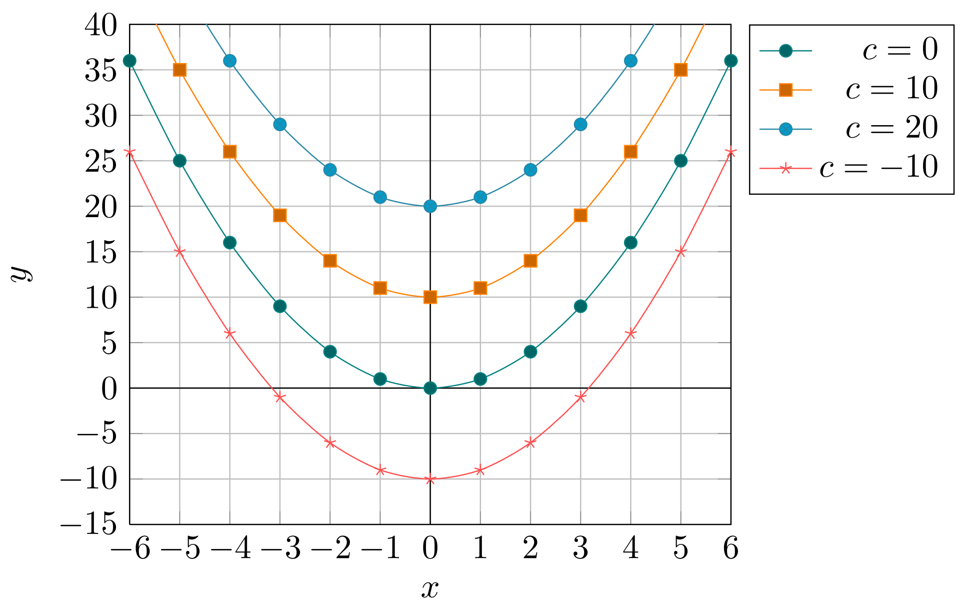


- $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = x^2 \rightarrow$ nur positive Werte
- $f(-x) = f(x) \rightarrow$ symmetrisch zur y-Achse
- $f(0) = 0 \rightarrow$ Scheitelpunkt im Ursprung

Verschieben in y-Richtung

$$f(x) = x^2 + c$$

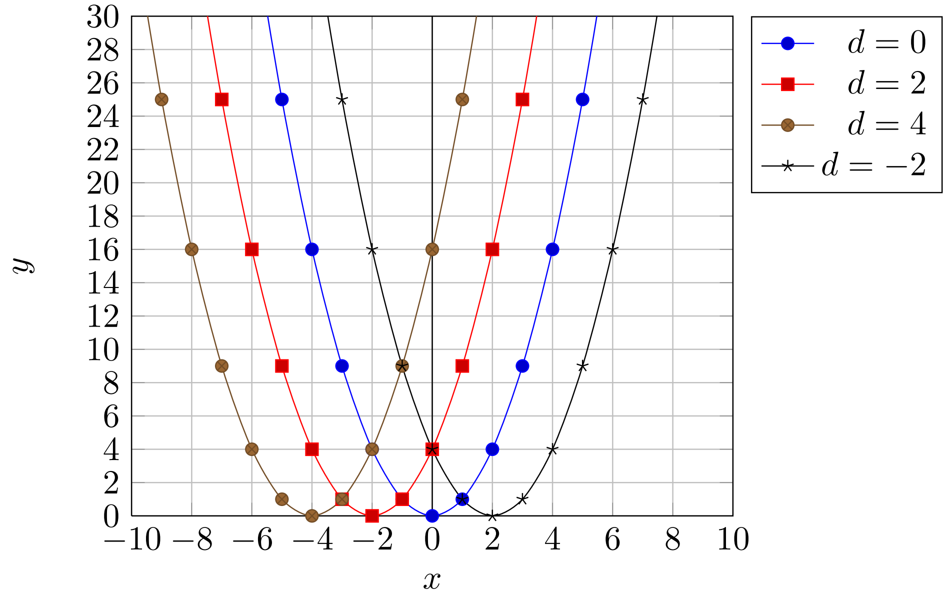
$\Rightarrow$ Scheitelpunkt bei $y_s = c$



Verschieben in x-Richtung

$$f(x) = (x+d)^2$$

1. Binomische Formel: $(x+d)^2 = x^2 + 2d \cdot x + d^2$
Scheitelpunkt bei $x_s = -d$



Parabeln allgemein

Quadratische Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Wie finde ich den Scheitelpunkt S?

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a \cdot x^2 - 2a \cdot x_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s$$

Koeffizientenvergleich:

$b = -2a \cdot x_s \quad \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a}$

$c = a \cdot x_s^2 + y_s \quad \Rightarrow y_s = c - a \cdot x_s^2 = c - \frac{b^2}{4a}$

Scheitelpunktsform

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Meistens ist aber gegeben: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Quadratische Ergänzung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Ausklammern des Leitkoeffizienten

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x \right) + c$$

Quadratische Ergänzung

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x \underbrace{+ \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2}_{=0} \right) + c$$

Binomische Formel *rückwärts*

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Beispiel Quadratische Ergänzung

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

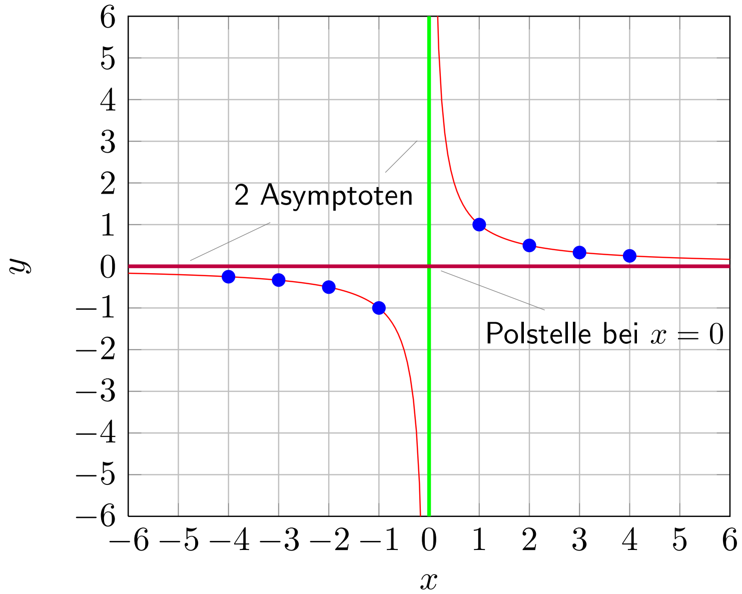
Funktionen mit negativen Potenzen

Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

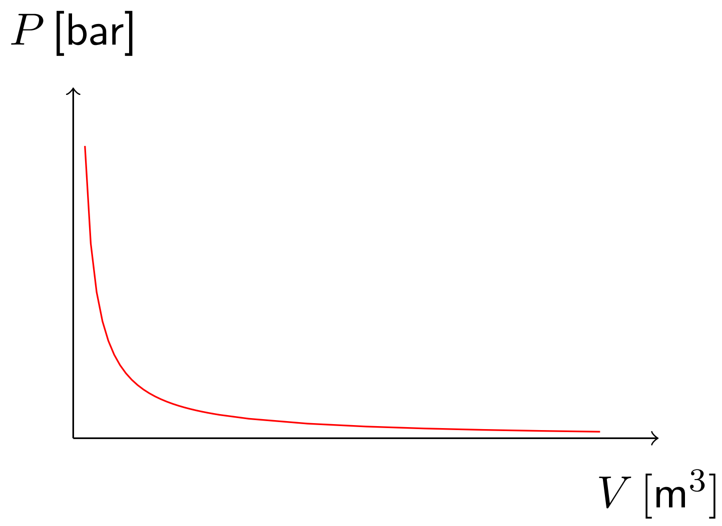
x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25



Beispiel Hyperbel

Gesetz von Boyle-Mariotte Gilt für abgeschlossene Gasmenge bei konstanter Temperatur T mit Volumen V und Druck P

$$P \propto V^{-1} \text{ oder } P = c/V \text{ mit Konstante } c$$



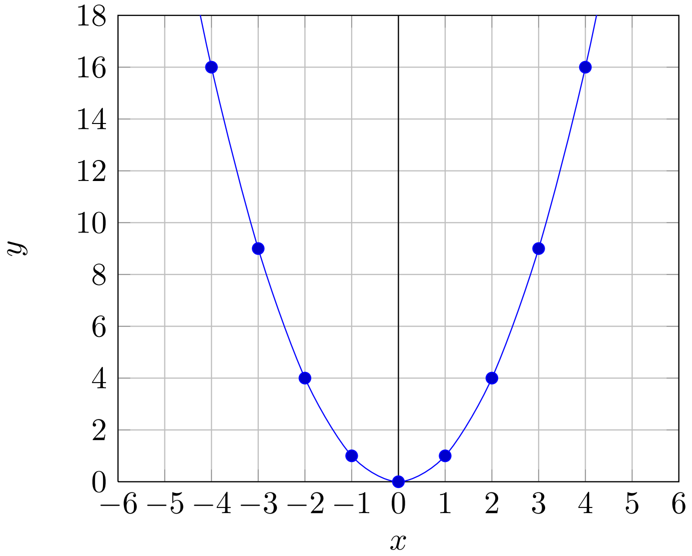
Umkehrfunktionen

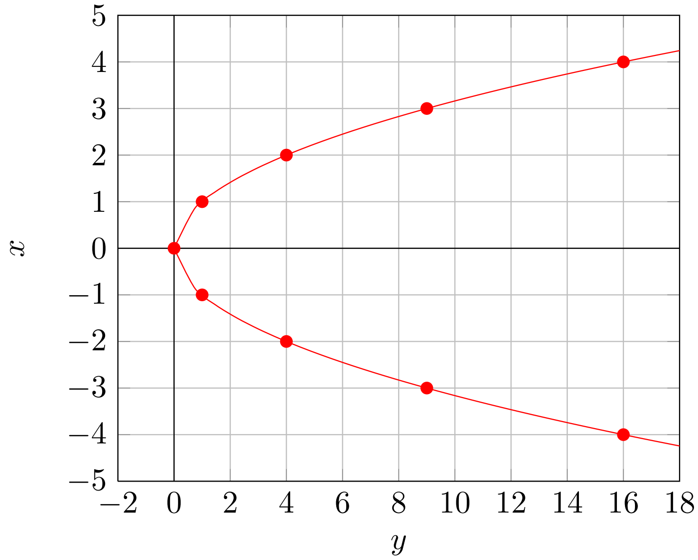
Gegeben: $y = f(x)$
Gesucht: Funktion, die zu jedem y-Wert den zugehörigen x-Wert liefert
Definition: Diese Funktion heißt Umkrehfunktion f^{-1}: $x = f^{-1}(y)$

x	$f(x) = y = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

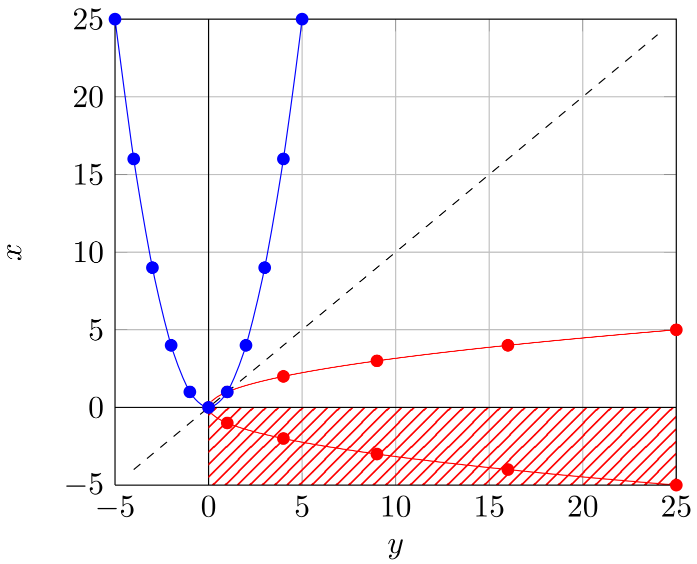
y	$x = f^{-1}(y)$
16	-4
9	-3
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

Graphische Folgen





Normalparabel und Umkehrung



Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

Funktion muss jedem x-Wert **eindeutig** einen Funktionswert y zuordnen

Wurzeln

Wurzel

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Umkehrfunktion zu einfachen Potenzen: $f(x) = x^m$

Rechenregeln wie bei Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

Beispiele: Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$
$$\left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 9 \cdot 2 = 18$$
$$a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$$

Nullstellen einer Quadratischen Gleichung

Nullstelle: $f(x) = y = 0$

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Normierte Form: Teilen durch a

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Mit $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Lösung mit p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

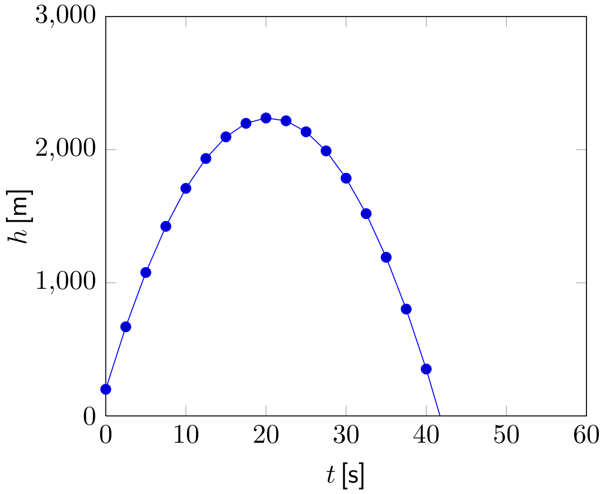
Beispiel: Kanone auf Hügel

Gegeben

- Höhe des Hügels $h_0 = 200\,\mathrm{m}$
- Startgeschwindigkeit in vertikaler Richtung $v_0 = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{mit } g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

Wie lange fliegt die Kugel?



$$h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot \frac{v_0}{g} \cdot t - 2 \cdot \frac{h_0}{g} = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2 \cdot \frac{h_0}{g}}$$

$$t_{1/2} = (20{,}4\,\mathrm{s} \pm 21{,}4\,\mathrm{s})$$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
3. Potenzieren mit m: $\left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$
4. Ziehen der $n$ten Wurzel: $\sqrt[n]{\left(\frac{y-c}{a}\right)^m} = \left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$

Beispiel: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$s(t) = 0{,}5 \cdot a \cdot t^2$$

Multiplikation mit 2:

$$2 \cdot s = a \cdot t^2$$

Division mit a:

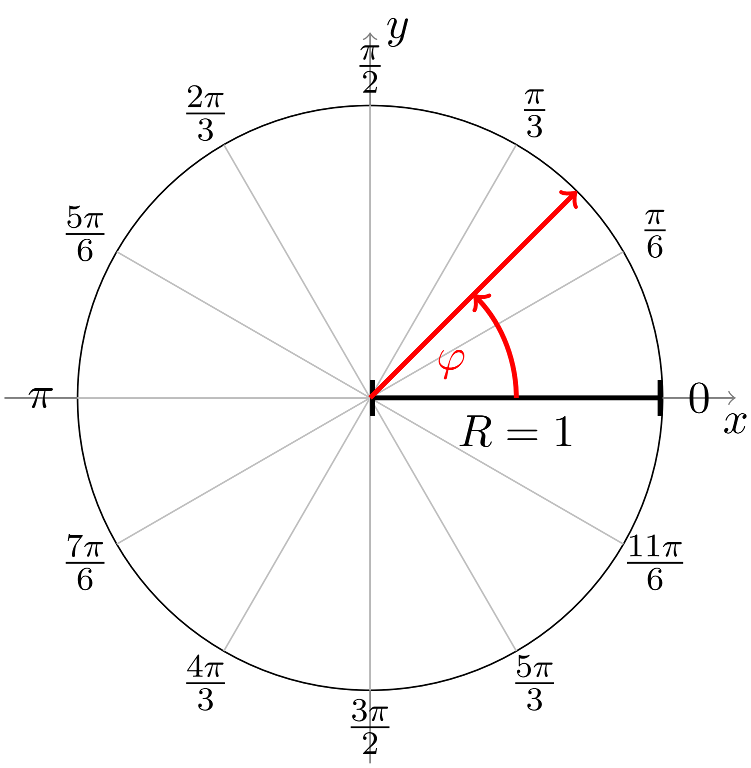
$$2 \cdot \frac{s}{a} = t^2$$

Ziehen der Quadratwurzel:

$$t(s) = \sqrt{2 \cdot \frac{s}{a}}$$

Übersicht

Einheitskreis



- Kreis mit Radius $R = 1$
- Winkel gegen den Uhrzeigersinn definiert (Rechtsdrehung)
- Eine Umdrehung: $360°$
- Kreisumfang: $U = 2\pi R$
- $\rightarrow 360° = 2\pi$ rad $= 2\pi$
- rad=Radiant=Bogenmaß
- Einheit „rad“ wird weggelassen

Umrechnung Grad $\leftrightarrow$ Bogenmaß

- α: Winkel in Grad
- φ: Winkel im Bogenmaß

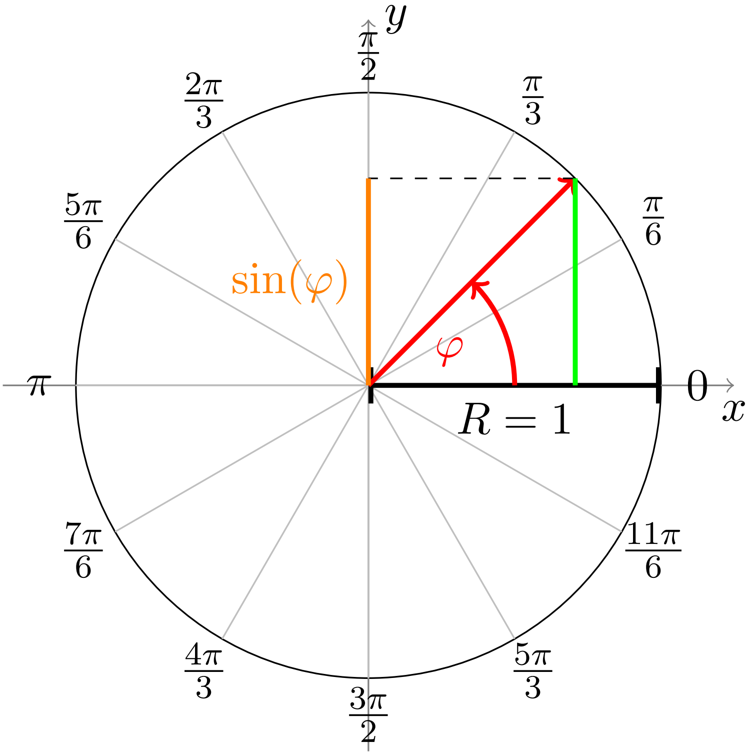
Es gilt:

$$360^\circ \mathrel{\widehat{=}} 2\pi$$

Für den gleichen Winkel $\alpha = \varphi$ folgt also:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \varphi \\
\frac{\alpha}{360^\circ} &= \frac{\varphi}{2\pi} \\
\alpha &= \frac{\varphi}{2\pi} 360^\circ = \varphi \frac{180^\circ}{\pi} \\
\frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi = \alpha \frac{\pi}{180^\circ} &= \varphi
\end{aligned}$$

Sinus-Funktion

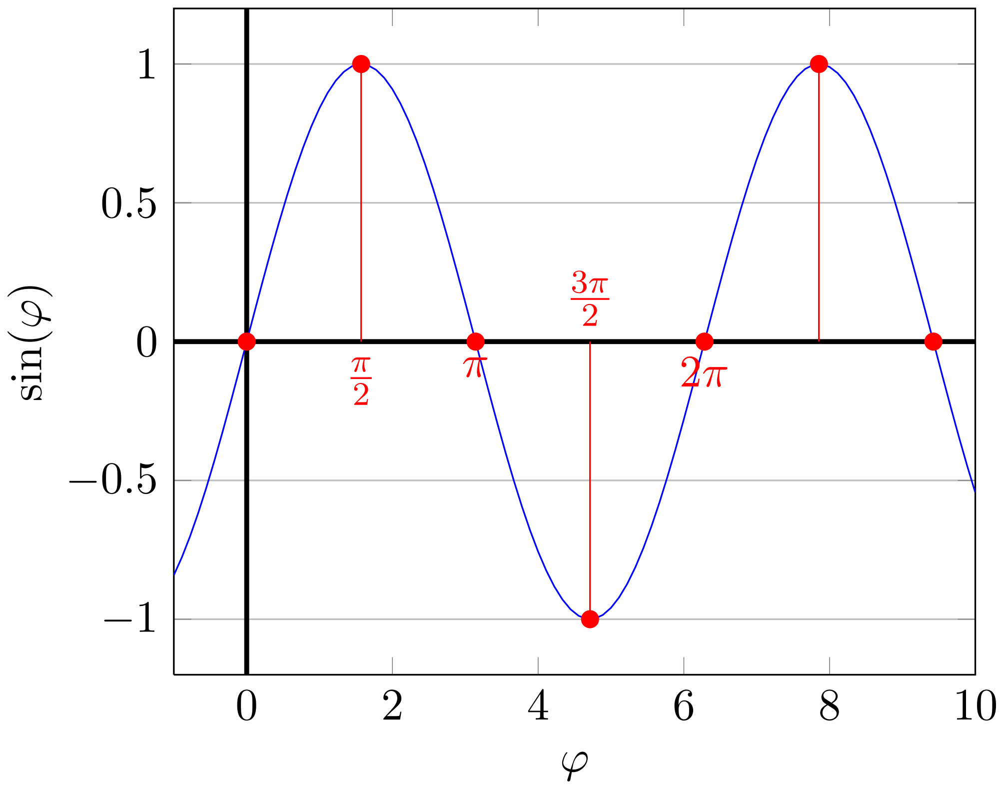


- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- Gegenkathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\begin{aligned}
\sin(0) &= 0 \\
\sin(\pi/2) &= 1 \\
\sin(\pi) &= 0 \\
\sin(3\pi/2) &= -1
\end{aligned}$$

Graphen von Sinus

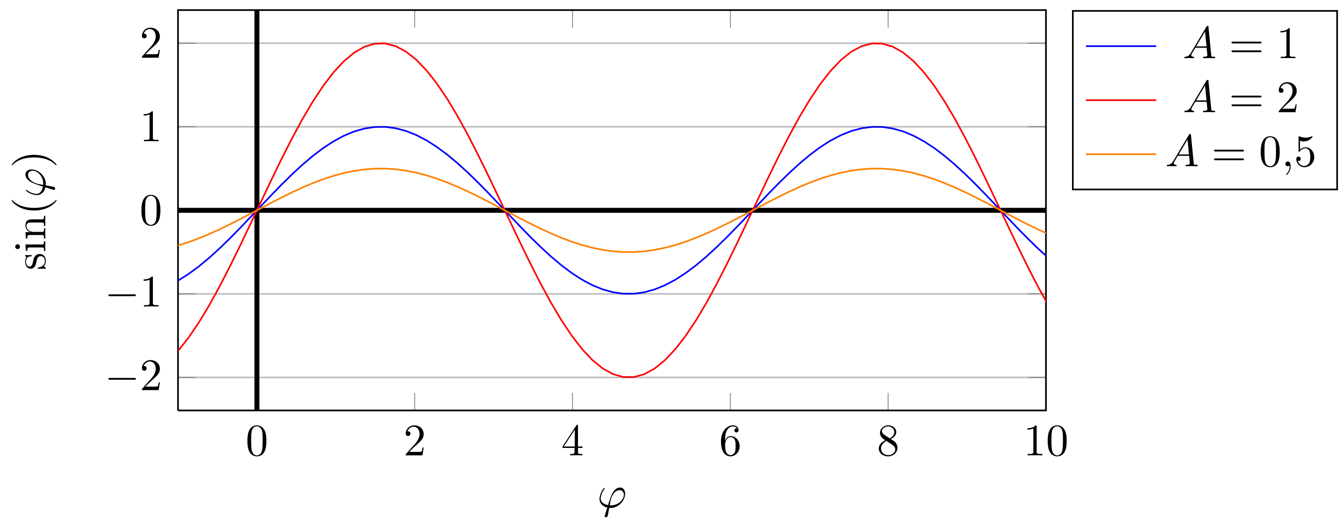


Sinus-Funktion mit Parametern - Amplitude

Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Amplitude: Höhe der Kurve
Entspricht Radius bzw. Hypotenuse

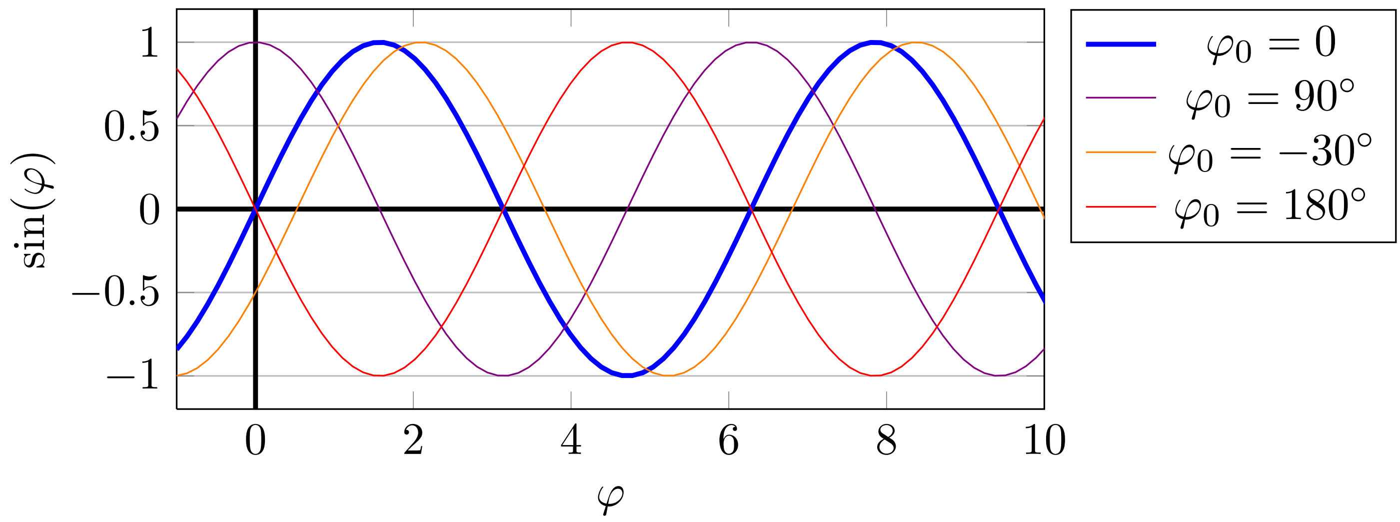


Sinus-Funktion mit Parametern - Phase

Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Phase: Verschiebung entlang x-Achse

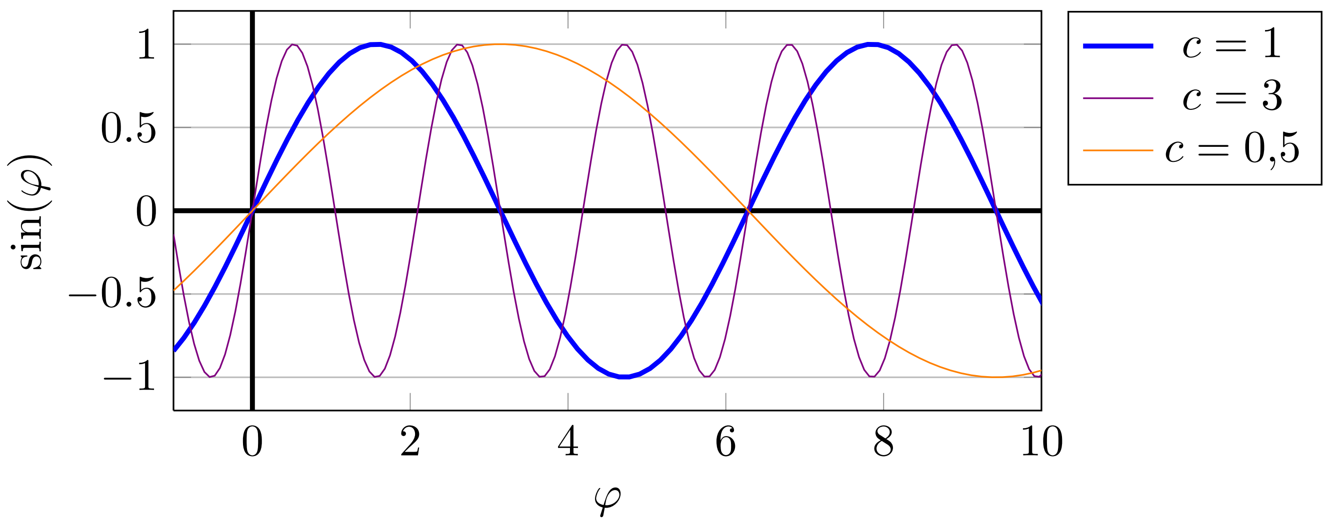


Sinus-Funktion mit Parametern - Periode

Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Periode P: Abstand zwischen zwei gleichen Kurvenpunkten, z.B. Maxima



Periode

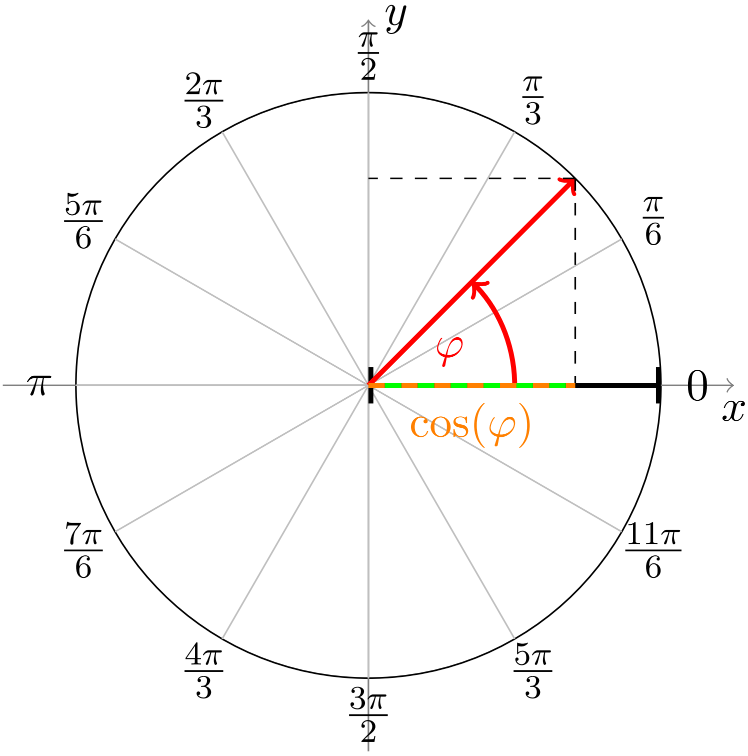
- Normaler Sinus hat die Periode $P = 2\pi$
- Allgemeine Sinus-Funktion mit Periode P:

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{P}\varphi + \varphi_0\right)$$

- Also $c = \frac{2\pi}{P}$ bzw.:

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{c}}$$

Cosinus-Funktion

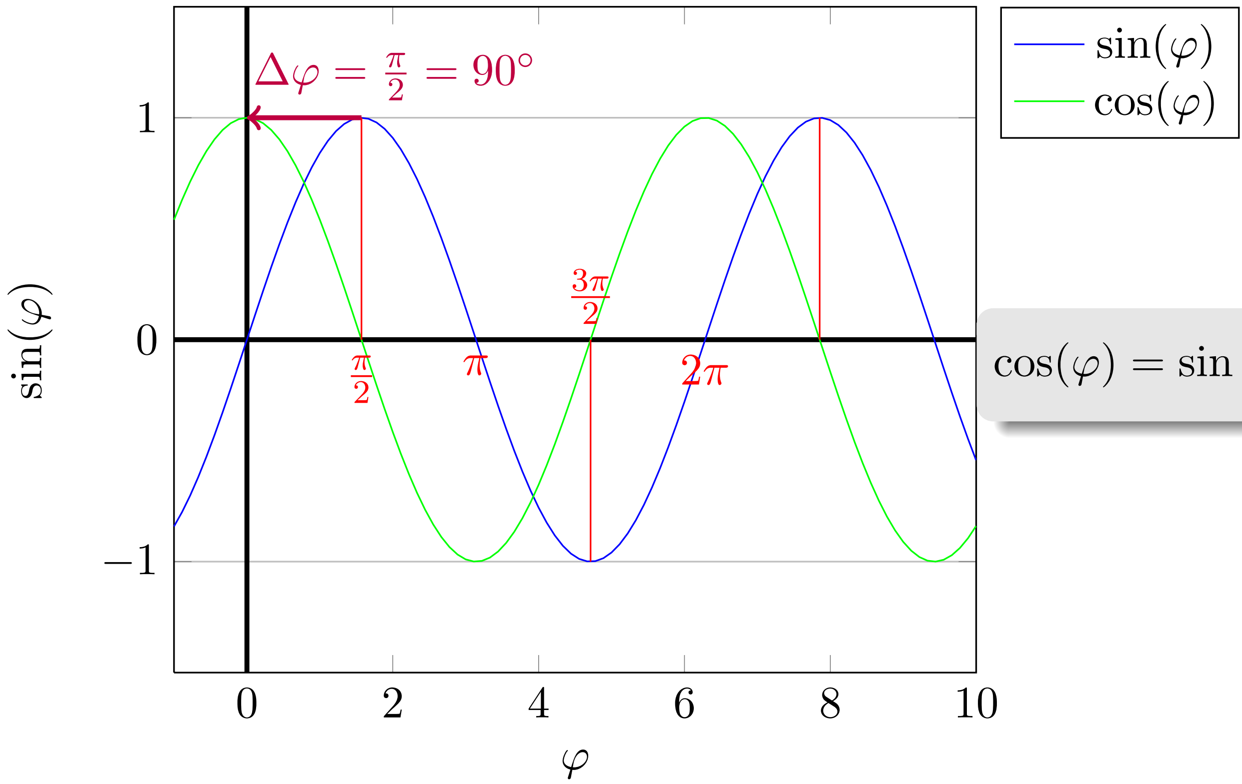


- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- Ankathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1 \\ \cos(\pi/2) &= 0 \\ \cos(\pi) &= -1 \\ \cos(3\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

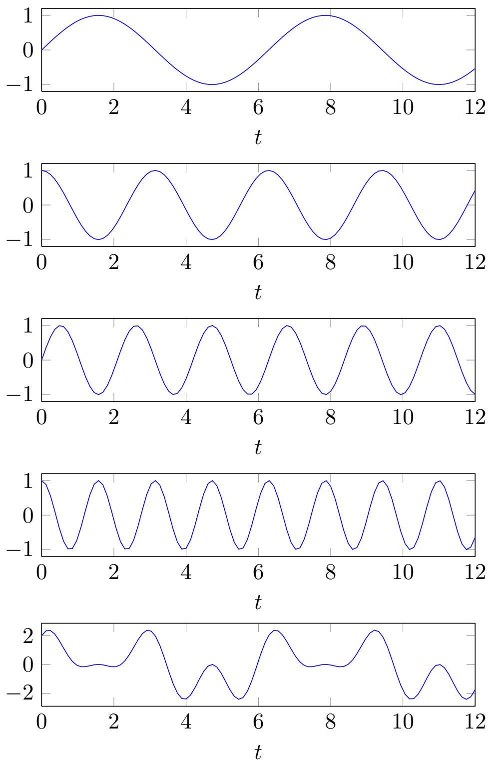
Graphen von Sinus und Cosinus



$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Anwendung Sinus-Funktion

Überlagerung von harmonischen Schwingungen



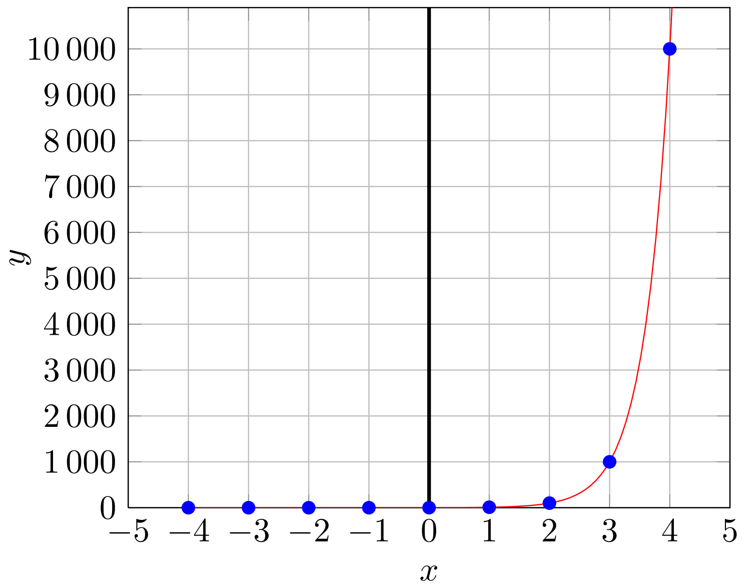
Übersicht

Exponentialfunktionen

- Variabler Exponent $f(x) = y = B^x$
- B nennt man Basis
- Extrem schnelles Wachstum! **Exponentielles Wachstum**

Beispiel: $B = 10$

x	$f(x) = 10^x$
-4	0,0001
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000



Größenordnungen

Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
10^{24}	Yotta	Y	10^{-1}	Dezi	d
10^{21}	Zetta	Z	10^{-2}	Zenti	c
10^{18}	Exa	E	10^{-3}	Milli	m
10^{15}	Peta	P	10^{-6}	Mikro	µ
10^{12}	Tera	T	10^{-9}	Nano	n
10^{9}	Giga	G	10^{-12}	Piko	p
10^{6}	Mega	M	10^{-15}	Femto	f
10^{3}	Kilo	k	10^{-18}	Atto	a
10^{2}	Hekto	h	10^{-21}	Zepto	z
10^{1}	Deka	da	10^{-24}	Yocto	y

Beispiele Größenordnungen – Längen

- Weltall 10^{26} m
- Galaxis 10^{20} m
- Sonnensystem 10^{14} m

Astronomie, Astrophysik

- Erde 10^{7} m
- Mensch 10^{0} m
- DNA 10^{-7} m

Biologie, Biophysik, Medizin

- Atom 10^{-10} m
- Atomkern 10^{-14} m
- Proton 10^{-15} m

Atom- und Kernphysik

Chemie

http://htwins.net/scale2/index.html
http://www.youtube.com/watch?v=0fKBhvDjuy0

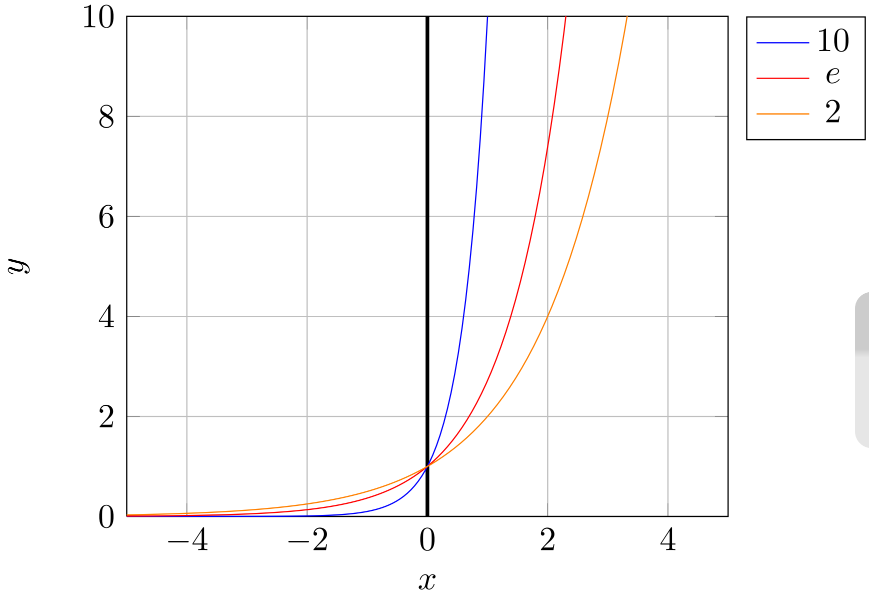
Beispiele Größenordnungen – Zeiten

Lebensdauer des Higgs-Bosons	10^{-22} s
Schwingungsperiode von sichtbarem Licht	10^{-15} s
Laufzeit des Lichts durch das Auge (3 cm)	10^{-10} s
Taktzeit eines Pentiumprozessors	10^{-9} s
Blitz beim Fotoapparat	10^{-5} s
Nervenleitung (1 m)	10^{-2} s
Kürzeste Reaktionszeit	$2 \cdot 10^{-1}$ s
Konzentrationszeit	$5 \cdot 10^{3}$ s
Studiendauer	$1{,}6 \cdot 10^{8}$ s
Lebensdauer eines Menschen	$3 \cdot 10^{9}$ s
Unsere Milchstraße	$3 \cdot 10^{17}$ s
Alter des Universums (15 Mrd Jahre)	$5 \cdot 10^{17}$ s
Mittlere Lebensdauer eines Protons	$> 5 \cdot 10^{32}$ s

Beispiele Größenordnungen – Gewicht

Elektron	10^{-30} kg
Proton	10^{-27} kg
Aminosäure	10^{-25} kg
Hämoglobin	10^{-22} kg
Virus	10^{-20} kg
Salzkorn	10^{-8} kg
Menschliches Haar	10^{-6} kg
DIN A6 Blatt	10^{-3} kg
Mensch	10^{2} kg
Großer LKW	10^{4} kg
Pyramide	10^{10} kg
Sonne	10^{24} kg

Exponentialfunktion mit verschiedener Basis



- x-Achse ist Asymptote
- Schneidet immer bei $y = 1$

Eulersche Zahl

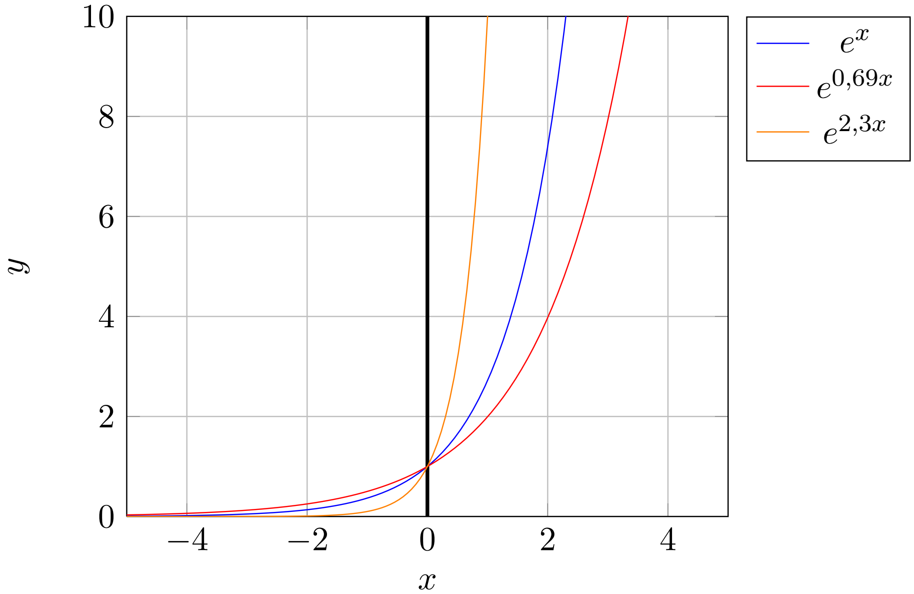
$$e \sim 2{,}718$$

Exponentialfunktion allgemein

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



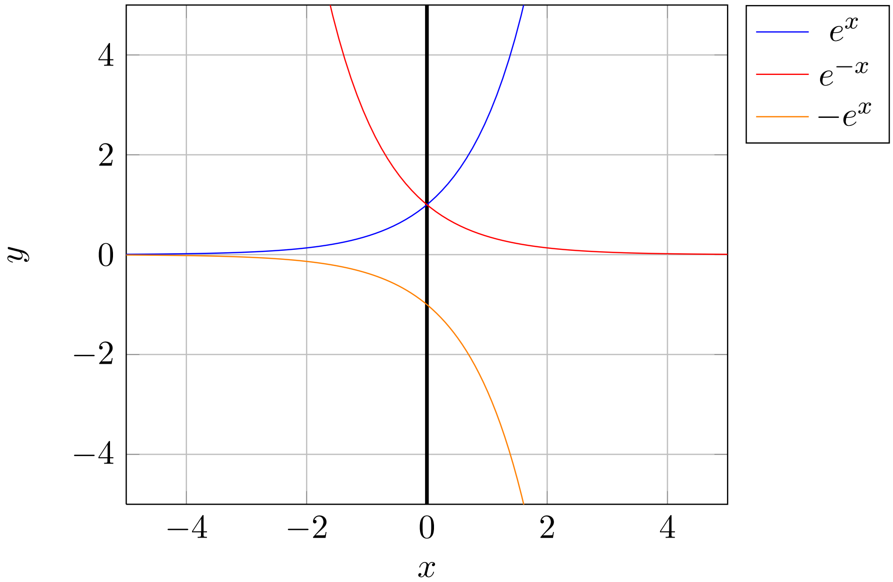
- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e
- $e^x = \exp(x)$

Abfallende Exponentialfunktion

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Negative b: **exponentiell fallend** $(e^{-x} = 1/e^x)$



Übersicht Exponentialfunktionen

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

- Faktor b im Exponenten → wirkt wie andere Basis
- Negative b → **exponentiell fallend**
- Verschiebung entlang der x-Achse :x_0
- Verschiebung entlang der y-Achse :c

Beispiele: Exponentielles Wachstum

- Vermehrung von Bakterien
- Findet durch Zellteilung statt
- Im Mittel feste Periode

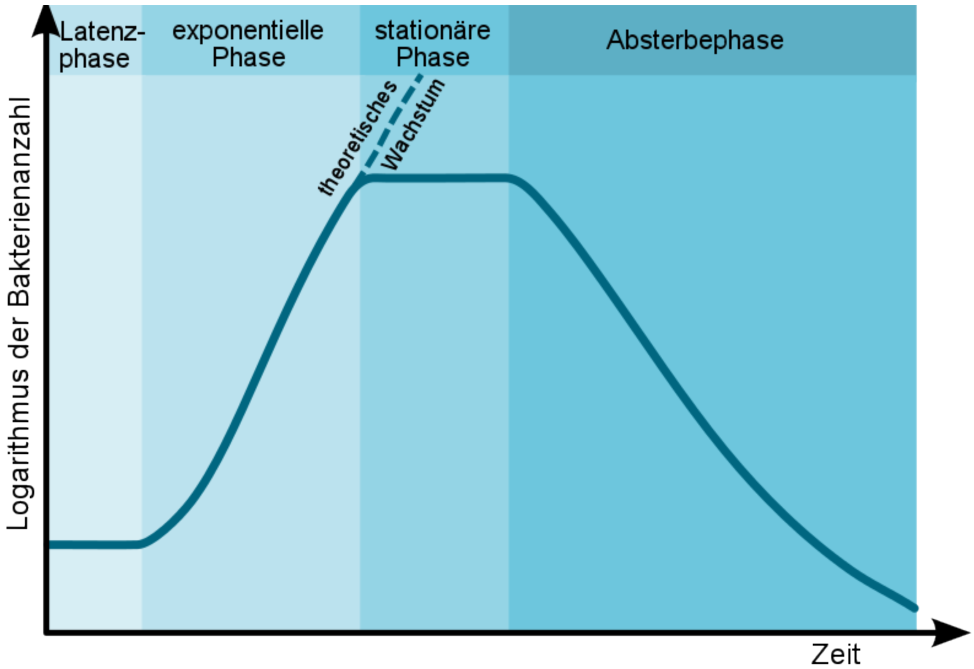
Beispiel: Generationszeit von $T_G = 10$ Minuten

Teilungen	Bakterien	Zeit
0	1	0
1	2	10
2	4	20
3	8	30
4	16	40
⋮	⋮	⋮
12	8096	120

$$B(t) = B_0 \cdot 2^{t/T_G}$$

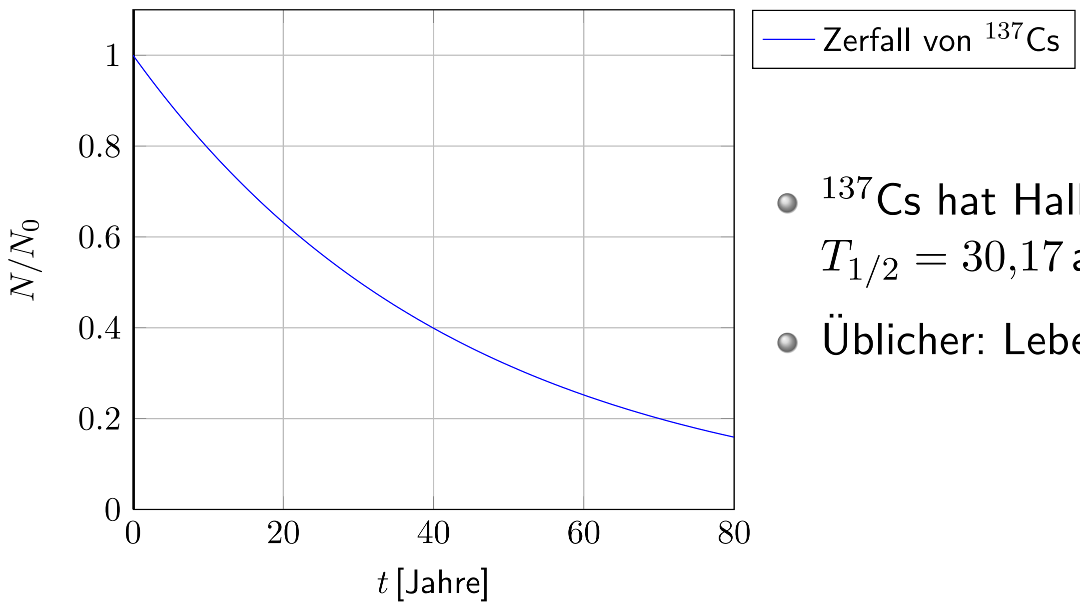
Wachstum von Bakterien

Ideale Wachstumskurve einer statischen Bakterienkultur



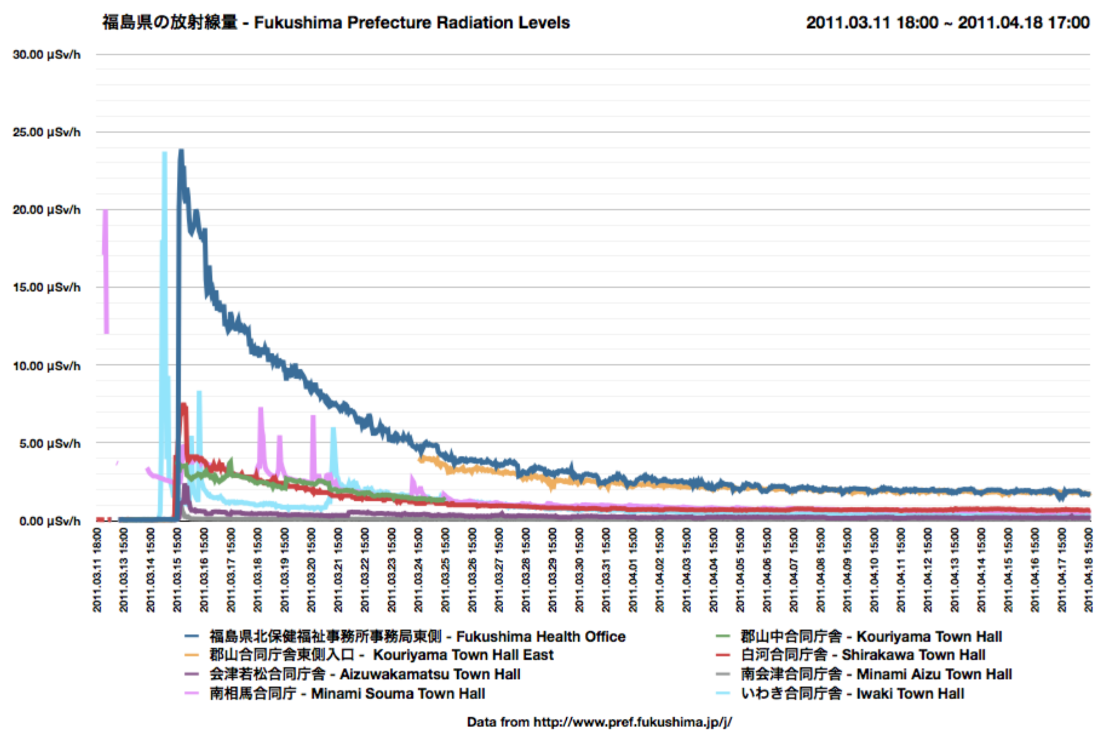
Quelle http://de.wikipedia.org/wiki/Bakterielles_Wachstum

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



- ^{137}Cs hat Halbwertszeit $T_{1/2} = 30{,}17\,\mathrm{a}$
- Üblicher: Lebensdauer $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)}$

Radioaktiver Zerfall – Strahlenbelastung

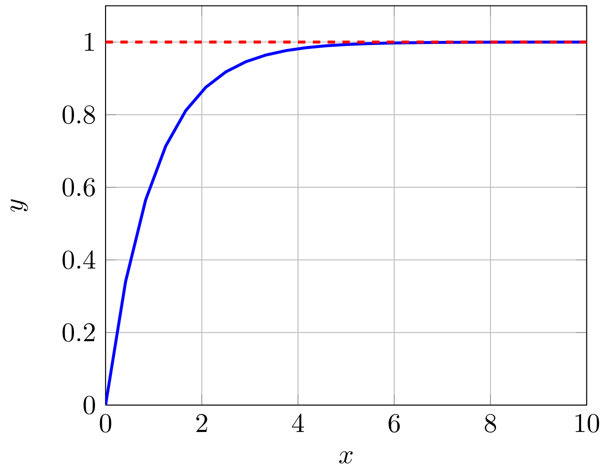


Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fukushima_I_radiation,_Fukushima_Prefecture_2,_March-April_2011.png

Sättigungsfunktion

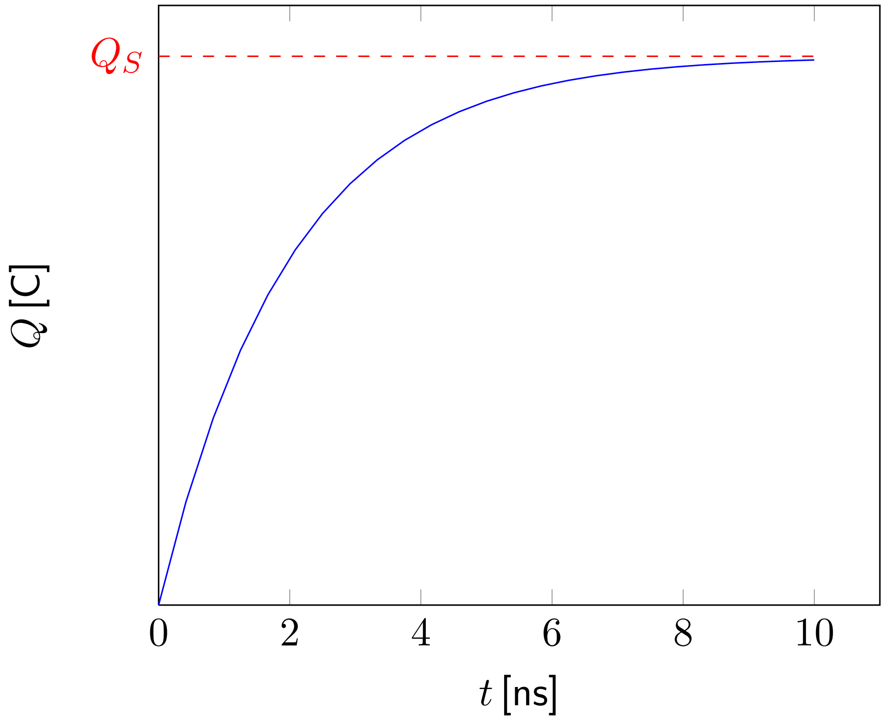
- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasant ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle

$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



Beispiel: Laden eines Kondensators

$$Q(t) = Q_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Übersicht

Logarithmus zur Basis 10

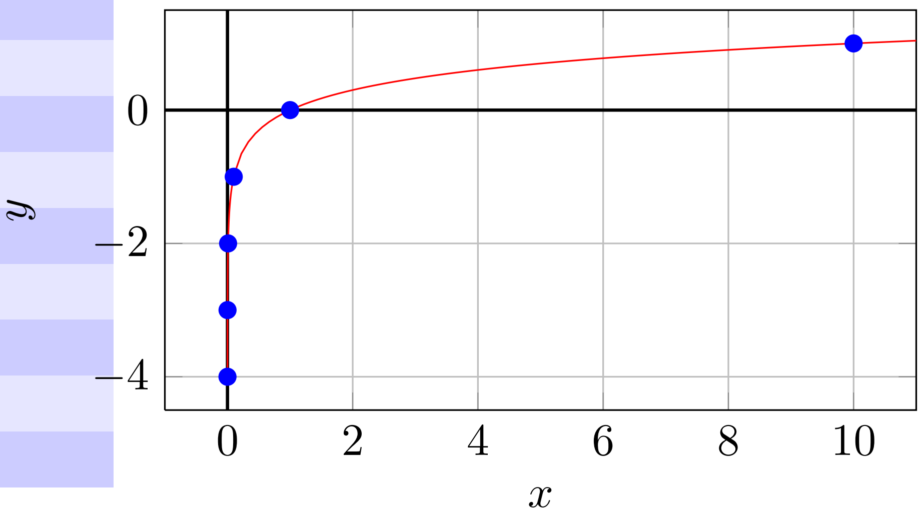
Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$$x = 4$$

$$x = \log_{10}(10000)$$

$f(x) = 10^x$	x
x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4



Logarithmus

$$10^x = 10000$$
$$x = \log_{10}(10000) = 4$$

- $x = 4$: Anzahl der Nullen
- $\log_{10}$ steht für Logarithmus zur Basis 10
- Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit gleicher Basis
- Wächst extrem langsam

Logarithmus allgemein

Gegeben

$b = a^x \qquad$ mit $a > 0$

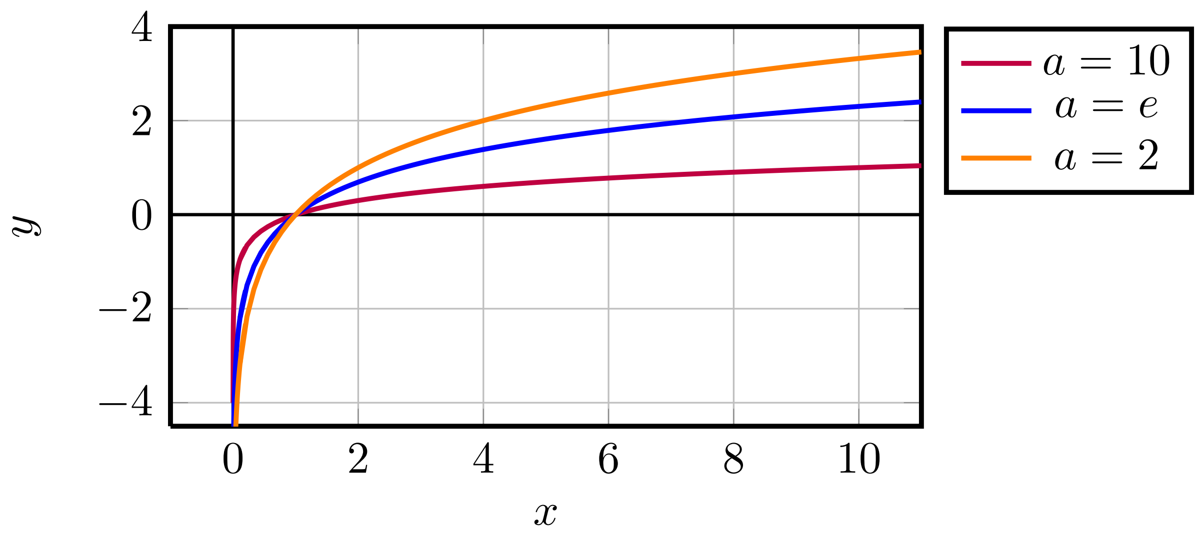
Lösung: **Logarithmus von b zur Basis a**

$$x = \log_a b$$

Besondere Basen:

10: $\log_{10} b = \lg b \qquad e$: $\boxed{\log_e b = \ln b}$

Logarithmus mit unterschiedlicher Basis



- y-Achse ist Asymptote
- Schneidet x-Achse bei $x = 1$

Rechnen mit Logarithmen – Multiplikation

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= 10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} \\
&= 10^{\lg(A)+\lg(B)} \\
\lg(A \cdot B) &= \lg(10^{\lg(A)+\lg(B)}) \\
&= \lg(A) + \lg(B)
\end{aligned}
$$

Rechnen mit Logarithmen

Multiplikation

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

Division

$$\log_b(A/B) = \log_b(A) - \log_b(B)$$

Potenz

$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

Wurzel

$$\log_b(\sqrt[m]{A}) = \log_b(A)/m$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) &= \log_2(\frac{10 \cdot x}{40}) \\
&= \log_2(\frac{x}{4}) \\
&= \log_2(\frac{x}{2^2}) \\
&= \log_2(x \cdot 2^{-2}) \\
&= \log_2(x) + \log_2(2^{-2}) \\
&= \log_2(x) - 2
\end{aligned}$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$\begin{aligned} A &= e^{\ln(A)} \\ 10^{\lg(A)} = A &= e^{\ln(A)} \\ \ln(10^{\lg(A)}) &= \ln(A) \\ \lg(A)\ln(10) &= \ln(A) \end{aligned}$$

Allgemein

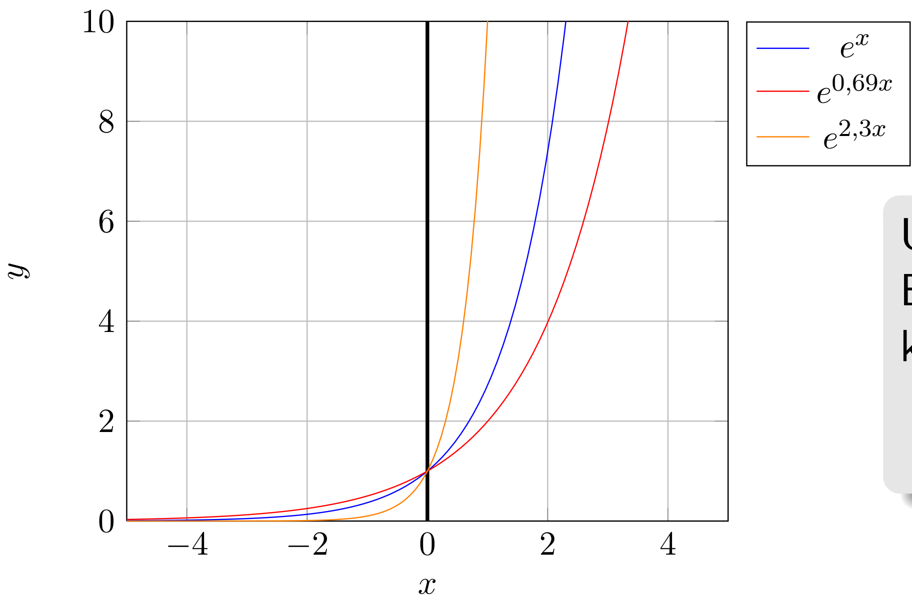
$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$

Wiederholung: Exponentialfunktion allgemein

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

Um von einer beliebigen Basis B auf die Basis e zu kommen:

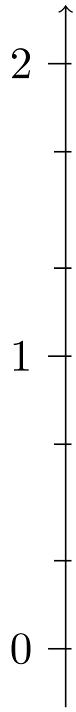
$$B^x = e^{\ln(B)\cdot x}$$

Logarithmisch geteilte Achsen

Z.B. für die y-Achse

- Trage jeden Messwert y an der Stelle $\lg(y)$ auf.

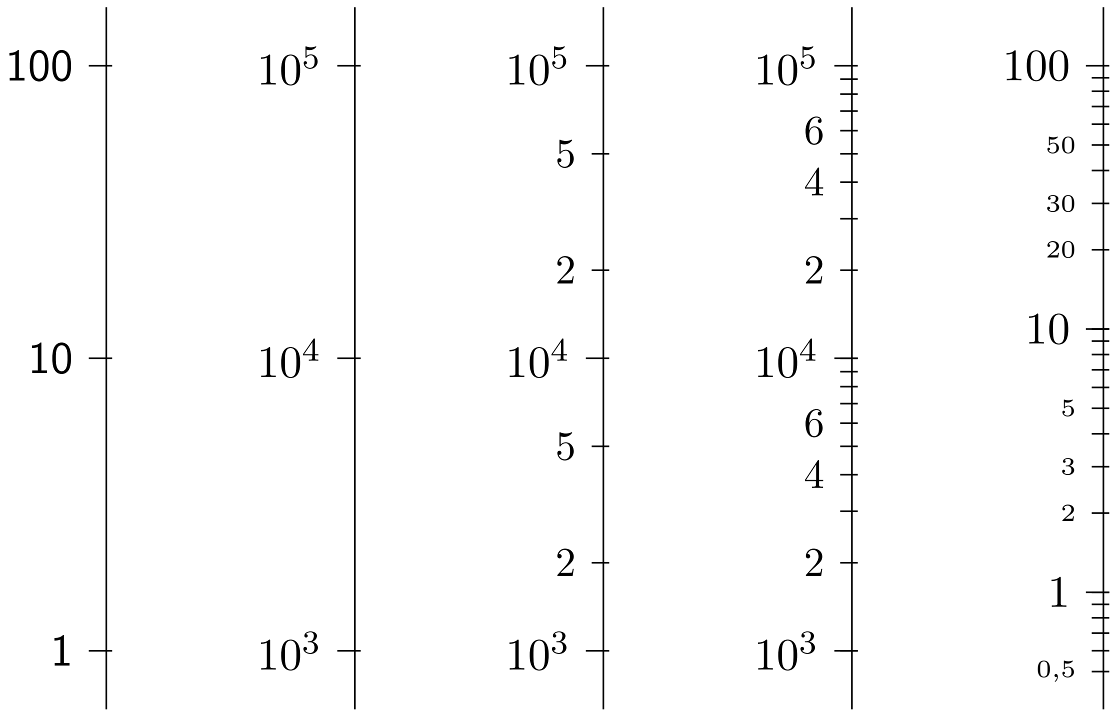
$$
\begin{aligned}
1 &\to \lg(1) = 0 \\
10 &\to \lg(10) = 1 \\
100 &\to \lg(100) = 2 \\
2 &\to \lg(2) \simeq 0{,}3 \\
5 &\to \lg(5) \simeq 0{,}7
\end{aligned}
$$



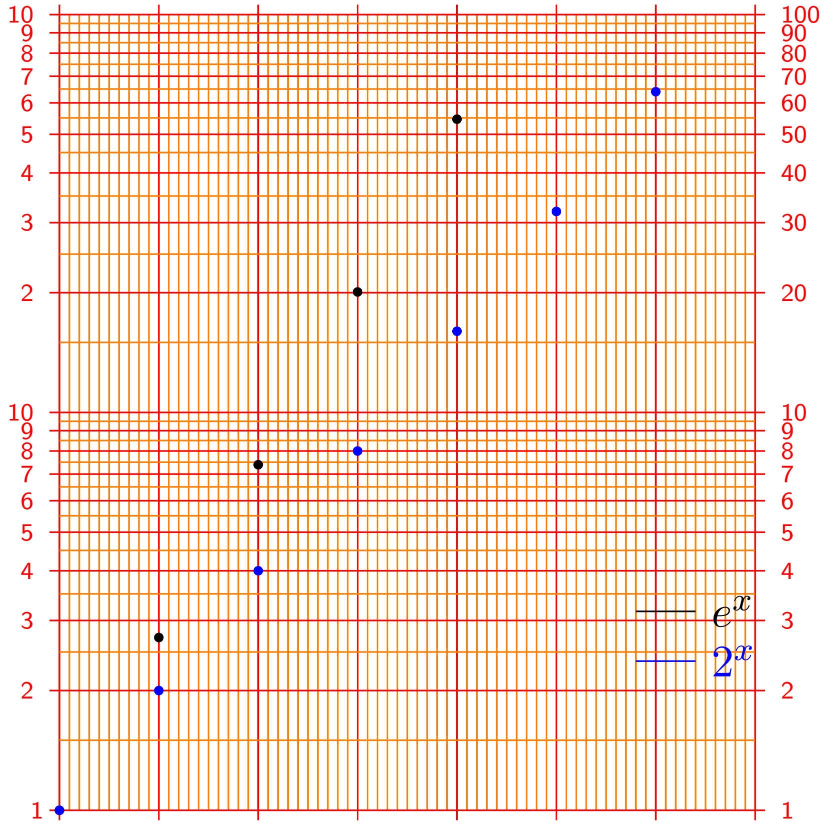
- $\lg(x)$ nur für positive x
- Darstellung nur für positive y-Werte möglich

Beschriftung logarithmisch geteilter Achsen

Verschiedene Beschriftungen möglich

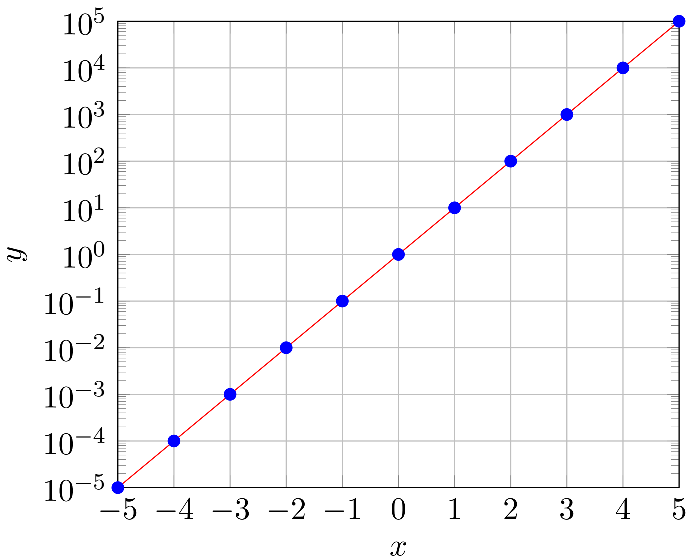


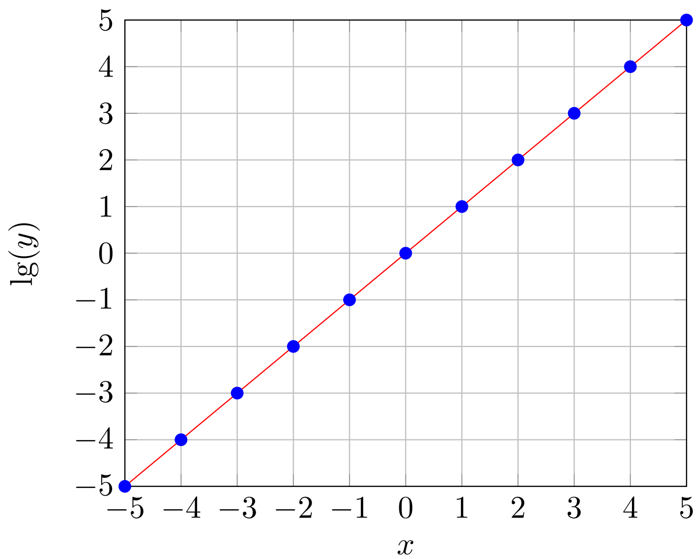
Einfach-logarithmisches Papier



- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

Logarithmische Graphen





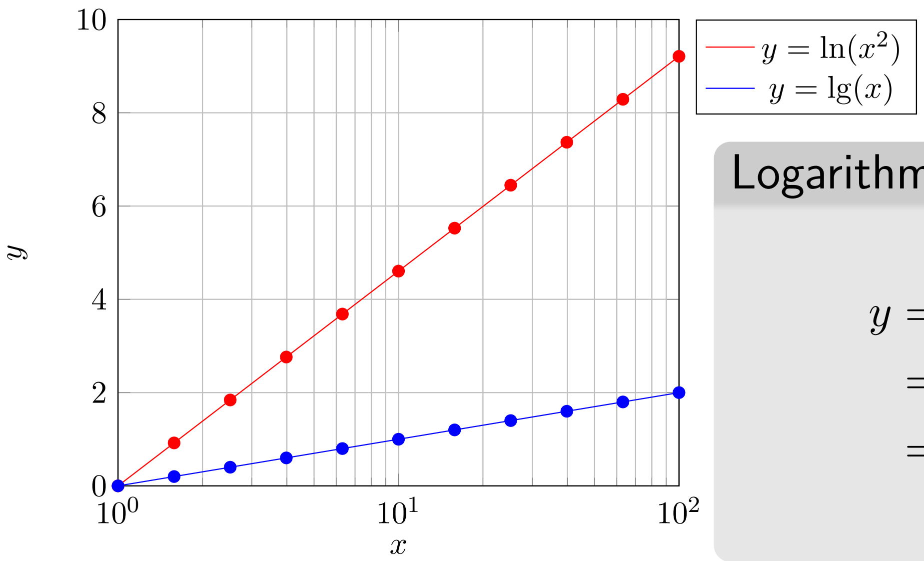
Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$

$$y = B^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x \cdot \lg(B)$$

Steigung $= c \cdot \lg(B)$

Logarithmische x-Achse



Logarithmische Zusammenhänge

$$
\begin{aligned}
y &= \log_b(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

Steigung: $n \log_b(10)$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

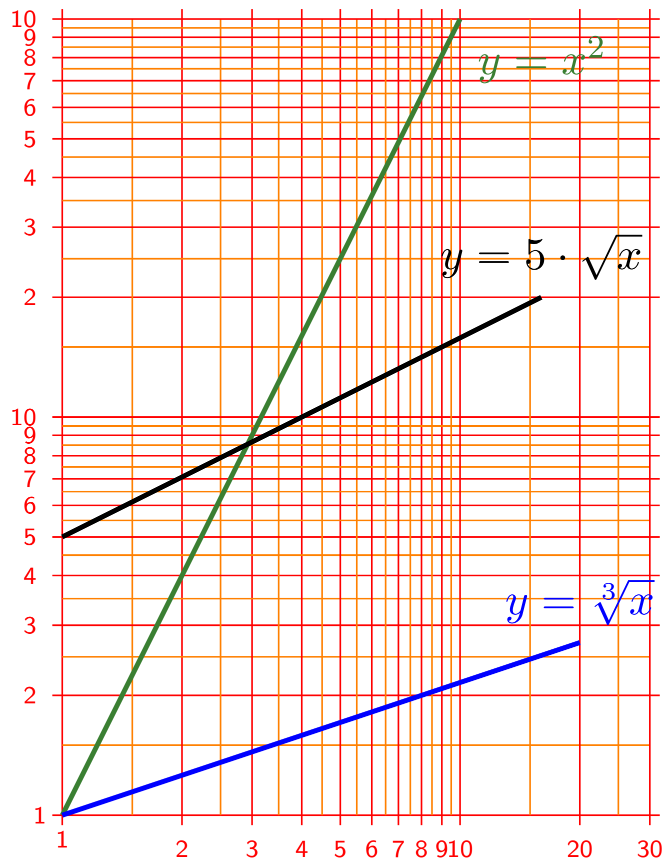
$$
\begin{aligned}
y &= a \cdot x^n \\
\lg(y) &= \lg(a) + n \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

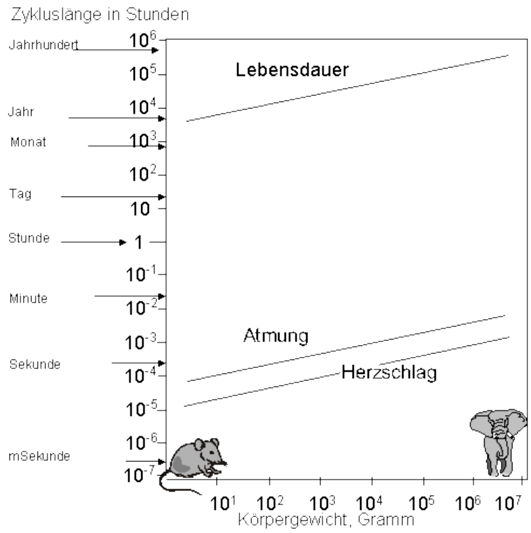
wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



Beispiel Allometrie

- Messen und Vergleichen von Beziehungen zwischen der Körpergröße von Lebewesen und deren Verhältnis zu verschiedensten biologischen Größen



Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Allometrie

Klassische Allometrieformel

$$y = a \cdot x^b$$

Übersicht

Diffentation

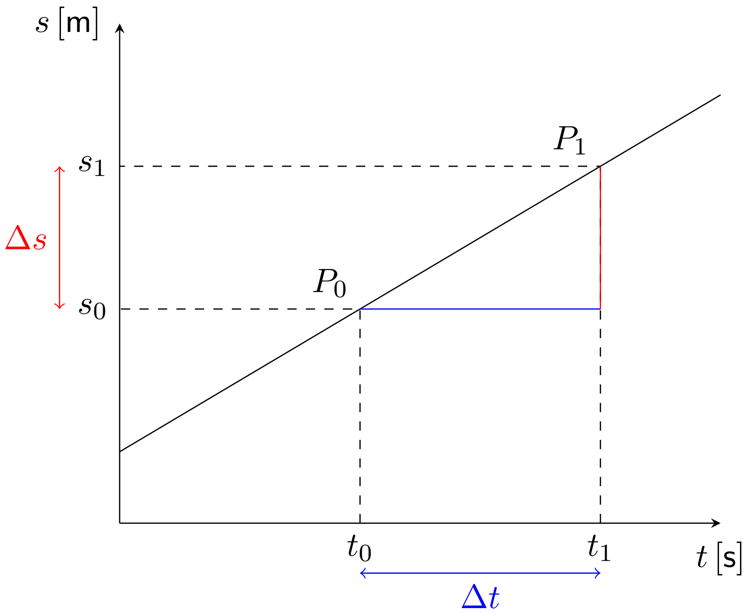
Beispiel:

- Auto mit **konstanter Geschwindigkeit** v
- Verhältnis aus zurückgelegtem Weg Δs und dafür benötigter Zeit Δt immer gleich

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Um die Geschwindigkeit zu messen, reicht es Zeit und Ort an einem Startpunkt P_0 und an einem Stopppunkt P_1 zu bestimmen.

Weg-Zeit-Diagramm – konstante Bewegung

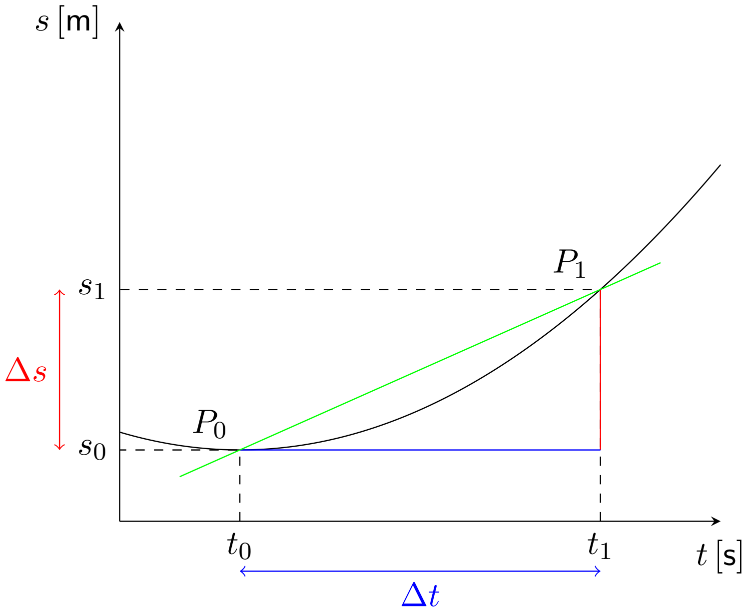


- P_0: Startpunkt der Messung
  t_0 Startzeit, s_0 Startort
- P_1: Stopppunkt der Messung
  t_1 Stoppzeit, s_1 Stopport
- Geschwindigkeit konstant
  $\Rightarrow$ v ist Steigung der Geraden

Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

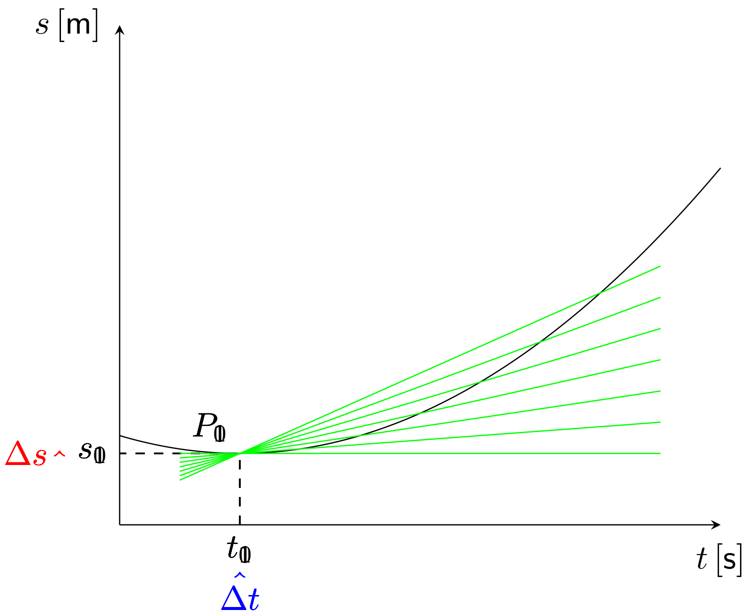
Weg-Zeit-Diagramm – Beschleunigte Bewegung



- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken

- Δt muss so klein gewählt werden, dass die Geschwindigkeitsänderung während Δt vernachlässigbar klein wird.

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$
- Tangente an die Kurve bei P_0

Differentialquotient

Mathematisch kann man Δt *„unendlich klein"* werden lassen

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t_0}$$

Die Steigung der Kurve im Punkt P ist die Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

Ableitung

- Die **Ableitung** an einem Punkt P der Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt P an.
- Mathematisch definiert durch den **Differentialquotienten** $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$
- Im Differentialquotienten sind die Differenzen infinitesimal klein.

Man schreibt:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Beispiel $f(x) = x^2$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= 2x + \Delta x \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}
$$

Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen

$f(x)$	$y' = f'(x)$
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{7}{x}$

Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + e^x$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \to f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \to f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \to f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\ \to f'(x) &= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)))/\cos^2(x) \\ &= 1 + \sin^2(x)/\cos^2(x) \\ &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

Ableitungsregeln

1. **Konstanter Faktor**
   $y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$
2. **Summenregel**
   $y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
3. **Produktregel**
   $y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
4. **Quotientenregel**
   $y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v(x)^2$
5. **Kettenregel**
   $y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) = 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3/x^2$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) = 3/(5 \cdot \sqrt[5]{x^2})$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) = (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \rightarrow f'(x) = (1 + 1/x - \ln(x))/(x+1)^2$

Ursachen für Messunsicherheiten/Fehler

Systematische Fehler

- Falsche Eichung
- Fehlerhaftes Messgerät
- Nährungen
- Längenänderung durch Temperatur
- ...

Zufällige Fehler

- Ablesefehler
- statistische Schwankungen
- Spiel bei Mikrometerschraube
- ...

Zufällige Fehler lassen sich durch Wiederholung der Messung verringern!

Messergebnisse

$$\text{Messergebnis} = \text{Messwert} \pm \text{Fehler}$$

Absoluter Fehler

$$L = (5{,}63 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m}$$

Relativer Fehler

$$L = 5{,}63\,\mathrm{m} \pm 0{,}9\%$$

Fehler = Zufallsfehler + systematischer Fehler

$$L = (5{,}63 \pm 0{,}03\,(\mathrm{stat.}) \pm 0{,}04\,(\mathrm{sys.}))\,\mathrm{m}$$

Der **wahre Wert** ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Fehlerintervall enthalten.

Mittelwert

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

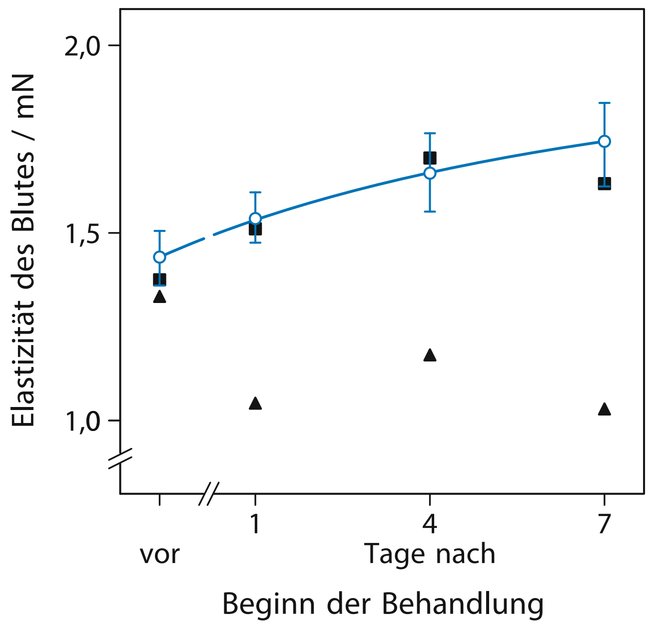
$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Je häufiger ich messe, desto kleiner wird der Fehler des Mittelwerts! Um Ihn zu halbieren brauche ich 4 mal so viele Messwerte!

Beispiel

Trombelastogramm während einer Behandlung mit Heparin



Aus: Harten *Physik für Mediziner*

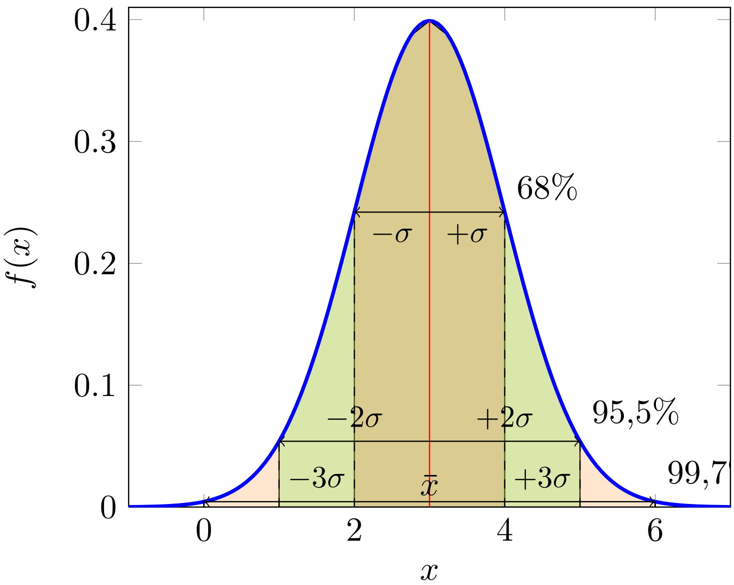
- Beobachtungsgruppe von 28 Patienten
- ■ und ▲: zwei Mitglieder der Beobachtungsgruppe
- Blaue Kreise: Mittelwert der Werte aller Patienten
- Die blauen Fehlerbalken geben die Standardabweichung an

Normalverteilung

Normalverteilung

Gaußsche Glockenkurve

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

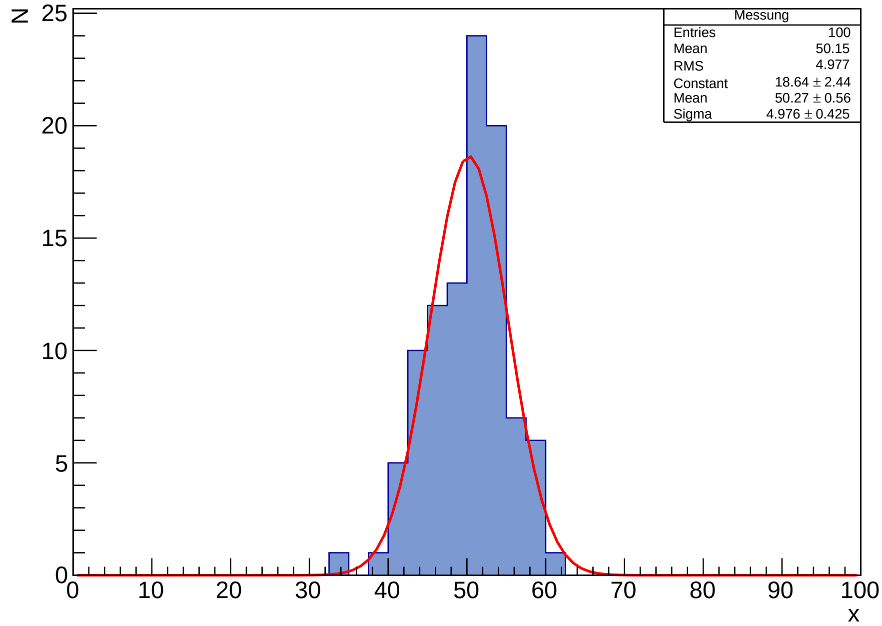


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

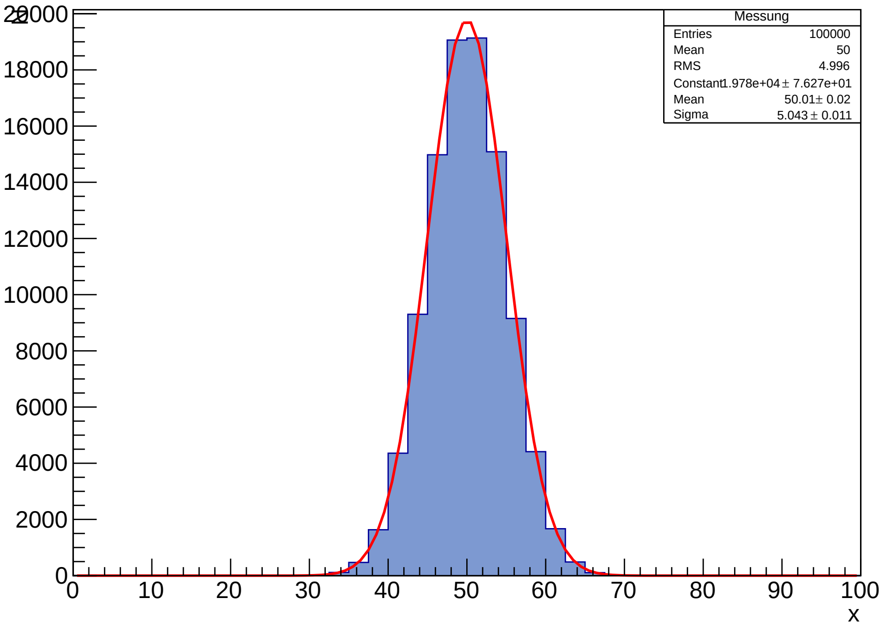
- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

- Analog: 68% in $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$
- 95,5% in $[\bar{x} - 2\Delta\bar{x}, \bar{x} + 2\Delta\bar{x}]$
- 99,7% in $[\bar{x} - 3\Delta\bar{x}, \bar{x} + 3\Delta\bar{x}]$

Gaußverteilung realistischer Messungen



Gaußverteilung realistischer Messungen



Protokollführung und Auswertung

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	$x_i/[x]$	$(x_i - \bar{x})/[x]$	$(x_i - \bar{x})^2/[x]^2$
1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			
	$\sum_i x_i = \dots$		$\sum_i (x - \bar{x})^2 = \dots$

Beispiel Protokollführung

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Fehler: $\Delta\bar{l} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\cdot 4{,}19\,\text{cm}^2} = 0{,}3737\,\text{cm}$

Ergebnis

$$l = (37{,}1 \pm 0{,}4)\,\text{cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$\begin{aligned} l &= 37{,}1\,\text{cm} \pm \frac{0{,}4}{37{,}1} \cdot 100\% \\ &= 37{,}1\,\text{cm} \pm 1{,}1\% \end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung

- Messgröße setzt sich aus mehreren fehlerbehafteten Größen zusammen
- Nur die Fehler der einzelnen Größen sind bekannt

Wie groß ist der Gesamtfehler?

Zwei Fälle

- Addition der Größen
- Multiplikation der Größen

Fehlerfortpflanzung – Addition

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{\text{min}} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größter Wert von v:

$$v_{\text{max}} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

- $\bar{v}$ liegt etwa in der Mitte von $[v_{\text{min}}, v_{\text{max}}]$.
- Die größere der Differenzen $\bar{v} - v_{\text{min}}$ bzw. $v_{\text{max}} - \bar{v}$ ist der Fehler $\Delta\bar{v}$

Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120{,}0 \pm 0{,}2)$ cm
- Kantenlänge $b = (90{,}0 \pm 0{,}1)$ cm

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 10800\,\text{cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned} F_{\text{max}} &= (\bar{a} + \Delta\bar{a})(\bar{b} + \Delta b) \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b}}_{\text{klein}} \\ &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \\ F_{\text{min}} &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} - \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \end{aligned}$$

Es folgt für den Fehler: $\Delta\bar{F} \simeq F_{\text{max}} - \bar{F} \simeq \bar{F} - F_{\text{min}} \simeq \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$

$$\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

Fehler von Produkten

Allgemeine Regel

$$\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

Der relative Fehler von Produkten (hier $F = a \cdot b$) **und** Quotienten von Messwerten ist gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren

Zusammenfassung: zwei Regeln

Zwei Größen $a = \bar{a} + \Delta\bar{a}$ und $b = \bar{b} + \Delta\bar{b}$

Addition oder Subtraktion: $c = a + b$ bzw. $c = a - b$

Werden a und b addiert oder subtrahiert, so **addieren** sich die **absoluten** Fehler zum absoluten Gesamtfehler:

$$\Delta\bar{c} = \Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}$$

Multiplikation oder Division: $c = a \cdot b$ bzw. $c = a/b$

Werden a und b multipliziert oder dividiert, so **addieren** sich die **relativen** Fehler zum relativen Gesamtfehler:

$$\frac{\Delta\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

Übersicht

Skalare und Vektoren

Skalare

Größen unabhängig von einer Richtung, z.B.:

- Masse m
- Zeit t
- Volumen V
- Ladung Q

Vektoren

Größen mit Richtung, z.B.:

- Geschwindigkeit $\vec{v}$
- Kraft $\vec{F}$
- Impuls $\vec{p}$

Eigenschaften von Vektoren

- Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre Länge und Richtung identisch sind

$\rightarrow$ Ein Vektor ändert sich nicht, wenn er beliebig parallel verschoben wird

- Die Länge eines Vektors gibt eine physikalische Größe wieder (Zahl + Einheit)
- Verschiedene Schreibweisen üblich: $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{a}$, $\boldsymbol{a}$, ...
- Wir verwenden $\vec{a}$

Darstellung von Vektoren

- Meistens 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem
- 3 Achsen x, y und z stehen senkrecht aufeinander

Einheitsvektoren

Vektor der Länge 1 entlang (parallel) der entsprechenden Achse

$$\vec{e_x},\quad \vec{e_y},\quad \vec{e_z}$$

Länge der Projektion auf die Achsen

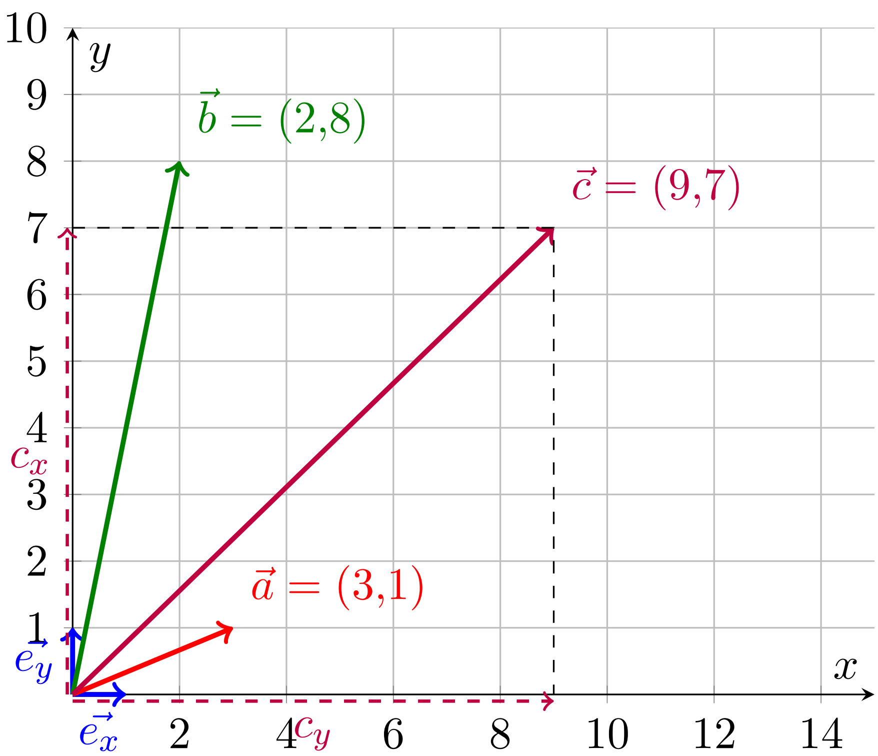
$$a_x,\quad a_y,\quad a_z$$

Vektor zusammengesetzt aus seinen Komponenten

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e_x} + a_y \cdot \vec{e_y} + a_z \cdot \vec{e_z}$$

$$\vec{a} = (a_x,a_y,a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Graphische Darstellung (Hier: 2D Vekoren)



Rechnen mit Vektoren

Addition

Komponentenweise

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

wird auf jede Komponente angewendet

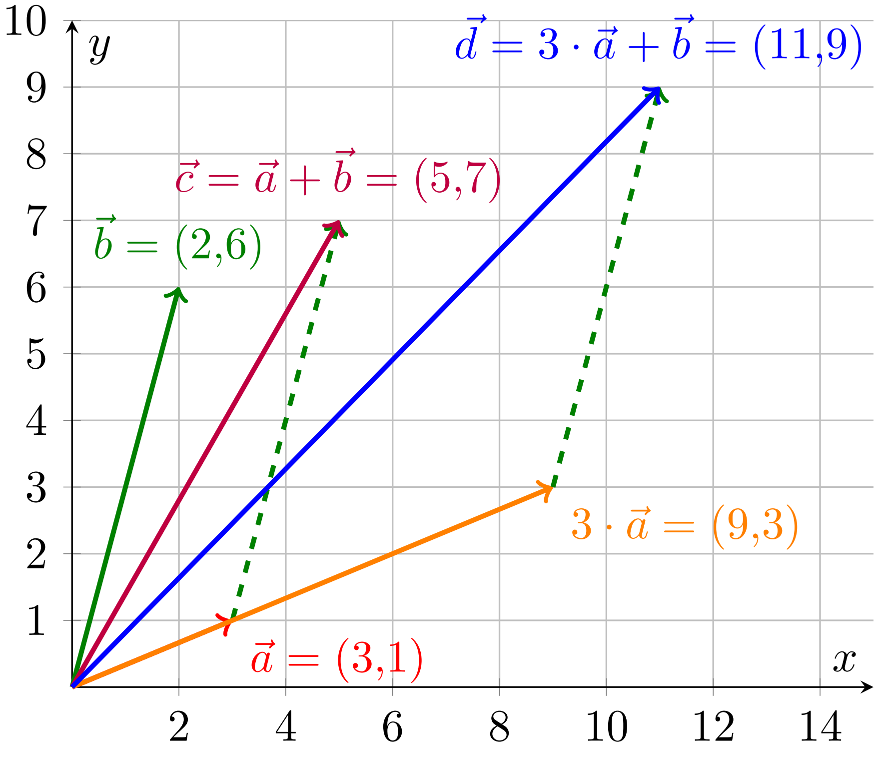
$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$$

Betrag (Länge)

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Zum Merken: Pythagoras in 3D

Graphische Darstellung Rechnen

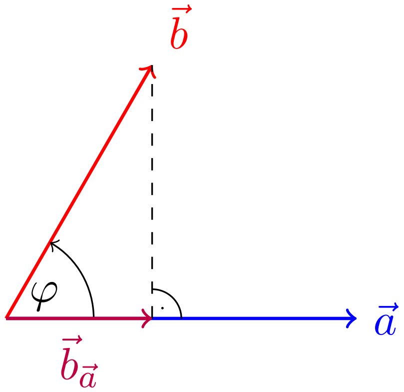


- Gegeben:
  $\vec{a} = (3{,}1)$
  $\vec{b} = (2{,}6)$
- Gesucht:
  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
  $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$

Skalarprodukt

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$

$$c = |\vec{b}_{\vec{a}}| \cdot |\vec{a}| = b \cdot a \cdot \cos(\varphi)$$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeineander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

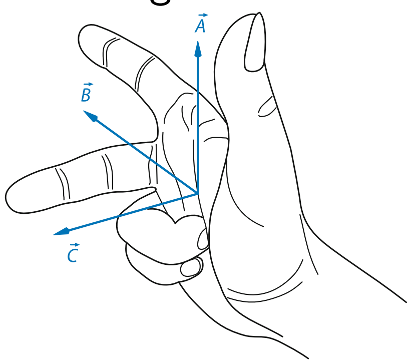
Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

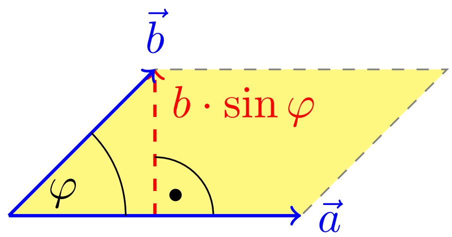
Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.
- Die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung von $\vec{c}$:



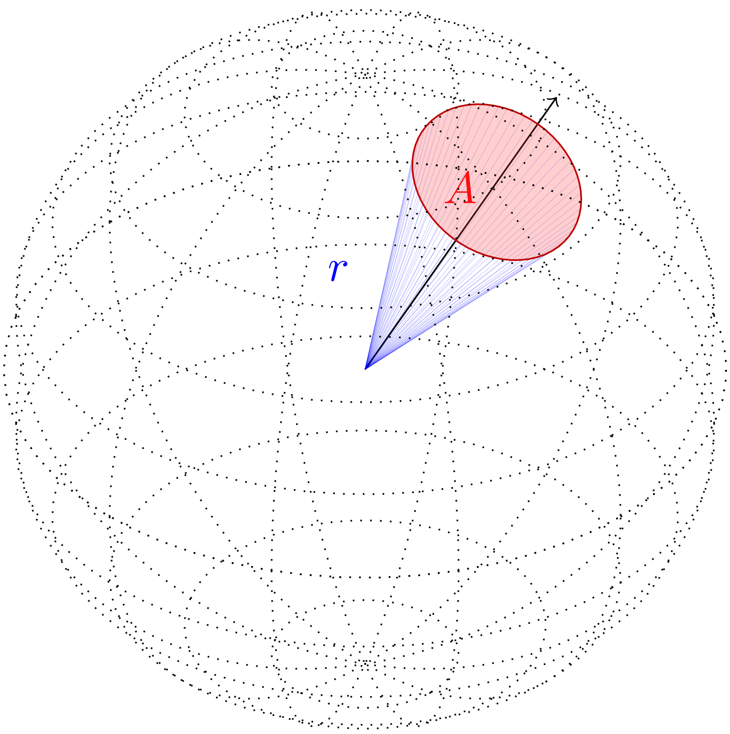


$$c = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

Beispiele: Rechnen mit Vektoren

- $\vec{a} \cdot \vec{e_x} = a_x$
- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} = 3{,}5 \cdot \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} = c \cdot a \cdot \cos\varphi = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos\varphi = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) /10 = \left(\begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \end{pmatrix}\right) /10 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} /10 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \vec{e_x}$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b})/(\vec{a} \cdot \vec{a}) = a \cdot b \cdot \sin(\varphi)/a^2 = b \cdot \sin(\varphi)/a$

Nachtrag: Raumwinkel



- Winkel in 2D: Öffnung zwischen zwei Geraden
- Raumwinkel Ω: räumliche Öfnungswinkel eines Kegels
- A: Durchstoßfläche des Kegels durch die Kugeloberfläche mit Radius r

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

- Einheit Steradiant (sr)
- Gesamter Raumwinkel: 4π