

# Physik für Biologen und Zahnmediziner

## Propädeutikum: Zusammenfassung aller Folien

Dr. Daniel Bick



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

15. - 24. Oktober 2014

## Aufteilung der Vorlesung

**Propädeutikum** (16. - 24. Okt.) Daniel Bick [daniel.bick@desy.de](mailto:daniel.bick@desy.de)

**Physik Teil 1** Björn Wonsak [bwonsak@mail.desy.de](mailto:bwonsak@mail.desy.de)

**Physik Teil 2** Georg Steinbrück [georg.steinbrueck@desy.de](mailto:georg.steinbrueck@desy.de)

Folien zum Propädeutikum:

<http://www.desy.de/~daniel/vorlesung/ws2014>

Klausuren zum Praktikum (multiple choice):

- ① Mathematische Einführung (20 Fragen)
- ② Physik (30 Fragen) ⇐ wichtiger!

Skript fürs Propädeutikum, Altklausuren, Übungen mit Lösungen:

<http://wwiexp.desy.de/users/uwe.holm/Zahnmedizin.html>

- Haas: „Physik für Pharmazeuten und Mediziner“, Wiss. Verlagsges., 7. Auflage (2012), 49,80 €
- Harten: „Physik für Mediziner“, Springer-Lehrbuch, 13. Auflage (2011), 29,95 €  
Online lesbar im [Universitätsnetz](#) oder mit [Stabi Ausweis](#)
- Hellenthal: „Physik für Mediziner und Biologen“, Wiss. Verlagsges., 8. Auflage (2006), 29,80 €
- Trautwein, Kreibig, Hüttermann: „Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten“, de Gruyter-V., 7. Auflage (2008), 29,95 €
- Tritthart: „Medizinische Physik und Biophysik“, Schattauer-V., 2. Auflage (2011), 39,95 €

Skript von Dr. Salehi:

<http://wwiexp.desy.de/users/uwe.holm/Zahnmedizin.html>

## Mathematische Hilfsmittel der Physik

- Funktionsbegriff
- Proportionalität und linearer Zusammenhang
- Funktionsgleichung einer Geraden, Graph
- Parabel
- Winkelfunktionen
- Exponentialfunktionen
- Logarithmusfunktionen

## Physikalische Grundlagen

- Physikalische Begriffe und Größen
- Basisgrößen, Basiseinheiten, SI-System
- Abgeleitete Größen und Einheiten
- Vorsilben
- Messungen, Darstellung von Messergebnissen
- Messfehler
- Fehlerrechnung
- Vektoren
- Differentialquotient

- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren

- 1 **Einleitung**
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren



„Keine menschliche Forschung kann man **wahre Wissenschaft** heißen, wenn sie ihren Weg nicht durch die **mathematische Darlegung und Beweisführung** hin nimmt. Sagst du, die Wissenschaften, die vom Anfang bis zum Ende im Geist bleiben, hätten Wahrheit, so wird dies nicht zugestanden, sondern verneint aus vielen Gründen, und vornehmlich deshalb, weil bei solchem reingeistigen Abhandeln die Erfahrung (oder das **Experiment**) nicht vorkommt; ohne dies aber gibt sich kein Ding mit Sicherheit zu erkennen.“

*Leonardo Da Vinci, 1452-1519*

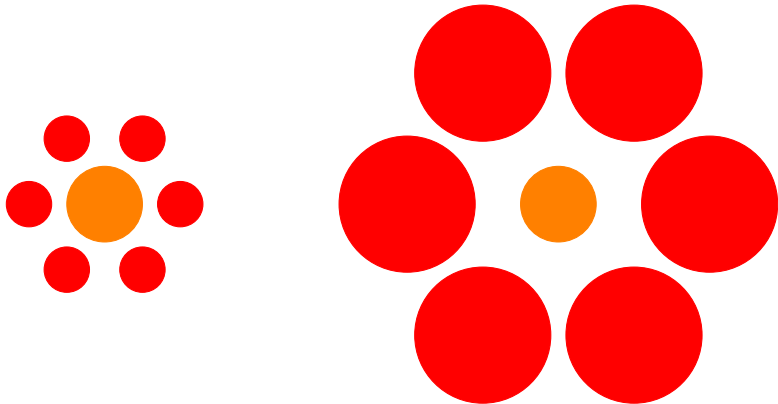


„**Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben**“

*Galileo Galilei, 1564-1642*

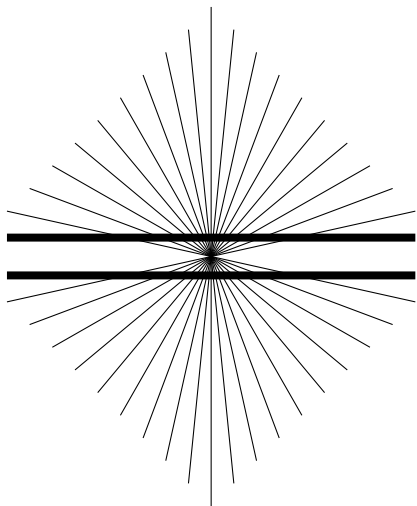


Welcher der beiden orangenen Kreise ist größer?

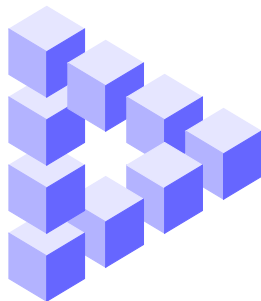


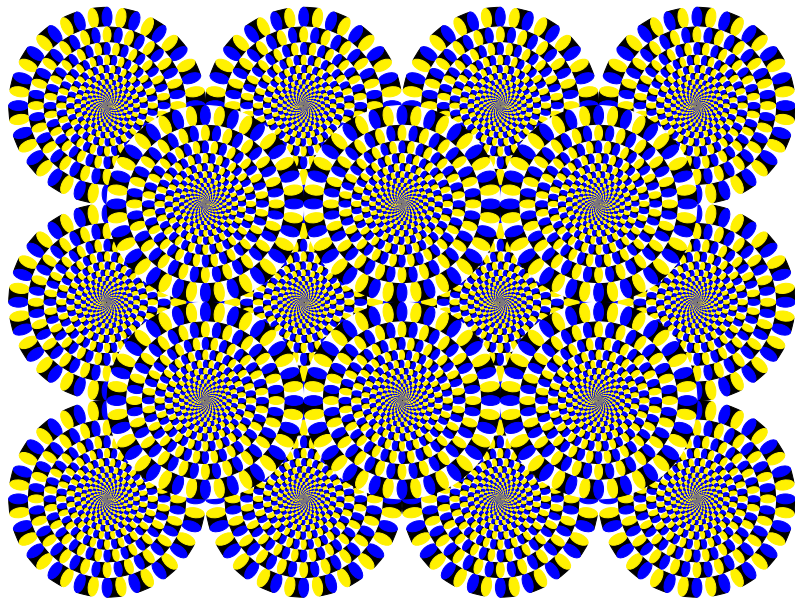
Beide sind gleich groß! Die Größe eines Objekts wird abhängig von seiner Umgebung wahrgenommen.

- Die beiden Linien sind parallel
- Durch das Strahlenbündel erscheinen sie gekrümmt



- Paradoxe räumliche Eindrücke
  - Auge/Gehirn ist 3D gewohnt
- ⇒ versucht 2D so zu interpretieren





**Fazit:** Messgeräte unabdingbar, um Beobachtungen unabhängig von Sinneseindrücken zu machen (neutrale Beobachter)

- quantifizierbar
- reproduzierbar
- unbestechlich

Um die Ergebnisse **vergleichbar und bewertbar** (Fehlerrechnung) zu machen, braucht man die Mathematik

Induktive Methode:

**Beobachtung** eines Vorgangs



**Experiment** zur qualitativen und quantitativen Untersuchung des Vorgangs



**Modell** zur Beschreibung des Vorgangs (und evtl. darüber hinaus)



**Gesetz** (Verallgemeinerung auf ähnliche Fälle)



**Vorhersage** neuer Phänomene

- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen**
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren

- Gesetze der Physik liefern Zusammenhänge zwischen **physikalischen Größen** wie Länge, Zeit, Kraft, ...
- Meist werden physikalische Größen mit Buchstaben abgekürzt, z.B. Zeit  $t$ , Länge  $L$ , Kraft  $F$ , ...
- Eine physikalische Größe  $G$  ist ein Produkt aus Zahlenwert  $\{G\}$  und Einheit  $[G]$ :

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

z.B. Zeit:  $t = 3,5 \text{ s}$



## Länge

- Häufig über menschl. Körper definiert
- Klafter, Elle, Fuß, Hand, Finger
- engl. Rute =  $5\frac{1}{2}$  Gerten  $\approx 5,03$  m

## Gewicht

- Pfund, Unze
- Nürnberger Apotheker-Pfund:  $357,845$  g  $\approx 1$  lb
- $1$  lb =  $12$  Unzen =  $96$  Drachmen =  $288$  Skrupel =  $576$  Oboloi =  $5760$  Gran ( $1 : 12 : 8 : 3 : 2 : 10$ )

## Nachteile

- Sehr starke regionale oder individuelle Unterschiede
- Umständliche Umrechnung

Metrisches System – Vielfache von 10,100,1000,...

z.B.: 100 cm = 1 m

1000 g = 1 kg

Ausnahme: Zeit

			1 Sekunde
		1 Minute	60 Sekunden
	1 Stunde	60 Minuten	3600 Sekunden
1 Tag	24 Stunden	1440 Minuten	86400 Sekunden

Regionale Ausnahmen: z.B. USA

1 mile	8 furlong	80 chain	1760 yard	5280 foot	63360 inches
			1 yard	3 foot	36 inches
				1 foot	12 inches

## Internationales Einheitensystem – SI-Einheiten

Basisgröße	SI-Einheit	Abkürzung
Zeit	Sekunde	s
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

- Alle anderen Einheiten können von diesen sieben **Basiseinheiten** ohne zusätzliche Faktoren abgeleitet werden
- Die Basisgrößen können *beliebig* aber möglichst zweckmäßig festgelegt werden
  - Klafter, Elle, etc. ungeeignet, da nicht leicht reproduzierbar

## Meter m

Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von  $1/299792458$  Sekunde zurücklegt.

## Kilogramm kg

Das Kilogramm ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps.

## Sekunde s

Das 9192631770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Cäsium-Isotops  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung.

## Ampere A

Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, unendlich lange, geradlinige und im Vakuum im Abstand von 1 m voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  N hervorrufen würde.

## Kelvin K

1 / 273,16 der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts von Wasser genau definierter isotopischer Zusammensetzung.

## Mol mol

Die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso viel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 Gramm des Kohlenstoff-Isotops  $^{12}\text{C}$  in ungebundenem Zustand enthalten sind.

## Candela cd

Die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz  $540 \cdot 10^{12}$  Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1 / 683 Watt pro Steradian beträgt.

## Willkürliche Definition des Kilogramms:

- kg wird noch durch Referenzkörper definiert
- Urkilogramm: Platin-Iridium-Zylinder in Paris
- Kopien in anderen Ländern

## Mögliche Neudefinition:

- Perfekte Kugel aus Silizium-28-Einkristall mit 9,38 cm Radius
- → Weniger als 30 nm Abweichung
- Erde mit kleinster Erhebung von 1,82 m

- Einheiten bzw. Größen, die sich auf SI-Einheiten bzw. Basisgrößen zurückführen lassen
- Zusammenhang folgt aus Naturgesetzen
- **Wichtig:** Einheiten sind Teil der Gleichungen
- Einheitentest als hilfreiche Kontrolle

## Beispiel

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}(\text{intervall})}{\text{Zeit}(\text{intervall})}$$

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Größe	Berechnung	Einheit
Fläche	$A = \text{Länge} \times \text{Breite}$	$\text{m}^2$
Winkel	$\varphi = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$	$\frac{\text{m}}{\text{m}} = \text{rad}$
Raumwinkel	$\Omega = \frac{\text{Fläche des Kugelausschnitts}}{\text{Quadrat des Kugelradius}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = \text{sr}$
Frequenz	$f = \nu = \frac{1}{\text{Periodendauer}}$	$\frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{\text{Wegintervall}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Kraft	$\vec{F} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$	$\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
Arbeit, Energie	$W = E = \text{Kraft} \times \text{Weg}$	$\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{J}$
Leistung	$P = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeitintervall}}$	$\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} = \text{W}$



Würfel mit Kantenlänge

$$l = 10 \text{ cm}$$

Volumen:

$$V = l^3$$

$$V = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$$

$$= 1000 \text{ cm}^3$$

$$= 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m}$$

$$= 0,001 \text{ m}^3$$

Geschwindigkeit  $v$  eines  
Fahrrades

$$\begin{aligned} v &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 5 \frac{1/1000 \text{ km}}{1/3600 \text{ h}} \\ &= 5 \frac{3600 \text{ km}}{1000 \text{ h}} \\ &= 5 \cdot 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

# Auswertung eines Experiments

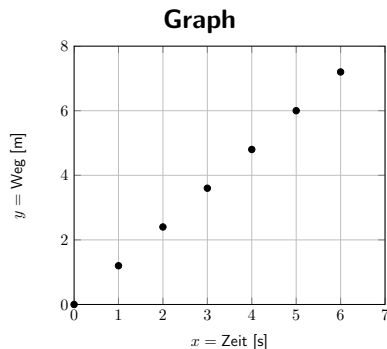
Einfachster Fall: 2 Messgrößen

- Z.B.: Zeit  $t$  und zurückgelegte Strecke  $s$
- Häufig: experimenteller Parameter ( $t$ ) und Observable ( $s$ )

**Beispiel:** Bewegung mit  $v = 1,2 \text{ m/s}$

Darstellung:

Wertetabelle	
Zeit [s]	Weg [m]
0	0
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6
6	7.2



Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen  $f$  beschrieben:

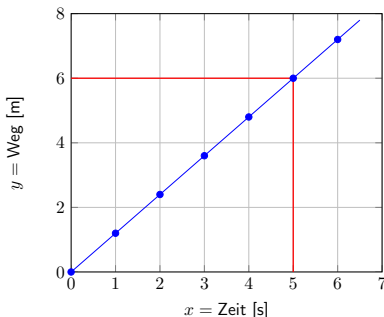
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



z.B.

$$s(5 \text{ s}) = 6 \text{ m}$$

# Analytische Beschreibung

Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen  $f$  beschrieben:

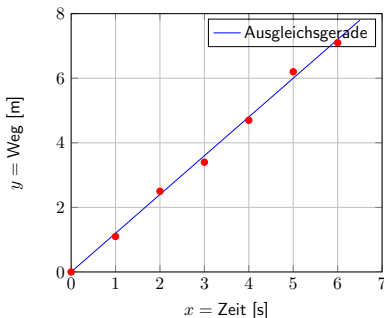
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



Bei einem Experiment  
 nie einfach die Punkte  
 des Graphens aller  
 Messwerte verbinden,  
 sondern **interpolieren**  
 und so die  
**Ausgleichsgerade**  
 finden!

- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen**
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren

Definition: Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen  $D$  und  $W$ , in der jedem Element aus  $D$  **ein Bestimmtes** Element aus  $W$  zugeordnet ist.

- $D$ =Definitionsmenge
- $W$ =Wertemenge

## Allgemeine Geradengleichung

$$f(x) = y = a \cdot x + b$$

$b$ :  $y$ -Achsenabschnitt ( $f(0) = b$ )

## Sonderfall: $b = 0$ Proportionalität

$$y \propto x$$

$a$ : Proportionalitätsfaktor

Definition der Steigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Für eine Gerade:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Beweis:

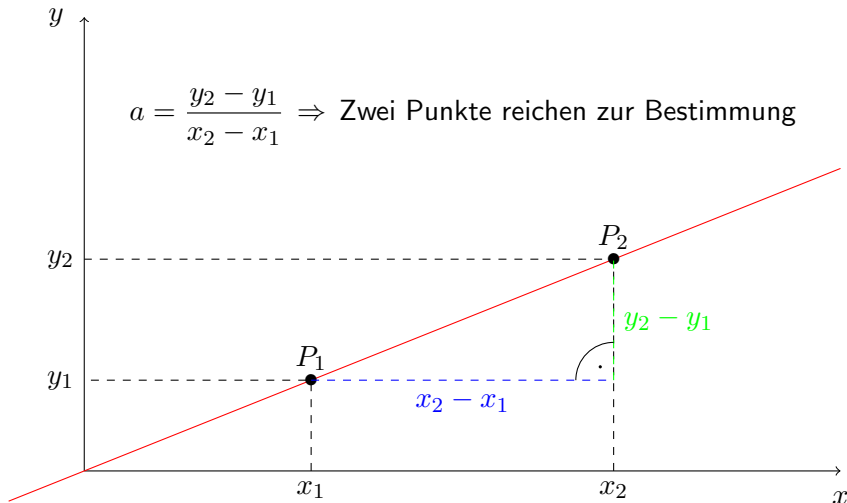
$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a \end{aligned}$$



# Steigung eine Geraden

Steigung  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

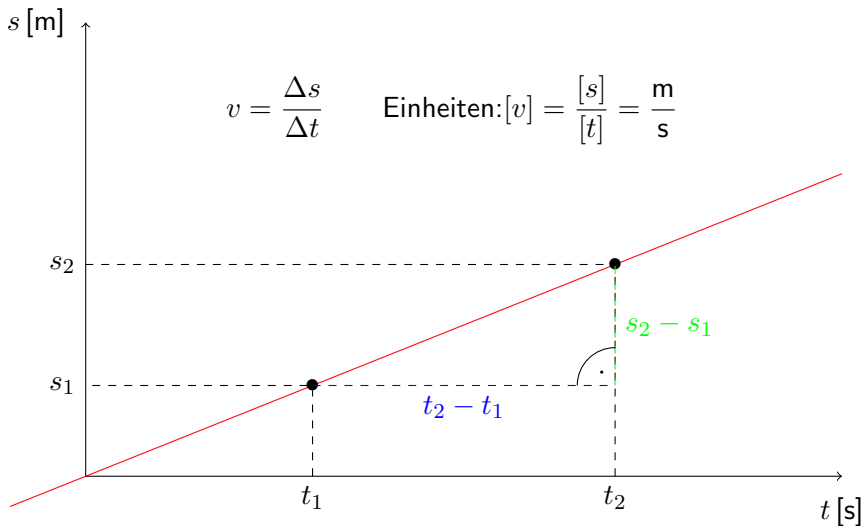
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow$  Zwei Punkte reichen zur Bestimmung

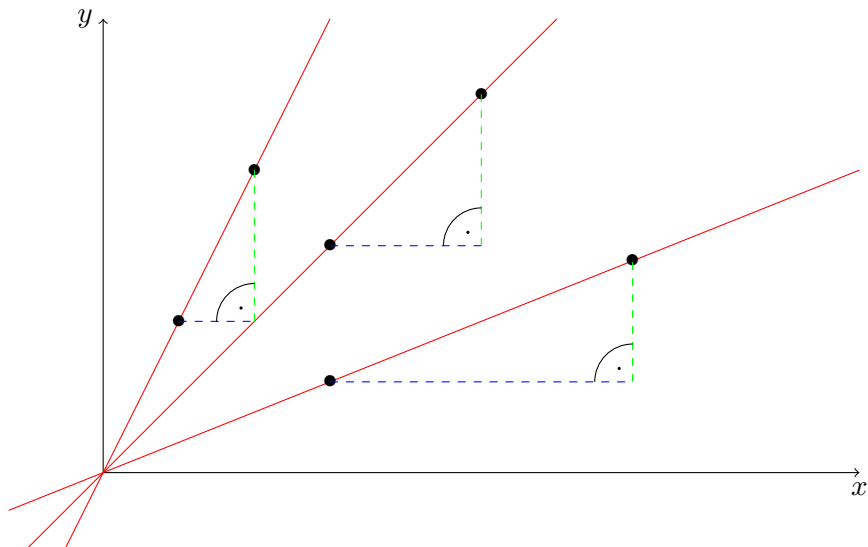


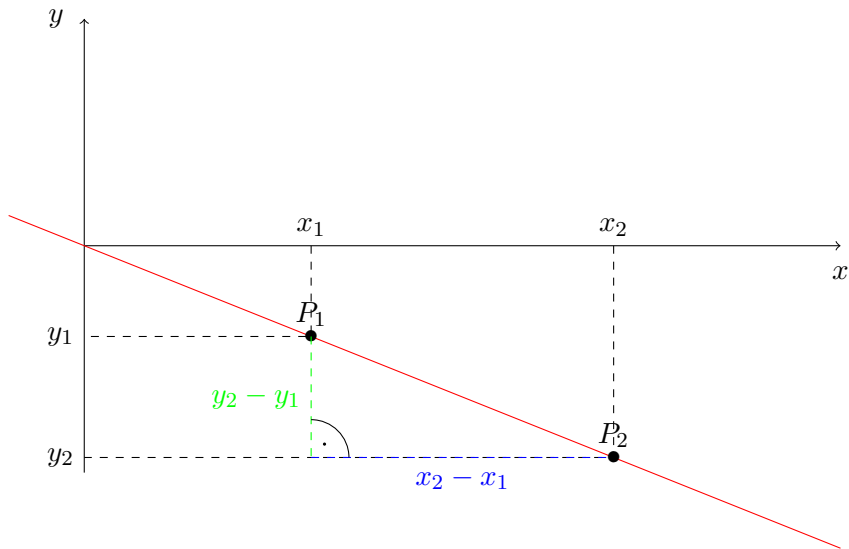
# Beispiel: Geschwindigkeit

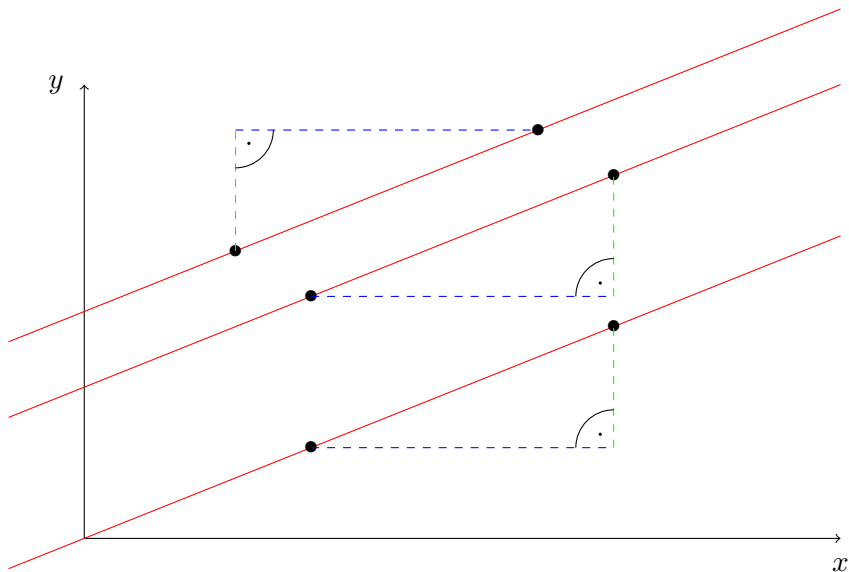
$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Zurückgelegter Weg}}{\text{Benötigte Zeit}}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{Einheiten: } [v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



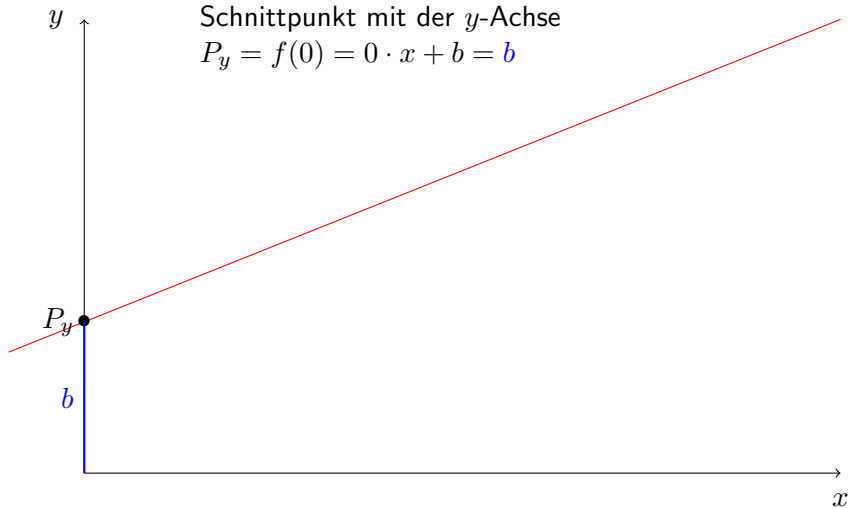




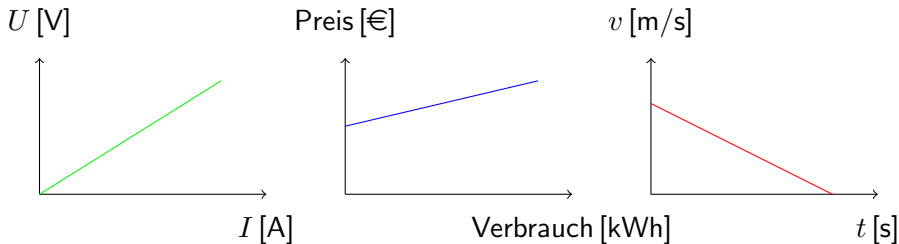


Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse

$$P_y = f(0) = 0 \cdot x + b = b$$



- Ohmsches Gesetz:  $U = R \cdot I$
- Stromkosten: Grundgebühr + Verbrauch
- Gleichförmig verzögerte Bewegung



- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen**
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren



## Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst

z.B.:  $x \cdot x = x^2 \rightarrow$  2. Potenz von  $x$

- 0. Potenz:  $x^0 = 1$
- 1. Potenz:  $x = x^1$
- 2. Potenz:  $x \cdot x = x^2$
- 3. Potenz:  $x \cdot x \cdot x = x^3$
- n. Potenz:  $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n = x^n$

$n$  nennt man **Exponent** oder Hochzahl

## Überlegung

$$\begin{aligned}x^n \cdot x &= x^{n+1} \\x^n \cdot x \cdot \frac{1}{x} &= x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \\x^n &= x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \\&\Rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^0 &= x^{n-n} \\&= x^n \cdot x^{-n} \\&= \frac{x^n}{x^n} = 1 \\&\Rightarrow x^0 = 1\end{aligned}$$

## Produkt

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_n \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_m = x^{n+m}$$

## Quotient

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n \cdot \frac{1}{x^m} = x^n \cdot x^{-m} = x^{n-m}$$

## Potenz

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_n \cdot \dots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_n}_{m} = x^{n \cdot m}$$

- $(-1)^6 = ((-1)^2)^3 = 1^3 = 1$
- $(1/10)^4 = (10^{-1})^4 = 10^{-4} = 1/10^4 = 0,0001$
- $0,1^5 = (1/10)^5 = 0,00001$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 = 8 + 16 - 32 = -8$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 = 2^3 + 2^1 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2^3 = 2^3(1 + 2 - 2^2) = 8 \cdot (-1) = -8$
- $a^5 \cdot a^2/a^4 = a^{(5+2-4)} = a^3$
- $(a/b^2)^3 \cdot (b^2/a)^3 = a^3 \cdot b^{-6} \cdot b^6 \cdot a^{-3} = a^0 \cdot b^0 = 1$
- $a^{-2} \cdot a^{-3} \cdot a^4 = a^{-2-3+4} = a^{-1} = 1/a$
- $(a^{-1} \cdot b^{-5})^{-2} = a^{-1 \cdot -2} \cdot b^{-5 \cdot -2} = a^2 \cdot b^{10}$

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen

Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

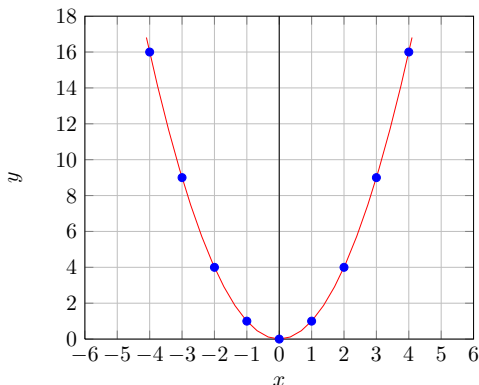
$$f(x) = y = x^2$$

- 0. Grades:  $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades:  $f(x) = a \cdot x^1 + b$
- 2. Grades:  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  Quadratische Gleichung
- 3. Grades:  $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- n. Grades:  $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$

Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit  $a = 1$  und  $b = c = 0$

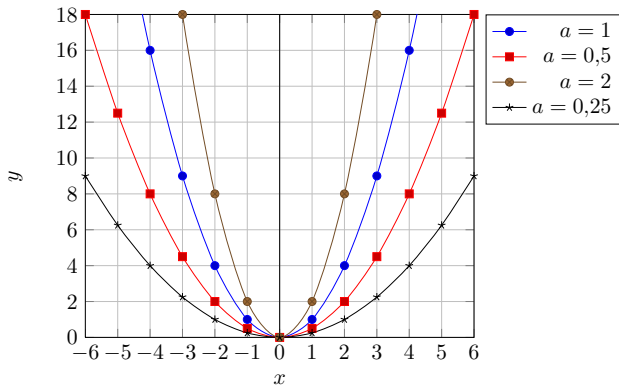
$$f(x) = y = x^2$$

$x$	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



# Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung

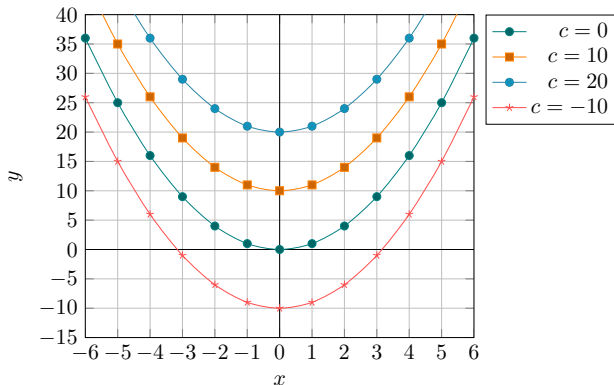
$$f(x) = a \cdot x^2$$



- $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = x^2 \rightarrow$  nur positive Werte
- $f(-x) = f(x) \rightarrow$  symmetrisch zur  $y$ -Achse
- $f(0) = 0 \rightarrow$  Scheitelpunkt im Ursprung

$$f(x) = x^2 + c$$

⇒ Scheitelpunkt bei  $y_s = c$

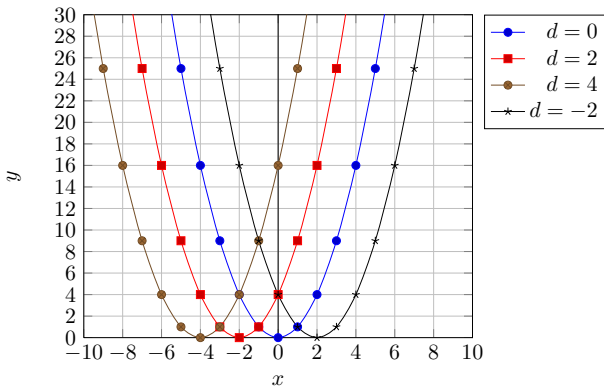




$$f(x) = (x + d)^2$$

1. Binomische Formel:  $(x + d)^2 = x^2 + 2d \cdot x + d^2$

Scheitelpunkt bei  $x_s = -d$



## Quadratische Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

## Wie finde ich den Scheitelpunkt $S$ ?

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a \cdot x^2 - 2a \cdot x_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s$$

## Koeffizientenvergleich:

$$b = -2a \cdot x_s \quad \Rightarrow \quad x_s = \frac{-b}{2a}$$

$$c = a \cdot x_s^2 + y_s \quad \Rightarrow \quad y_s = c - a \cdot x_s^2 = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Meistens ist aber gegeben:  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Ausklammern des Leitkoeffizienten

$$f(x) = a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a} \cdot x \right) + c$$

Quadratische Ergänzung

$$f(x) = a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \underbrace{\left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2}_{=0} \right) + c$$

Binomische Formel *rückwärts*

$$f(x) = a \cdot \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

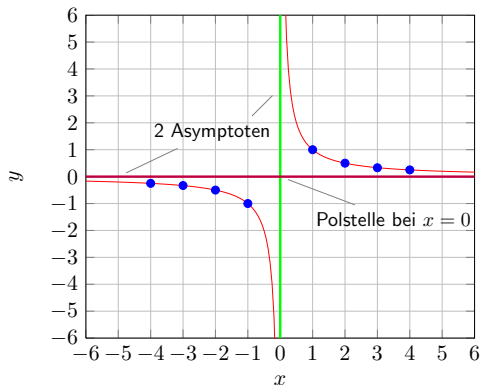
$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Negativen Potenz  $\rightarrow$  Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

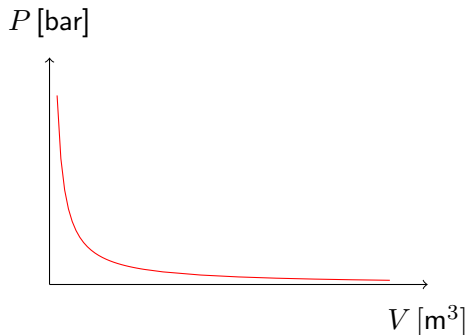
Beispiel **Hyperbel**  $f(x) = x^{-1}$

$x$	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25



**Gesetz von Boyle-Mariotte** Gilt für abgeschlossene Gasmenge bei konstanter Temperatur  $T$  mit Volumen  $V$  und Druck  $P$

$$P \propto V^{-1} \text{ oder } P = c/V \text{ mit Konstante } c$$



Gegeben:  $y = f(x)$

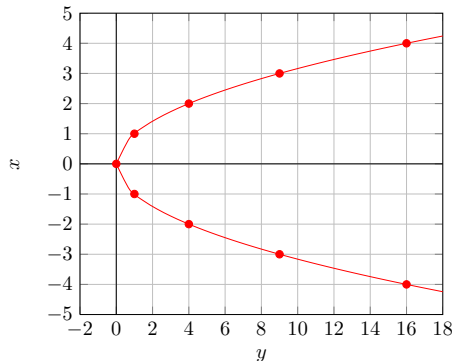
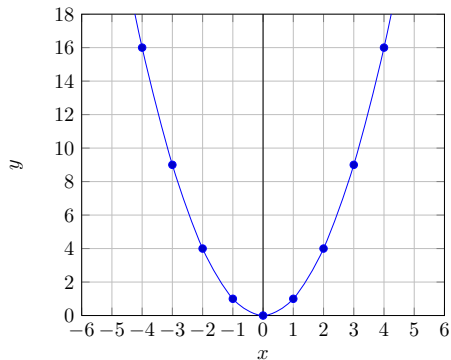
Gesucht: Funktion, die zu jedem  $y$ -Wert den zugehörigen  $x$ -Wert liefert

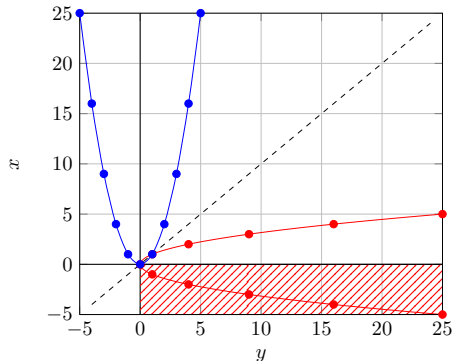
Definition: Diese Funktion heißt Umkehrfunktion  $f^{-1}$ :  $x = f^{-1}(y)$

$x$	$f(x) = y = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

$y$	$x = f^{-1}(y)$
16	-4
9	-3
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4







Graphische Folge:  
**Spiegelung an der Diagonalen**

Funktion muss jedem  $x$ -Wert  
**eindeutig** einen Funktionswert  $y$   
zuordnen

## Wurzel

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Umkehrfunktion zu einfachen Potenzen:  $f(x) = x^m$

Rechenregeln wie bei Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$

$$\left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$$

# Nullstellen einer Quadratischen Gleichung

**Nullstelle:**  $f(x) = y = 0$

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Normierte Form: Teilen durch  $a$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Mit  $\frac{b}{a} = p$  und  $\frac{c}{a} = q$ :

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Lösung mit  $p$ - $q$ -Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

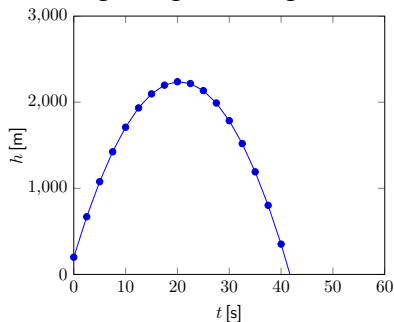
# Beispiel: Kanone auf Hügel

## Gegeben

- Höhe des Hügels  $h_0 = 200$  m
- Startgeschwindigkeit in vertikaler Richtung  $v_0 = 200$   $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{mit } g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Wie lange fliegt die Kugel?



$$h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot \frac{v_0}{g} \cdot t - 2 \cdot \frac{h_0}{g} = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2 \cdot \frac{h_0}{g}}$$

$$t_{1/2} = (20,4 \text{ s} \pm 21,4 \text{ s})$$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung  $y = f(x)$  auf die Form  $x = f^{-1}(y)$  umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch  $x$
- Auf der anderen Seite darf  $x$  nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen (**Umkehroperationen**) auf beiden Seiten:

- ① Subtraktion von  $c$ :  $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
- ② Division durch  $a$ :  $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
- ③ Potenzieren mit  $m$ :  $\left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$
- ④ Ziehen der  $n$ ten Wurzel:  $\sqrt[n]{\left(\frac{y-c}{a}\right)^m} = \left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$

$$s(t) = 0,5 \cdot a \cdot t^2$$

Multiplikation mit 2:

$$2 \cdot s = a \cdot t^2$$

Division mit  $a$ :

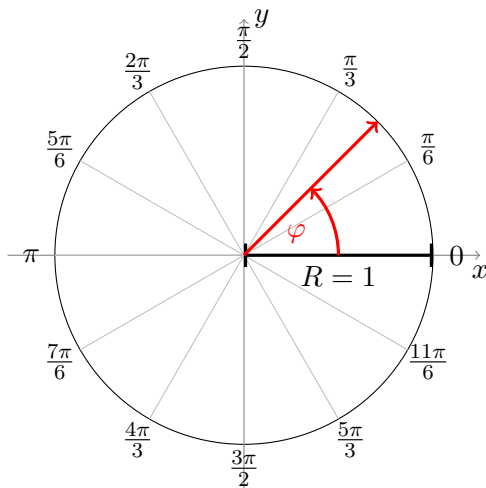
$$2 \cdot \frac{s}{a} = t^2$$

Ziehen der Quadratwurzel:

$$t(s) = \sqrt{2 \cdot \frac{s}{a}}$$



- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen**
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren



- Kreis mit Radius  $R = 1$
- Winkel gegen den Uhrzeigersinn definiert (Rechtsdrehung)
- Eine Umdrehung:  $360^\circ$
- Kreisumfang:  $U = 2\pi R$
- $\rightarrow 360^\circ = 2\pi \text{ rad} = 2\pi$
- rad=Radian=Bogenmaß
- Einheit „rad“ wird weggelassen

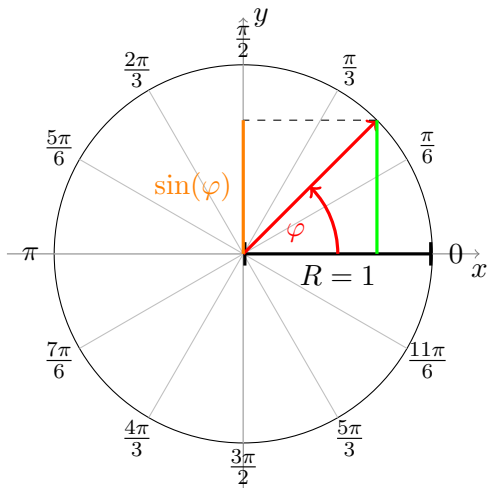
- $\alpha$ : Winkel in Grad
- $\varphi$ : Winkel im Bogenmaß

Es gilt:

$$360^\circ \hat{=} 2\pi$$

Für den gleichen Winkel  $\alpha = \varphi$  folgt also:

$$\begin{aligned}\alpha &= \varphi \\ \frac{\alpha}{360^\circ} &= \frac{\varphi}{2\pi} \\ \alpha &= \frac{\varphi}{2\pi} 360^\circ = \varphi \frac{180^\circ}{\pi} \\ \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi &= \alpha \frac{\pi}{180^\circ} = \varphi\end{aligned}$$



- $\sin(\varphi)$ : **Projektion** des Einheitsvektors auf die  $y$ -Achse
- **Gegenkathete** des Dreiecks aus Einheitsvektor und  $x$ -Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

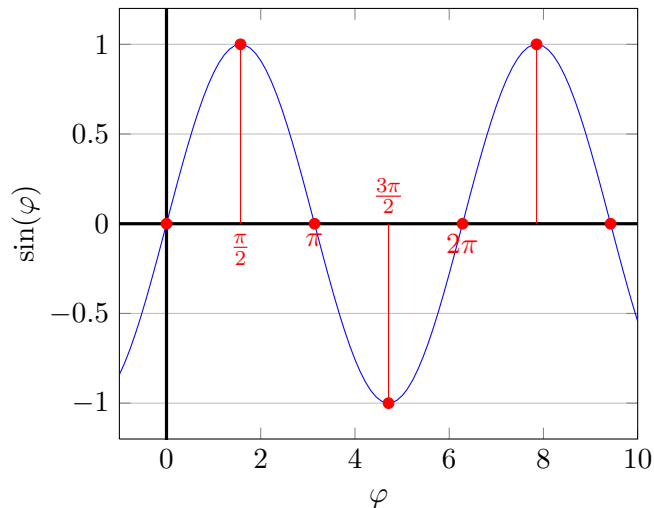
$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(0) = 0$$

$$\sin(\pi/2) = 1$$

$$\sin(\pi) = 0$$

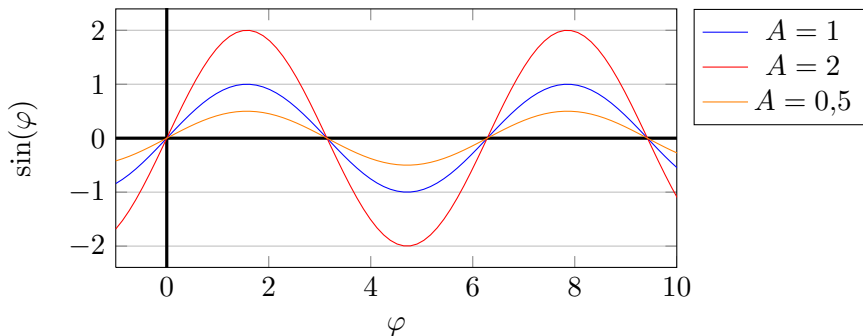
$$\sin(3\pi/2) = -1$$



## Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

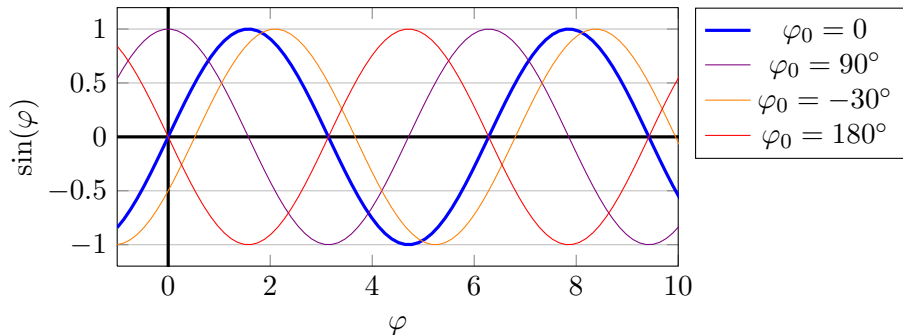
**Amplitude:** Höhe der Kurve  
Entspricht Radius bzw. Hypotenuse



## Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

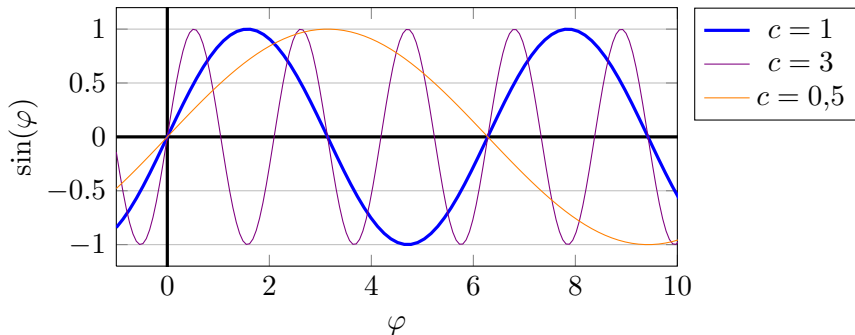
**Phase:** Verschiebung entlang  $x$ -Achse



## Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

**Periode  $P$ :** Abstand zwischen zwei gleichen Kurvenpunkten, z.B. Maxima



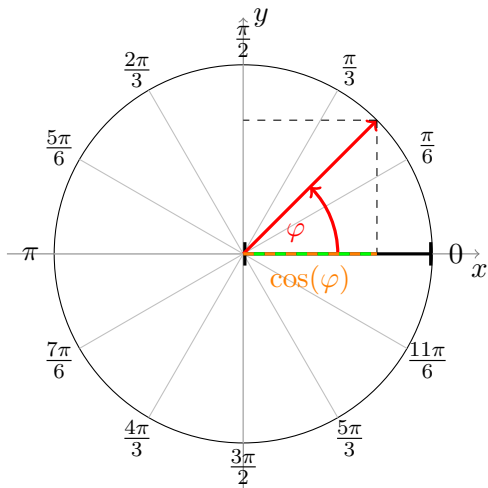


- Normaler Sinus hat die Periode  $P = 2\pi$
- Allgemeine Sinus-Funktion mit Periode  $P$ :

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{P}\varphi + \varphi_0\right)$$

- Also  $c = \frac{2\pi}{P}$  bzw.:

$$P = \frac{2\pi}{c}$$



- $\cos(\varphi)$ : **Projektion** des Einheitsvektors auf die  $x$ -Achse
- **Ankathete** des Dreiecks aus Einheitsvektor und  $x$ -Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

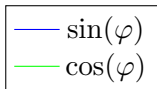
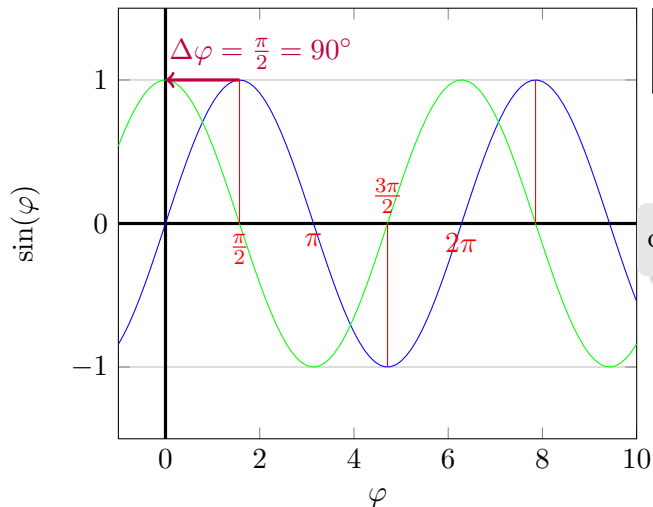
$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(0) = 1$$

$$\cos(\pi/2) = 0$$

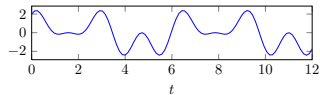
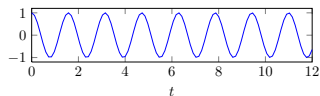
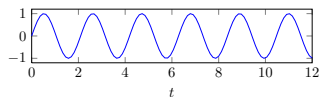
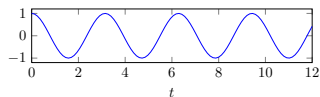
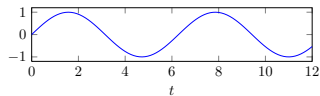
$$\cos(\pi) = -1$$

$$\cos(3\pi/2) = 0$$



$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

## Überlagerung von harmonischen Schwingungen



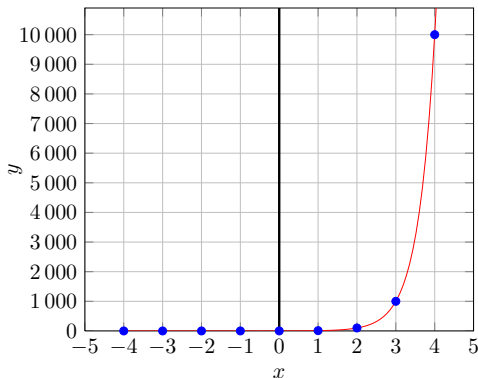
- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen**
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren

- Variabler Exponent  $f(x) = y = B^x$
- B nennt man Basis
- Extrem schnelles Wachstum!

**Exponentielles Wachstum**

Beispiel:  $B = 10$

$x$	$f(x) = 10^x$
-4	0,0001
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000



Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
$10^{24}$	Yotta	Y	$10^{-1}$	Dezi	d
$10^{21}$	Zetta	Z	$10^{-2}$	Zenti	c
$10^{18}$	Exa	E	$10^{-3}$	Milli	m
$10^{15}$	Peta	P	$10^{-6}$	Mikro	$\mu$
$10^{12}$	Tera	T	$10^{-9}$	Nano	n
$10^9$	Giga	G	$10^{-12}$	Piko	p
$10^6$	Mega	M	$10^{-15}$	Femto	f
$10^3$	Kilo	k	$10^{-18}$	Atto	a
$10^2$	Hekto	h	$10^{-21}$	Zepto	z
$10^1$	Deka	da	$10^{-24}$	Yocto	y

- Weltall  $10^{26}$  m
  - Galaxis  $10^{20}$  m
  - Sonnensystem  $10^{14}$  m
  - Erde  $10^7$  m
  - Mensch  $10^0$  m
  - DNA  $10^{-7}$  m
  - Atom  $10^{-10}$  m
  - Atomkern  $10^{-14}$  m
  - Proton  $10^{-15}$  m
- Astronomie, Astrophysik
- Biologie, Biophysik,  
Medizin
- Atom- und Kernphysik
- Chemie

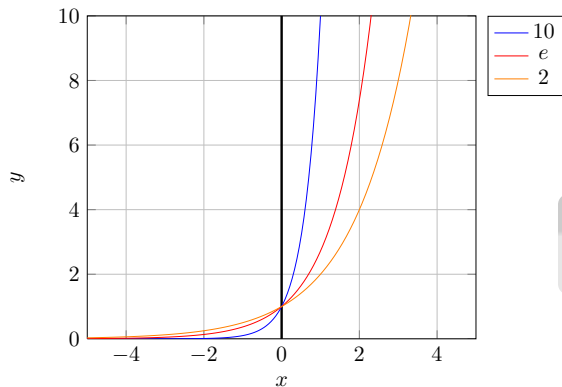
<http://htwins.net/scale2/index.html>

<http://www.youtube.com/watch?v=0fKBhvDjuy0>



Lebensdauer des Higgs-Bosons	$10^{-22}$ s
Schwingungsperiode von sichtbarem Licht	$10^{-15}$ s
Laufzeit des Lichts durch das Auge (3 cm)	$10^{-10}$ s
Taktzeit eines Pentiumprozessors	$10^{-9}$ s
Blitz beim Fotoapparat	$10^{-5}$ s
Nervenleitung (1 m)	$10^{-2}$ s
Kürzeste Reaktionszeit	$2 \cdot 10^{-1}$ s
Konzentrationszeit	$5 \cdot 10^3$ s
Studiendauer	$1,6 \cdot 10^8$ s
Lebensdauer eines Menschen	$3 \cdot 10^9$ s
Unsere Milchstraße	$3 \cdot 10^{17}$ s
Alter des Universums (15 Mrd Jahre)	$5 \cdot 10^{17}$ s
Mittlere Lebensdauer eines Protons	$> 5 \cdot 10^{32}$ s

Elektron	$10^{-30}$ kg
Proton	$10^{-27}$ kg
Aminosäure	$10^{-25}$ kg
Hämoglobin	$10^{-22}$ kg
Virus	$10^{-20}$ kg
Salzkorn	$10^{-8}$ kg
Menschliches Haar	$10^{-6}$ kg
DIN A6 Blatt	$10^{-3}$ kg
Mensch	$10^2$ kg
Großer LKW	$10^4$ kg
Pyramide	$10^{10}$ kg
Sonne	$10^{24}$ kg



- $x$ -Achse ist Asymptote
- Schneidet immer bei  $y = 1$

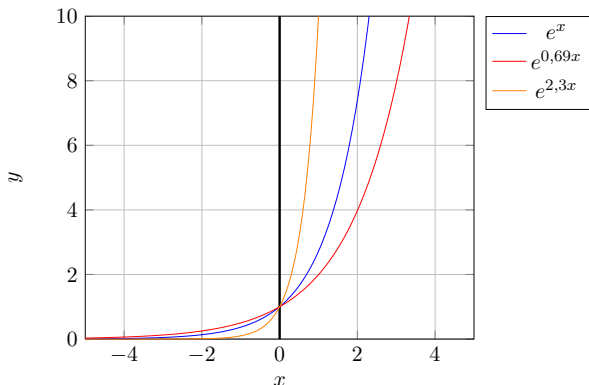
Eulersche Zahl

$$e \sim 2,718$$

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

**Faktor  $b$  im Exponenten** wirkt wie andere Basis, da  $B^{b(x-x_0)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



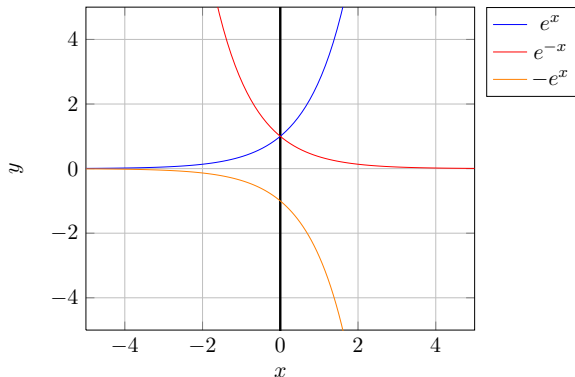
- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise  $e$
- $e^x = \exp(x)$

# Abfallende Exponentialfunktion

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

**Negative  $b$ : exponentiell fallend** ( $e^{-x} = 1/e^x$ )



$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

- Faktor  $b$  im Exponenten  $\rightarrow$  wirkt wie andere Basis
- Negative  $b \rightarrow$  **exponentiell fallend**
- Verschiebung entlang der  $x$ -Achse  $:x_0$
- Verschiebung entlang der  $y$ -Achse  $:c$

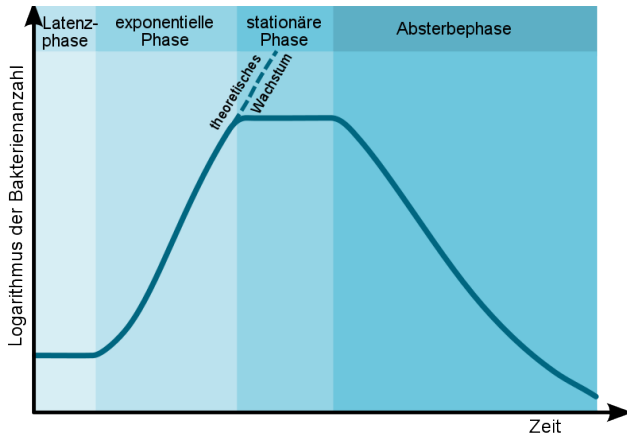
- Vermehrung von Bakterien
- Findet durch Zellteilung statt
- Im Mittel feste Periode

Beispiel: Generationszeit von  $T_G = 10$  Minuten

Teilungen	Bakterien	Zeit
0	1	0
1	2	10
2	4	20
3	8	30
4	16	40
⋮	⋮	⋮
12	8096	120

$$B(t) = B_0 \cdot 2^{t/T_G}$$

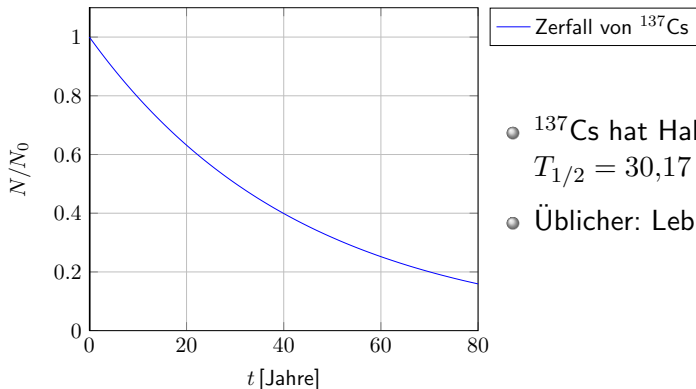
## Ideale Wachstumskurve einer statischen Bakterienkultur



Quelle [http://de.wikipedia.org/wiki/Bakterielles\\_Wachstum](http://de.wikipedia.org/wiki/Bakterielles_Wachstum)



$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

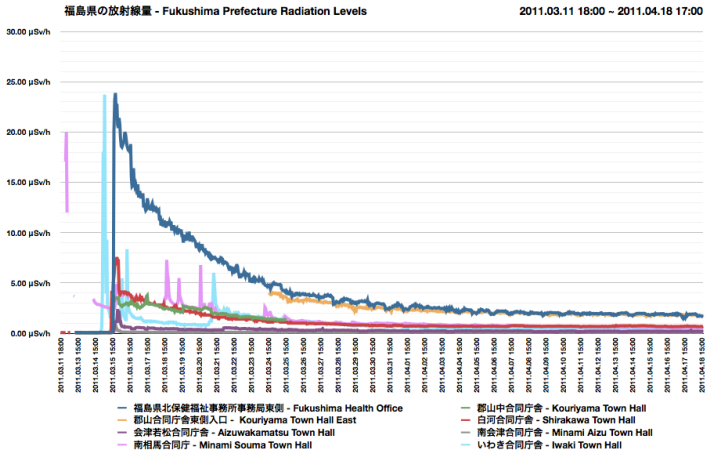


- $^{137}\text{Cs}$  hat Halbwertszeit  $T_{1/2} = 30,17 \text{ a}$

- Üblicher: Lebensdauer  $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)}$

# Beispiel: Strahlenbelastung

## Radioaktiver Zerfall – Strahlenbelastung

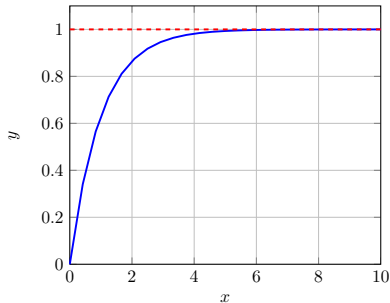


Data from <http://www.pref.fukushima.jp/>

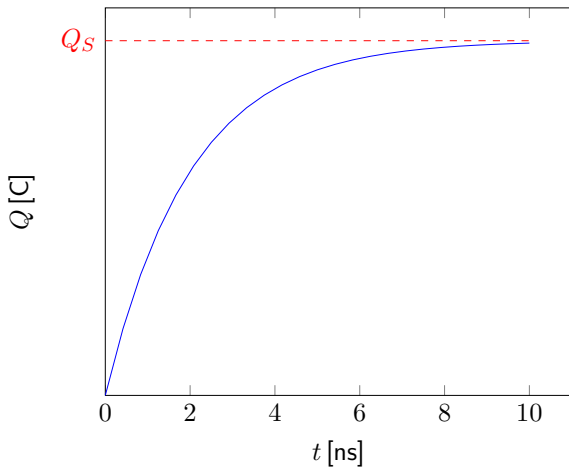
Quelle: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fukushima\\_I\\_radiation,\\_Fukushima\\_Prefecture\\_2,\\_March-April\\_2011.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fukushima_I_radiation,_Fukushima_Prefecture_2,_March-April_2011.png)

- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasant ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle

$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



$$Q(t) = Q_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen**
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren

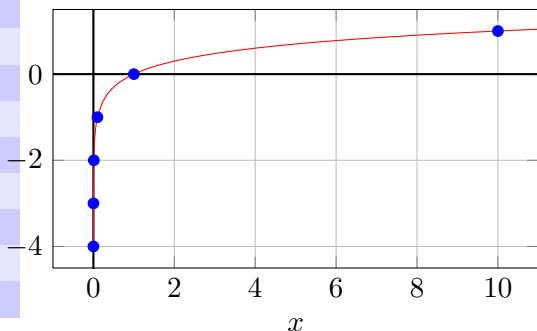
Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$$x = 4$$

$$x = \log_{10}(10000)$$

$f(x) = 10^x$	$x$
$x$	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4



$$10^x = 10000$$

$$x = \log_{10}(10000) = 4$$

- $x = 4$ : Anzahl der Nullen
- $\log_{10}$  steht für Logarithmus zur Basis 10
- Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit gleicher Basis
- Wächst extrem langsam

Gegeben

$$b = a^x \quad \text{mit } a > 0$$

Lösung: **Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$**

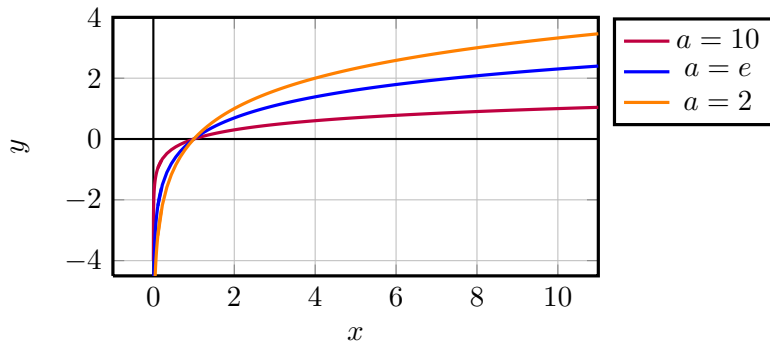
$$x = \log_a b$$

Besondere Basen:

$$10: \log_{10} b = \lg b$$

$$e: \log_e b = \ln b$$





- $y$ -Achse ist Asymptote
- Schneidet  $x$ -Achse bei  $x = 1$

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei  $A = 10^n$  und  $B = 10^m$ ,

dann gilt  $\lg(A) = n$  und  $\lg(B) = m$

und  $A = 10^{\lg(A)}$  und  $B = 10^{\lg(B)}$

## Multiplikation

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} \\ &= 10^{\lg(A) + \lg(B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg(A \cdot B) &= \lg(10^{\lg(A) + \lg(B)}) \\ &= \lg(A) + \lg(B) \end{aligned}$$

## Multiplikation

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

## Division

$$\log_b(A/B) = \log_b(A) - \log_b(B)$$

## Potenz

$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

## Wurzel

$$\log_b(\sqrt[m]{A}) = \log_b(A)/m$$

$$\begin{aligned}\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) &= \log_2\left(\frac{10 \cdot x}{40}\right) \\ &= \log_2\left(\frac{x}{4}\right) \\ &= \log_2\left(\frac{x}{2^2}\right) \\ &= \log_2(x \cdot 2^{-2}) \\ &= \log_2(x) + \log_2(2^{-2}) \\ &= \log_2(x) - 2\end{aligned}$$

$\lg(A)$  sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B.  $\ln(A)$ ?

$$A = e^{\ln(A)}$$

$$10^{\lg(A)} = A = e^{\ln(A)}$$

$$\ln(10^{\lg(A)}) = \ln(A)$$

$$\lg(A) \ln(10) = \ln(A)$$

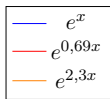
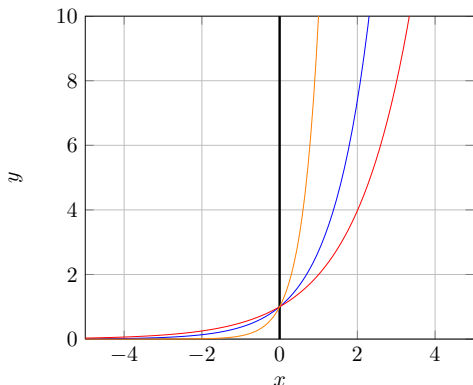
Allgemein

$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor  $b$  im Exponenten wirkt wie andere Basis, da  $B^{b(x-x_0)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise  $e$

Um von einer beliebigen Basis  $B$  auf die Basis  $e$  zu kommen:

$$B^x = e^{\ln(B) \cdot x}$$

Z.B. für die  $y$ -Achse

- Trage jeden Messwert  $y$  an der Stelle  $\lg(y)$  auf.

$$1 \rightarrow \lg(1) = 0$$

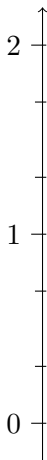
$$10 \rightarrow \lg(10) = 1$$

$$100 \rightarrow \lg(100) = 2$$

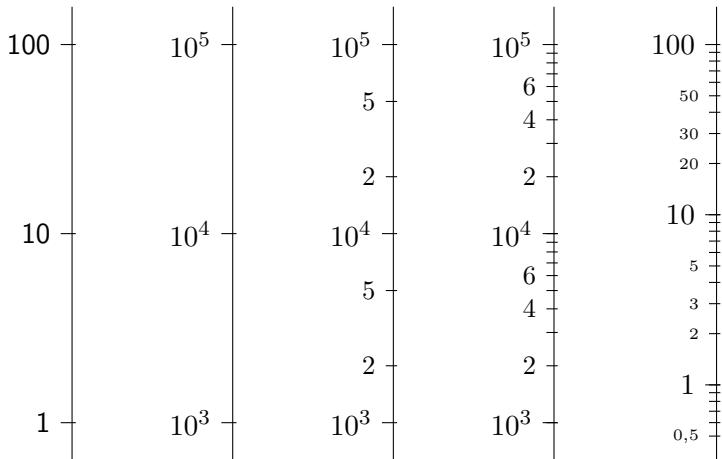
$$2 \rightarrow \lg(2) \simeq 0,3$$

$$5 \rightarrow \lg(5) \simeq 0,7$$

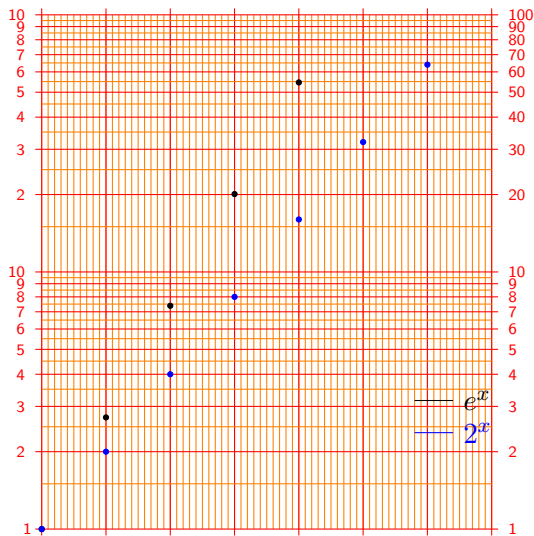
- $\lg(x)$  nur für positive  $x$
- Darstellung nur für positive  $y$ -Werte möglich



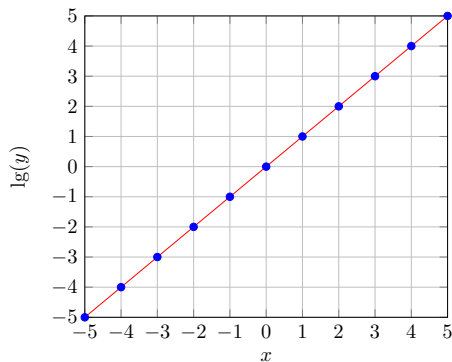
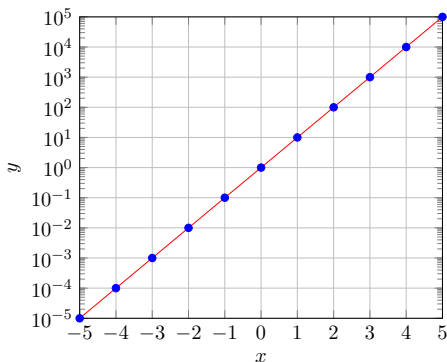
## Verschiedene Beschriftungen möglich







- logarithmische  $Y$ -Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

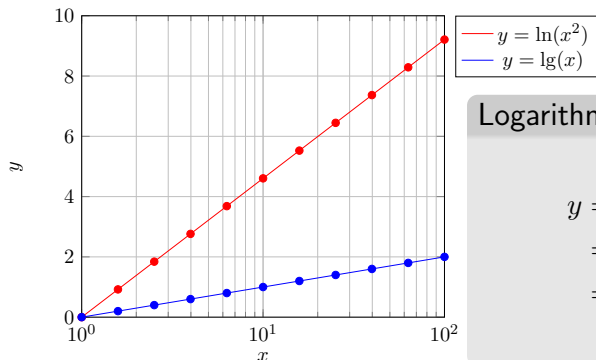


Beispiel  $10^x$ : logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$

$$y = B^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x \cdot \lg(B)$$

Steigung =  $c \cdot \lg(B)$



## Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned}y &= \log_b(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)\end{aligned}$$

Steigung:  $n \log_b(10)$

## Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

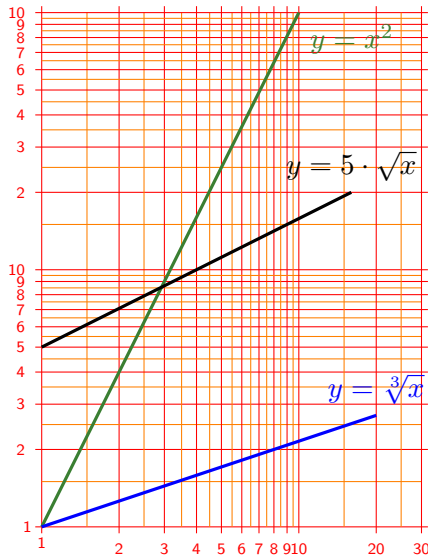
Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung  $n$
- y-Achsenabschnitt  $\lg(a)$

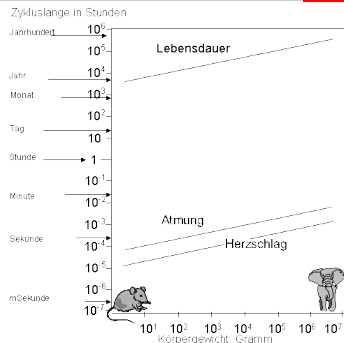
wenn man  $\lg(y)$  gegen  $\lg(x)$  aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt:

$\lg(x) = 0$  bei  $x = 1$



- Messen und Vergleichen von Beziehungen zwischen der Körpergröße von Lebewesen und deren Verhältnis zu verschiedensten biologischen Größen



Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Allometrie>

## Klassische Allometrieformel

$$y = a \cdot x^b$$

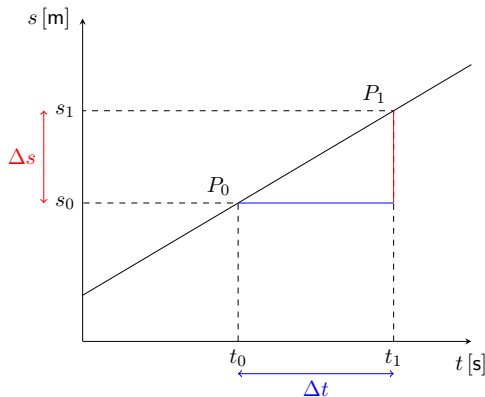
- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation**
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren

**Beispiel:**

- Auto mit **konstanter Geschwindigkeit**  $v$
- Verhältnis aus zurückgelegtem Weg  $\Delta s$  und dafür benötigter Zeit  $\Delta t$  immer gleich

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Um die Geschwindigkeit zu messen, reicht es Zeit und Ort an einem Startpunkt  $P_0$  und an einem Stoppunkt  $P_1$  zu bestimmen.

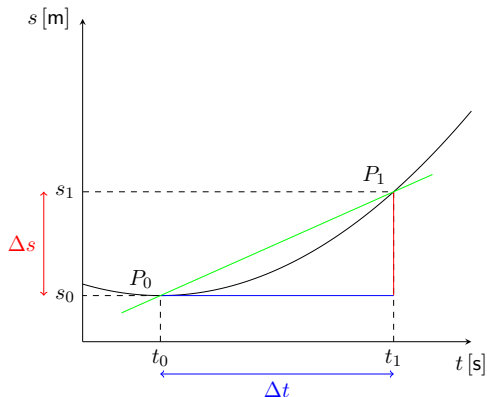


- $P_0$ : Startpunkt der Messung  
 $t_0$  Startzeit,  $s_0$  Startort
- $P_1$ : Stoppunkt der Messung  
 $t_1$  Stoppzeit,  $s_1$  Stoppport
- Geschwindigkeit konstant  
 $\Rightarrow v$  ist Steigung der Geraden

Geschwindigkeit

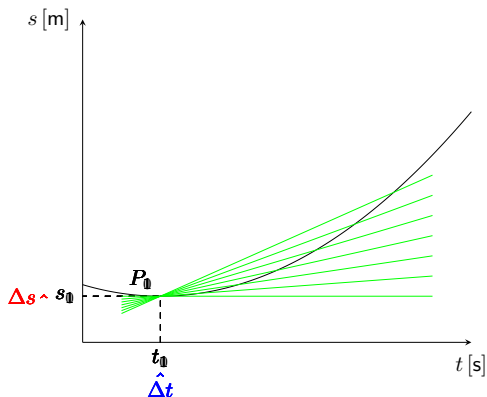
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$





- Geschwindigkeit nicht konstant,  $v$  abhängig von  $t$
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit  $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss  $t_1$  näher an  $t_0$  rücken

- $\Delta t$  muss so klein gewählt werden, dass die Geschwindigkeitsänderung während  $\Delta t$  vernachlässigbar klein wird.



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt  $P_0$  bzw. bei  $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$
- Tangente an die Kurve bei  $P_0$

Mathematisch kann man  $\Delta t$  „unendlich klein“ werden lassen

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_0}$$

Die Steigung der Kurve im Punkt  $P$  ist die Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

- Die **Ableitung** an einem Punkt  $P$  der Funktion  $f(x)$  gibt die Steigung der Tangente an  $f(x)$  im Punkt  $P$  an.
- Mathematisch definiert durch den **Differentialquotienten**  $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$
- Im Differentialquotienten sind die Differenzen infinitesimal klein.

Man schreibt:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$f(x)$	$y' = f'(x)$
$c$	$0$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$e^x$	$e^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel:  $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{7}{x}$

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel:  $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + e^x$



$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)))/\cos^2(x) \\ &= 1 + \sin^2(x)/\cos^2(x) \\ &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = f(x) = f(u(x)) &\rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u) \cdot u'(x)\end{aligned}$$

- **Innere Ableitung** mal **äußere Ableitung**
- Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) = e^{x^2} &\rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u \\ f'(x) &= 2xe^{x^2}\end{aligned}$$

## ① Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

## ② Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

## ③ Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

## ④ Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v(x)^2$$

## ⑤ Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) = 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3/x^2$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) = 3/(5 \cdot \sqrt[5]{x^2})$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) = (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x + 1) \rightarrow f'(x) = (1 + 1/x - \ln(x))/(x + 1)^2$

- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler**
- 10 Vektoren

## Systematische Fehler

- Falsche Eichung
- Fehlerhaftes Messgerät
- NÄhrungen
- LÄngenÄnderung durch Temperatur
- ...

## Zufällige Fehler

- Ablesefehler
- statistische Schwankungen
- Spiel bei Mikrometerschraube
- ...

**Zufällige Fehler lassen sich durch Wiederholung der Messung verringern!**

Messergebnis = Messwert  $\pm$  Fehler

Absoluter Fehler

$$L = (5,63 \pm 0,05) \text{ m}$$

Relativer Fehler

$$L = 5,63 \text{ m} \pm 0,9\%$$

Fehler = Zufallsfehler + systematischer Fehler

$$L = (5,63 \pm 0,03 \text{ (stat.)} \pm 0,04 \text{ (sys.)}) \text{ m}$$

Der **wahre Wert** ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Fehlerintervall enthalten.



Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.  
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

## Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert  $x_i$  liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

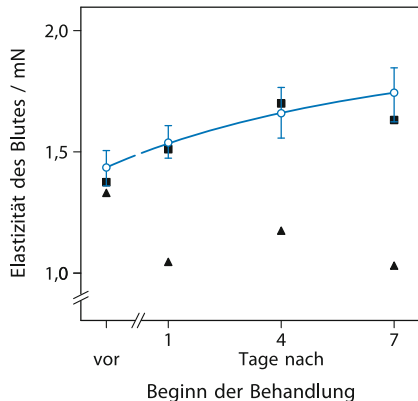
Fehler des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Je häufiger ich messe, desto kleiner wird der Fehler des Mittelwerts! Um ihn zu halbieren brauche ich 4 mal so viele Messwerte!

## Trombelastogramm während einer Behandlung mit Heparin



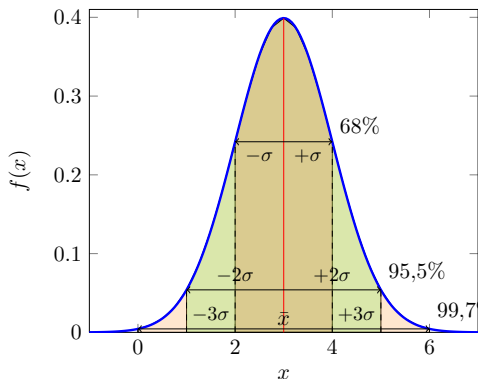
Aus: Harten *Physik für Mediziner*

- Beobachtungsgruppe von 28 Patienten
- ■ und ▲: zwei Mitglieder der Beobachtungsgruppe
- Blaue Kreise: Mittelwert der Werte aller Patienten
- Die blauen Fehlerbalken geben die Standardabweichung an





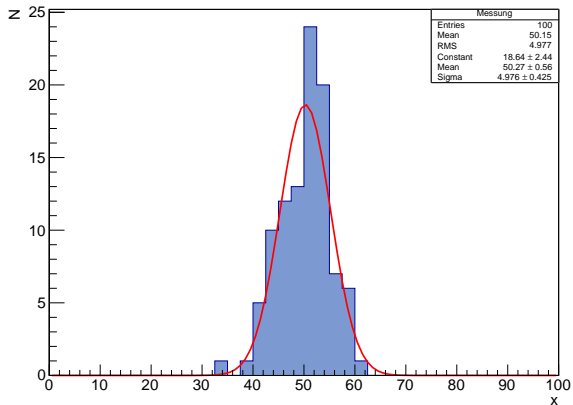
## Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

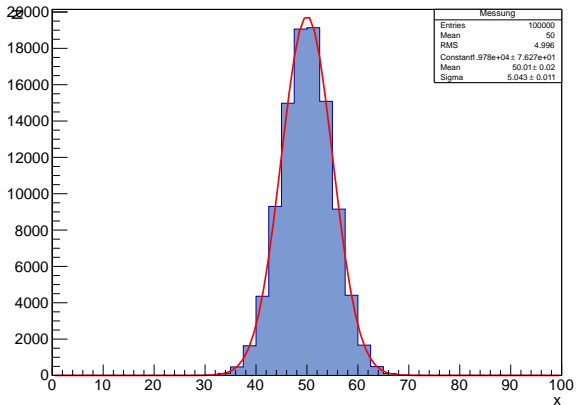


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert  $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

- Analog: 68% in  $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$
- 95,5% in  $[\bar{x} - 2\Delta\bar{x}, \bar{x} + 2\Delta\bar{x}]$
- 99,7% in  $[\bar{x} - 3\Delta\bar{x}, \bar{x} + 3\Delta\bar{x}]$







Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$x_i/[x]$	$(x_i - \bar{x})/[x]$	$(x_i - \bar{x})^2/[x]^2$
1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			
	$\sum_i x_i = \dots$		$\sum_i (x - \bar{x})^2 = \dots$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
$i$	$l_i/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

$$\text{Fehler: } \Delta \bar{l} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{6 \cdot 5} \cdot 4,19 \text{ cm}^2} = 0,3737 \text{ cm}$$

$$l = (37,1 \pm 0,4) \text{ cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$\begin{aligned} l &= 37,1 \text{ cm} \pm \frac{0,4}{37,1} \cdot 100\% \\ &= 37,1 \text{ cm} \pm 1,1\% \end{aligned}$$

- Messgröße setzt sich aus mehreren fehlerbehafteten Größen zusammen
- Nur die Fehler der einzelnen Größen sind bekannt

Wie groß ist der Gesamtfehler?

## Zwei Fälle

- Addition der Größen
- Multiplikation der Größen

Beispiel: Messung einer Länge  $l = l_A + l_B$ :

- Zwei Einzelmessungen  $l_A$  und  $l_B$  mit Fehler  $\Delta l_A$  und  $\Delta l_B$
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

## Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von  $v$  durch Messen des Weges  $s$  und der benötigten Zeit  $t$ .

*Kleinster Wert von  $v$ :*

$$v_{\min} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

*Größter Wert von  $v$ :*

$$v_{\max} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

- $\bar{v}$  liegt etwa in der Mitte von  $[v_{\min}, v_{\max}]$ .
- Die größere der Differenzen  $\bar{v} - v_{\min}$  bzw.  $v_{\max} - \bar{v}$  ist der Fehler  $\Delta\bar{v}$

# Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge  $a = (120,0 \pm 0,2) \text{ cm}$
- Kantenlänge  $b = (90,0 \pm 0,1) \text{ cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120 \text{ cm} \cdot 90 \text{ cm} = 10800 \text{ cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned}
 F_{\max} &= (\bar{a} + \Delta\bar{a})(\bar{b} + \Delta\bar{b}) \\
 &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b}}_{\text{klein}} \\
 &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \\
 F_{\min} &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} - \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}
 \end{aligned}$$

Es folgt für den Fehler:  $\Delta\bar{F} \simeq F_{\max} - \bar{F} \simeq \bar{F} - F_{\min} \simeq \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$

$$\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

## Allgemeine Regel

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta \bar{b}}{\bar{b}}$$

Der **relative Fehler von Produkten** (hier  $F = a \cdot b$ ) **und Quotienten** von Messwerten ist gleich der **Summe der relativen Fehler der Faktoren**



Zwei Größen  $a = \bar{a} + \Delta\bar{a}$  und  $b = \bar{b} + \Delta\bar{b}$

Addition oder Subtraktion:  $c = a + b$  bzw.  $c = a - b$

Werden  $a$  und  $b$  **addiert oder subtrahiert**, so **addieren** sich die **absoluten Fehler** zum absoluten Gesamtfehler:

$$\Delta\bar{c} = \Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}$$

Multiplikation oder Division:  $c = a \cdot b$  bzw.  $c = a/b$

Werden  $a$  und  $b$  **multipliziert oder dividiert**, so **addieren** sich die **relativen Fehler** zum relativen Gesamtfehler:

$$\frac{\Delta\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen
- 5 Trigonometrische Funktionen
- 6 Exponentialfunktionen
- 7 Logarithmen
- 8 Differentiation
- 9 Messfehler
- 10 Vektoren**

## Skalare

Größen unabhängig von einer Richtung, z.B.:

- Masse  $m$
- Zeit  $t$
- Volumen  $V$
- Ladung  $Q$

## Vektoren

Größen mit Richtung, z.B.:

- Geschwindigkeit  $\vec{v}$
- Kraft  $\vec{F}$
- Impuls  $\vec{p}$

- Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre Länge und Richtung identisch sind
- Ein Vektor ändert sich nicht, wenn er beliebig parallel verschoben wird
- Die Länge eines Vektors gibt eine physikalische Größe wieder (Zahl + Einheit)
- Verschiedene Schreibweisen üblich:  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\mathbf{a}$ , ...
- Wir verwenden  $\vec{a}$

# Darstellung von Vektoren

- Meistens 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem
- 3 Achsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  stehen senkrecht aufeinander

## Einheitsvektoren

Vektor der Länge 1 entlang (parallel) der entsprechenden Achse

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

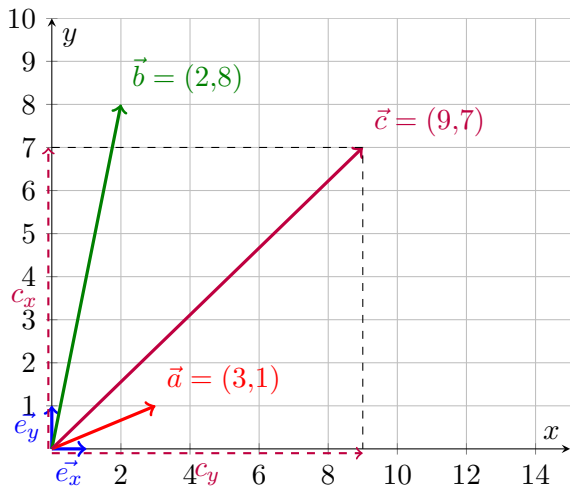
Länge der **Projektion** auf die Achsen

$$a_x, a_y, a_z$$

Vektor zusammengesetzt aus seinen Komponenten

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$



## Addition

Komponentenweise

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

## Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

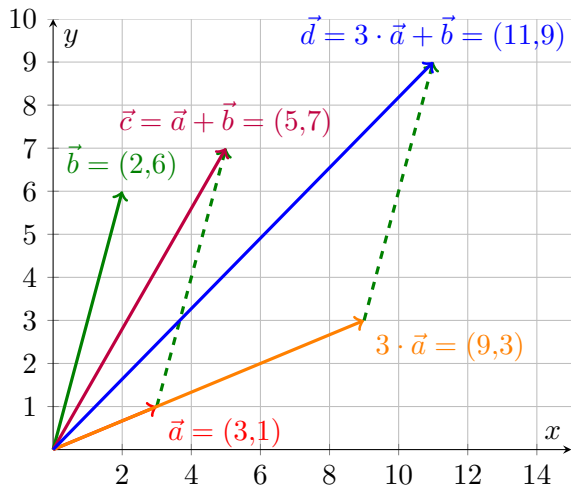
wird auf jede Komponente angewendet

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$$

## Betrag (Länge)

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Zum Merken: Pythagoras in 3D



- Gegeben:

$$\vec{a} = (3,1)$$

$$\vec{b} = (2,6)$$

- Gesucht:

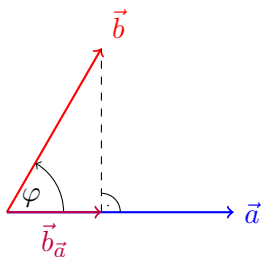
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$$



## Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



- Projektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$  multipliziert mit  $\vec{a}$

$$c = |\vec{b}_{\vec{a}}| \cdot |\vec{a}| = b \cdot a \cdot \cos(\varphi)$$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

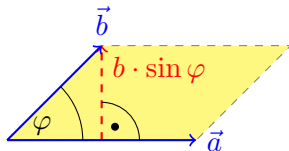
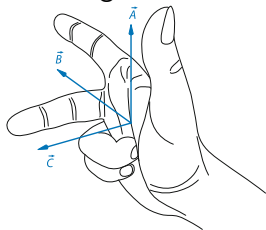
# Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

## Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

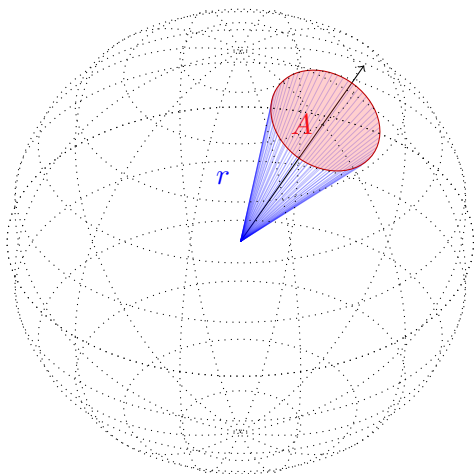
- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor  $\vec{c}$ , der senkrecht zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht.
- Die Länge von  $\vec{c}$  ist gleich der Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms

Richtung von  $\vec{c}$ :



$$c = a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

- $\vec{a} \cdot \vec{e}_x = a_x$
- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{a} = 3,5 \cdot \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} = c \cdot a \cdot \cos \varphi = 0$  da  $\vec{c} \perp \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos \varphi = 0$  da  $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\left( 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right) / 10 = \left( \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \end{pmatrix} \right) / 10 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} / 10 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \vec{e}_x$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b}) / (\vec{a} \cdot \vec{a}) = a \cdot b \cdot \sin(\varphi) / a^2 = b \cdot \sin(\varphi) / a$



- Winkel in 2D: Öffnung zwischen zwei Geraden
- Raumwinkel  $\Omega$ : räumliche Öffnungswinkel eines Kegels
- $A$ : Durchstoßfläche des Kegels durch die Kugeloberfläche mit Radius  $r$

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

- Einheit Steradian (sr)
- Gesamter Raumwinkel:  $4\pi$