Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 4: Messfehler und Vektoren

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

24. Oktober 2014

Inhalt

Übersicht

- Gegeben: $a^x = b$ mit bekanntem b
- x kann durch den Logarithmus bestimmt werden:

$a^x \rightarrow x = 2$

$$x = \log_a b$$

$$\boxed{x = \log_a a^x}$$

Allgemein:

- Der Logarithmus ist die **Umkehrfunktion** zu Exponetialfunktionen $y = a^x$

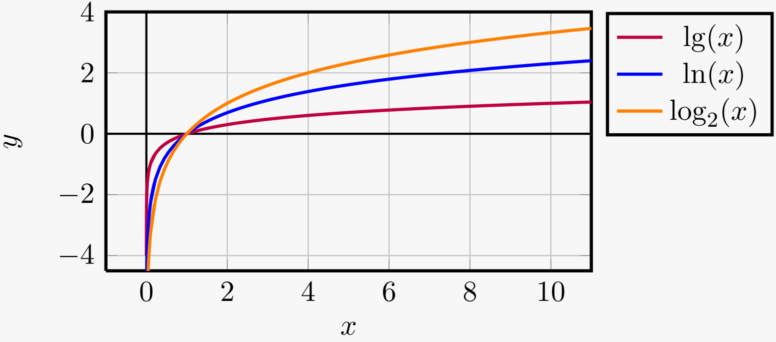
Logarithmusfunktion

$$f(x) = y = \log_a x$$

- Achtung: da wir die Umkehrfunktion betrachten, schreiben wir x nun als Variable in die Funktion.

$$f(x) = \log_a x$$

- Logarithmus von x zur Basis a
- y-Achse ist Asymptote, schneidet x-Achse bei $x = 1$
- Besondere Basen: $\log_{10}(x) = \lg(x)$ und $\log_e(x) = \ln(x)$



Ableitung

- Die **Ableitung** an einem Punkt P der Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt P an.
- Mathematisch definiert durch den **Differentialquotienten** $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$
- Im Differentialquotienten sind die Differenzen infinitesimal klein.

Man schreibt:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen

$f(x)$	$y' = f'(x)$
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$
$$\rightarrow f'(x) =$$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \to f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \to f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

Übersicht

Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$u(x) = \sin(x)$

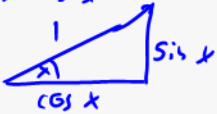
$v(x) = \cos(x)$

$$f(x) = \sin(x)/\cos(x)$$

$$\rightarrow f'(x) = \left[\left(\frac{d}{dx} \sin(x) \right) \cdot \cos(x) - \sin(x) \frac{d}{dx}(\cos(x)) \right] / \cos^2(x)$$

$$= (\cos x \cdot \cos x + \sin(x) \cdot \sin(x)) / \cos^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$



Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)))/\cos^2(x) \\ &= 1 + \sin^2(x)/\cos^2(x) \\ &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

Kettenregel

$$\frac{df}{dx} = \frac{df \cdot du}{du \cdot dx}$$

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) = e^u \cdot 2x = 2x\, e^{x^2}$$

Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

Ableitungsregeln

$$\frac{u'(x)\, v(x)}{v(x)\, v(x)} + \frac{-u(x)\, v'(x)}{v(x)^2} = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v(x)^2}$$

1. **Konstanter Faktor**
   $y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$
2. **Summenregel**
   $y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
3. **Produktregel**
   $y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
4. **Quotientenregel**
   $y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$
5. **Kettenregel**
   $y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

$$u(x)\, v^{-1}(x) \xrightarrow{3} u'(x) \cdot v^{-1}(x) + u(x) \frac{d}{dx} v^{-1}(x)$$

$$\xrightarrow{5} = u'(x) \cdot v^{-1}(x) + u(x)\, v'(x) \left(-v^{-2}(x)\right)$$

Beispiele für Ableitungen

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \to f'(x) =$ $5 \cdot 3x^2 + 2x + 3(-1)x^{-2}$

  $3 \cdot x^{-1}$

  $= 15x^2 + 2x - 3x^{-2}$

- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \to f'(x) =$ $\frac{3}{5} x^{\left(\frac{3}{5}-1\right)} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

  $x^{\frac{3}{5}}$

- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \to f'(x) =$ $5x^4 \cdot \ln x + x^5 \frac{1}{x}$

  $= 5x^4 \ln x + x^4 = x^4 (5 \ln x + 1)$

- $f(x) = \sin(\underbrace{x^3 - x^2}_{3x^2-2x}) \to f'(x) =$ $(3x^2 - 2x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$

- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \to f'(x) =$ $\left(\frac{1}{x}(x+1) - \ln(x)\right) / (x+1)^2$

  $= \left(1 + \frac{1}{x} - \ln x\right) / (x+1)^2$

Beispiele für Ableitungen

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) = 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3/x^2$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) = 3/(5 \cdot \sqrt[5]{x^2})$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) = (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \rightarrow f'(x) = (1 + 1/x - \ln(x))/(x+1)^2$

Übersicht

1. Wiederholung
2. Differentiation
3. Messfehler
4. Vektoren

Ursachen für Messunsicherheiten/Fehler

Systematische Fehler

- Falsche Eichung
- Fehlerhaftes Messgerät
- Nährungen
- Längenänderung durch Temperatur
- ...

Zufällige Fehler

- Ablesefehler
- statistische Schwankungen
- Spiel bei Mikrometerschraube
- ...

Zufällige Fehler lassen sich durch Wiederholung der Messung verringern!

Messergebnisse

$$\text{Messergebnis} = \text{Messwert} \pm \text{Fehler}$$

Absoluter Fehler

$$L = (5{,}63 \pm 0{,}05)\,\mathsf{m}$$

Relativer Fehler

$$L = 5{,}63\,\mathsf{m} \pm 0{,}9\%$$

Fehler = Zufallsfehler + systematischer Fehler

$$L = (5{,}63 \pm 0{,}03\,(\mathsf{stat.}) \pm 0{,}04\,(\mathsf{sys.}))\,\mathsf{m}$$

Der **wahre Wert** ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Fehlerintervall enthalten.

Mittelwert

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$

Mittelwert

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

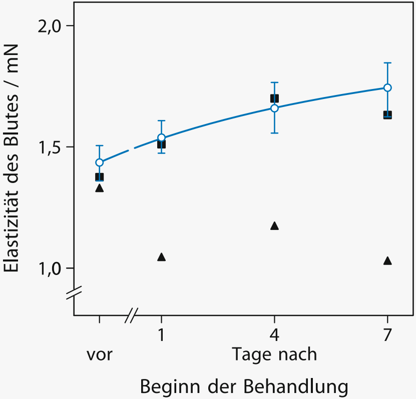
$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Je häufiger ich messe, desto kleiner wird der Fehler des Mittelwerts! Um Ihn zu halbieren brauche ich 4 mal so viele Messwerte!

Beispiel

Trombelastogramm während einer Behandlung mit Heparin

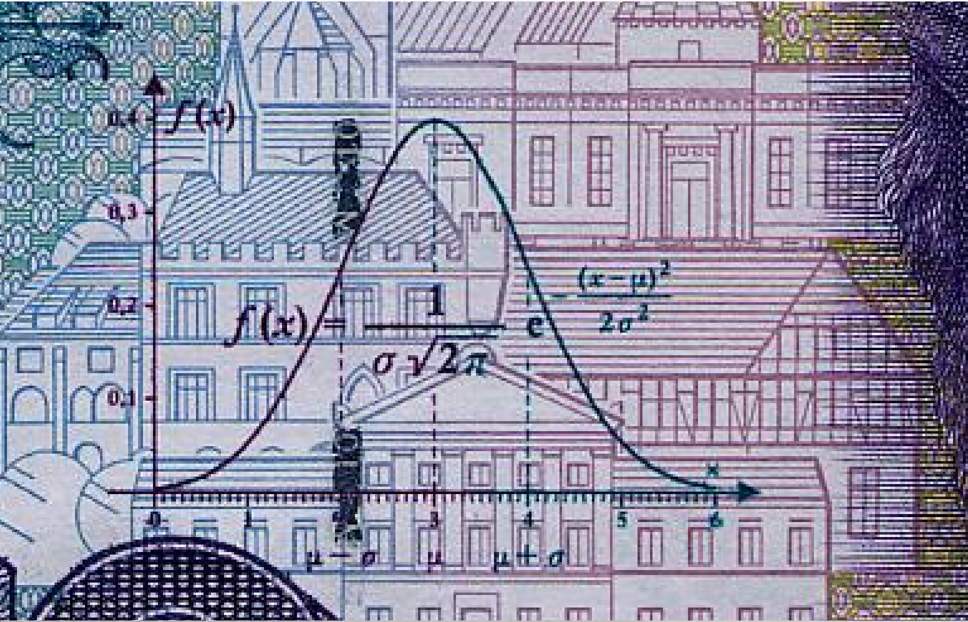


Aus: Harten *Physik für Mediziner*

- Beobachtungsgruppe von 28 Patienten
- ■ und ▲: zwei Mitglieder der Beobachtungsgruppe
- Blaue Kreise: Mittelwert der Werte aller Patienten
- Die blauen Fehlerbalken geben die Standardabweichung an

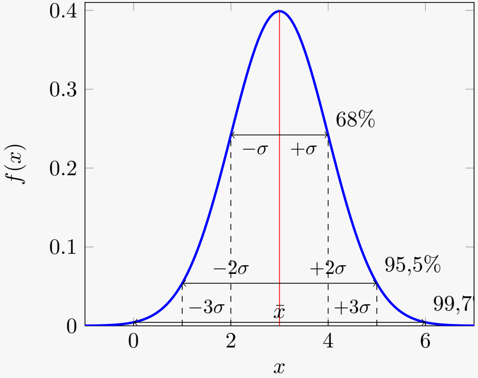
Normalverteilung

Normalverteilung



Normalverteilung

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

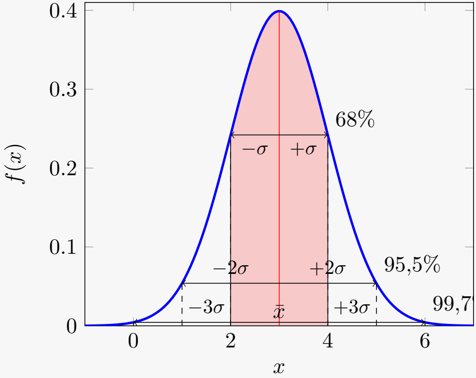


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Gaußsche Glockenkurve

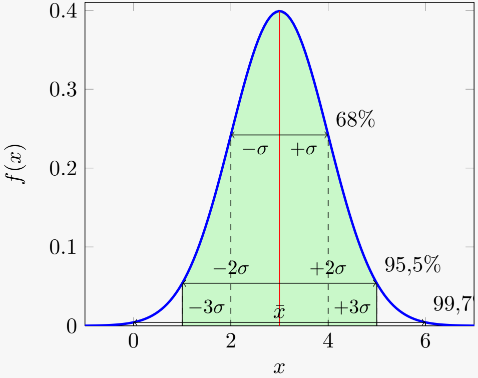
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

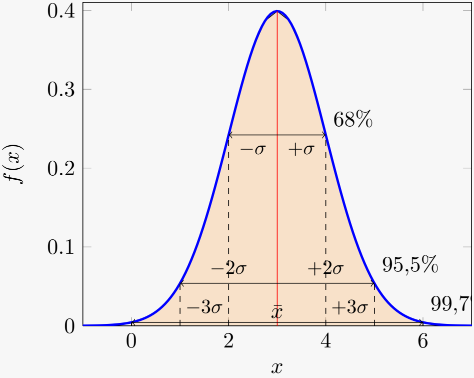
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

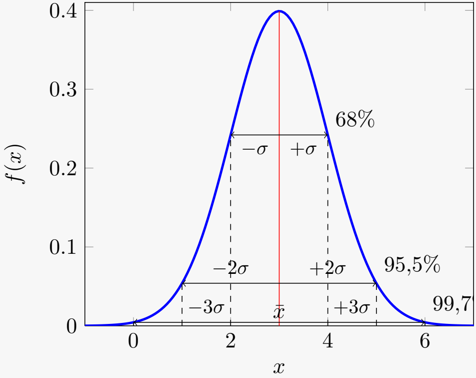


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Gaußsche Glockenkurve

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

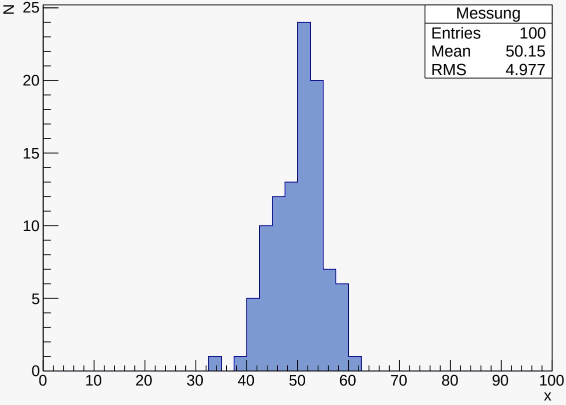


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

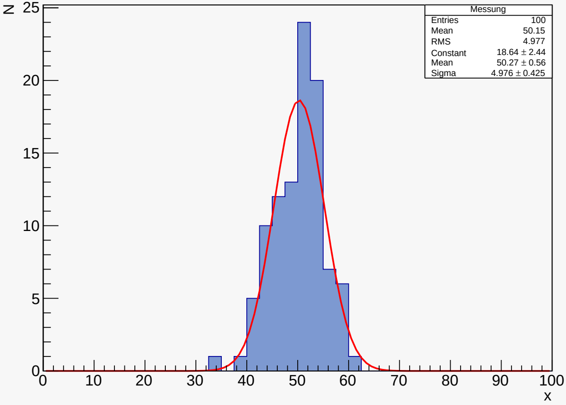
- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

- Analog: 68% in $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$
- 95,5% in $[\bar{x} - 2\Delta\bar{x}, \bar{x} + 2\Delta\bar{x}]$
- 99,7% in $[\bar{x} - 3\Delta\bar{x}, \bar{x} + 3\Delta\bar{x}]$

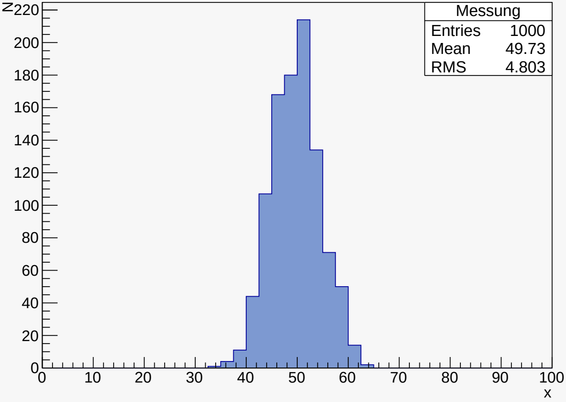
Gaußverteilung realistischer Messungen



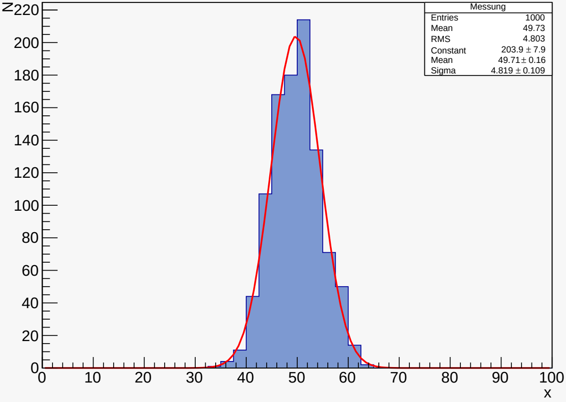
Gaußverteilung realistischer Messungen



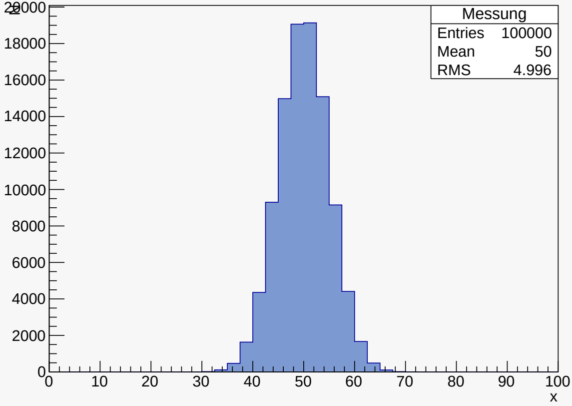
Gaußverteilung realistischer Messungen



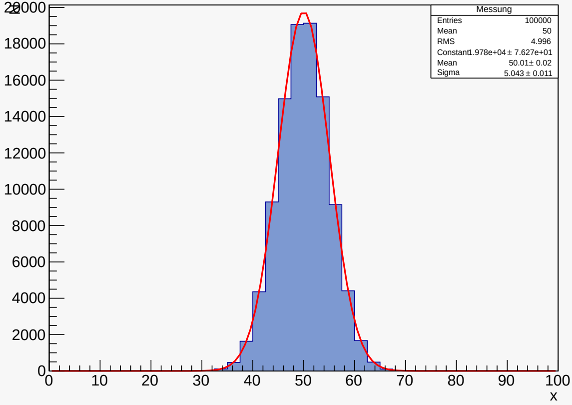
Gaußverteilung realistischer Messungen



Gaußverteilung realistischer Messungen



Gaußverteilung realistischer Messungen



Protokollführung und Auswertung

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	$x_i/[x]$	$(x_i - \bar{x})/[x]$	$(x_i - \bar{x})^2/[x]^2$
1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			
	$\sum_i x_i = \dots$		$\sum_i (x - \bar{x})^2 = \dots$

Beispiel Protokollführung

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe			

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0.2	0.04
2	35,5	-1.6	2.56
3	36,8	-0.3	0.09
4	38,1	1.0	1
5	37,8	0.7	0.49
6	37,2	0.1	0.01
Summe	222,7		4.19

$$\bar{l} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} l_i = \frac{222,7}{6} = 37.1167 \approx 37.1$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 4.19}$$

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{1}{5}4.19} = \sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}4.19} = \sqrt{\frac{4.19}{30}}$$

Beispiel Protokollführung

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe	222,7		

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Beispiel Protokollführung

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3	0,2	
2	35,5	-1,6	
3	36,8	-0,3	
4	38,1	1,0	
5	37,8	0,7	
6	37,2	0,1	
Summe	222,7		

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Beispiel Protokollführung

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Beispiel Protokollführung

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Fehler: $\Delta\bar{l} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\cdot 4{,}19\,\text{cm}^2} = 0{,}3737\,\text{cm}$

Ergebnis

$$l = (37{,}1 \pm 0{,}4)\,\text{cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$l = 37.1\,\text{cm} \pm \frac{0{,}4}{37.1}\,100\,\%$$

$$= 37.1\,\text{cm} \pm 1.1\,\%$$

Ergebnis

$$l = (37{,}1 \pm 0{,}4)\,\mathrm{cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$\begin{aligned} l &= 37{,}1\,\mathrm{cm} \pm \frac{0{,}4}{37{,}1} \cdot 100\% \\ &= 37{,}1\,\mathrm{cm} \pm 1{,}1\% \end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung

- Messgröße setzt sich aus mehreren fehlerbehafteten Größen zusammen
- Nur die Fehler der einzelnen Größen sind bekannt

Wie groß ist der Gesamtfehler?

Zwei Fälle

- Addition der Größen
- Multiplikation der Größen

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

Fehlerfortpflanzung – Addition

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

$s: \ \bar{s} \pm \Delta \bar{s}$

$t: \ \bar{t} \pm \Delta \bar{t}$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{min} = \frac{\bar{s} - \Delta \bar{s}}{\bar{t} + \Delta \bar{t}}$$

Größter Wert von v:

$$v_{max} = \frac{\bar{s} + \Delta \bar{s}}{\bar{t} - \Delta \bar{t}}$$

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{\text{min}} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größter Wert von v:

$$v_{\text{max}} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{\text{min}} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größter Wert von v:

$$v_{\text{max}} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

- $\bar{v}$ liegt etwa in der Mitte von $[v_{\text{min}}, v_{\text{max}}]$.
- Die größere der Differenzen $\bar{v} - v_{\text{min}}$ bzw. $v_{\text{max}} - \bar{v}$ ist der Fehler $\Delta\bar{v}$

Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120{,}0 \pm 0{,}2)$ cm
- Kantenlänge $b = (90{,}0 \pm 0{,}1)$ cm

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 10800\,\text{cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\bar{F}_{max} = (\bar{a} + \Delta\bar{a}) \cdot (\bar{b} + \Delta\bar{b}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a}\,\Delta\bar{b}}_{\text{klein}}$$

$$\simeq \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a}$$

$$\bar{F}_{min} \simeq (\bar{a} - \Delta\bar{a})(\bar{b} - \Delta\bar{b}) = \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\Delta\bar{b} - b\Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a}\Delta\bar{b}}_{\text{klein}}$$

$$\simeq \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\Delta\bar{b} - \bar{b}\Delta\bar{a}$$

$$\Delta\bar{F} = F_{max} - \bar{F} = \cancel{\bar{a}\bar{b}} + \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a} - \cancel{\bar{a}\bar{b}} = \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a}$$

$$= \bar{F} - \bar{F}_{min} = \bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a}$$

$$\Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b} = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$$

$$\boxed{\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} = \frac{\bar{a}\Delta\bar{b} + \bar{b}\Delta\bar{a}}{\bar{a}\cdot\bar{b}}}$$

Beispiel: Rechteck

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\bar{a}\,\Delta\bar{b} + \bar{b}\,\Delta\bar{a}}{\bar{a}\cdot\bar{b}} \simeq \frac{\cancel{\bar{a}}\,\Delta\bar{b}}{\cancel{\bar{a}}\,\bar{b}} + \frac{\cancel{\bar{b}}\,\Delta\bar{a}}{\bar{a}\,\cancel{\bar{b}}}$$

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120{,}0 \pm 0{,}2)$ cm
- Kantenlänge $b = (90{,}0 \pm 0{,}1)$ cm

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 10800\,\text{cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned} F_{\text{max}} &= (\bar{a} + \Delta\bar{a})(\bar{b} + \Delta\bar{b}) \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b}}_{\text{klein}} \\ &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \\ F_{\text{min}} &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} - \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \end{aligned}$$

Es folgt für den Fehler: $\Delta\bar{F} \simeq F_{\text{max}} - \bar{F} \simeq \bar{F} - F_{\text{min}} \simeq \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$

$$\boxed{\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}}$$

Fehler von Produkten

Allgemeine Regel

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta \bar{b}}{\bar{b}}$$

Der relative Fehler von Produkten (hier $F = a \cdot b$) **und** Quotienten von Messwerten ist gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren

Zusammenfassung: zwei Regeln

Zwei Größen $a = \bar{a} + \Delta\bar{a}$ und $b = \bar{b} + \Delta\bar{b}$

Addition oder Subtraktion: $c = a + b$ bzw. $c = a - b$

Werden a und b addiert oder subtrahiert, so **addieren** sich die **absoluten** Fehler zum absoluten Gesamtfehler:

$$\Delta\bar{c} = \Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}$$

Multiplikation oder Division: $c = a \cdot b$ bzw. $c = a/b$

Werden a und b multipliziert oder dividiert, so **addieren** sich die **relativen** Fehler zum relativen Gesamtfehler:

$$\frac{\Delta\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

Übersicht

Skalare und Vektoren

Skalare

Größen unabhängig von einer Richtung, z.B.:

- Masse m
- Zeit t
- Volumen V
- Ladung Q

Vektoren

Größen mit Richtung, z.B.:

- Geschwindigkeit $\vec{v}$
- Kraft $\vec{F}$
- Impuls $\vec{p}$

Eigenschaften von Vektoren

- Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre Länge und Richtung identisch sind

$\rightarrow$ Ein Vektor ändert sich nicht, wenn er beliebig parallel verschoben wird

- Die Länge eines Vektors gibt eine physikalische Größe wieder (Zahl + Einheit)
- Verschiedene Schreibweisen üblich: $\overrightarrow{P_1 P_2}$, $\vec{a}$, $\boldsymbol{a}$, ...
- Wir verwenden $\vec{a}$

Darstellung von Vektoren

- Meistens 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem
- 3 Achsen x, y und z stehen senkrecht aufeinander

Einheitsvektoren

Vektor der Länge 1 entlang (parallel) der entsprechenden Achse

$$\vec{e_x}, \quad \vec{e_y}, \quad \vec{e_z}$$

Länge der Projektion auf die Achsen

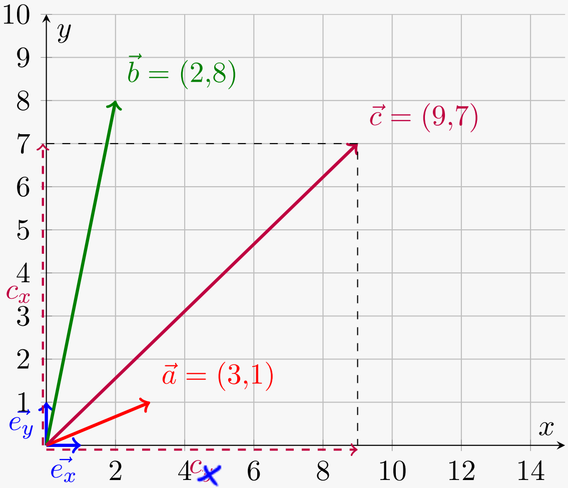
$$a_x, \quad a_y, \quad a_z$$

Vektor zusammengesetzt aus seinen Komponenten

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e_x} + a_y \cdot \vec{e_y} + a_z \cdot \vec{e_z}$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Graphische Darstellung (Hier: 2D Vekoren)



Addition

Komponentenweise

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

wird auf jede Komponente angewendet

$$k\vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$$

Betrag (Länge)

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Zum Merken: Pythagoras in 3D

Rechnen mit Vektoren

Addition

Komponentenweise

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

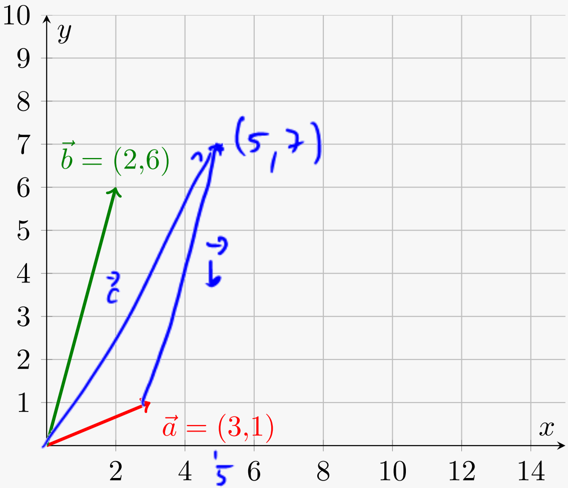
wird auf jede Komponente angewendet

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$$

Betrag (Länge)

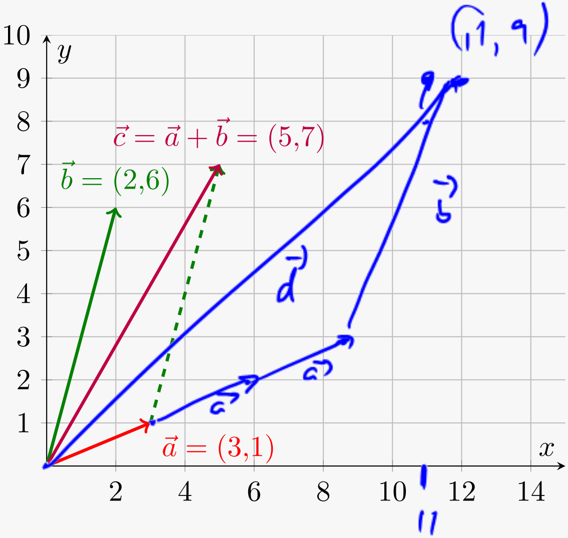
$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Zum Merken: Pythagoras in 3D



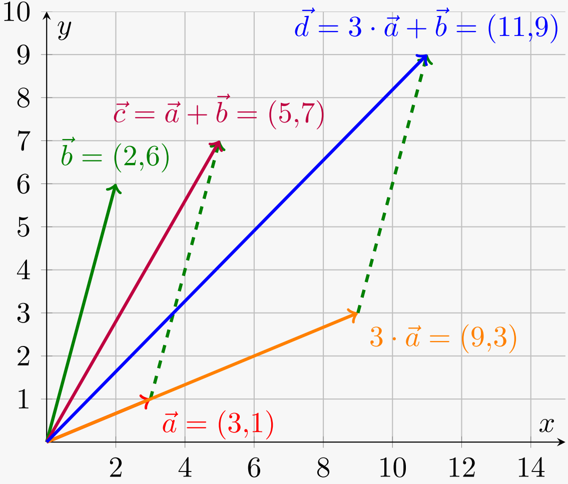
- Gegeben:
  $\vec{a} = (3,1)$
  $\vec{b} = (2,6)$
- Gesucht:
  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
  $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$

Graphische Darstellung Rechnen



- Gegeben:
  $\vec{a} = (3{,}1)$
  $\vec{b} = (2{,}6)$
- Gesucht:
  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
  $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$

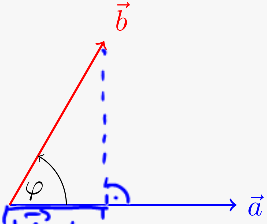
Graphische Darstellung Rechnen



- Gegeben:
  $\vec{a} = (3{,}1)$
  $\vec{b} = (2{,}6)$
- Gesucht:
  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
  $\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



$|\vec{b}_a| =$

$|\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$

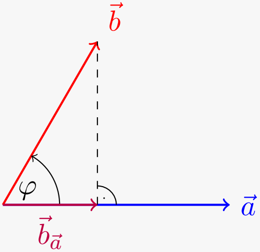
$c = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Skalarprodukt

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$

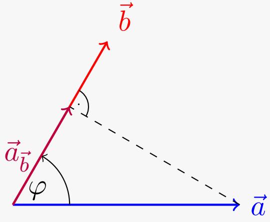
$$c = |\vec{b}_{\vec{a}}| \cdot |\vec{a}| = b \cdot a \cdot \cos(\varphi)$$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Skalarprodukt

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$
- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeineander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

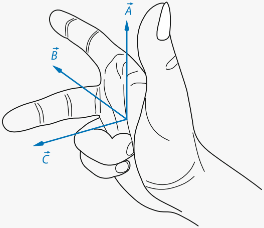
Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

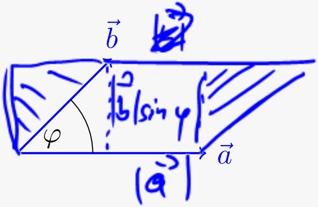
Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.
- Die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung von $\vec{c}$:





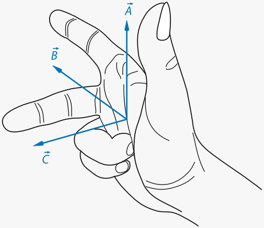
$c = a \cdot b \cdot \sin \varphi$

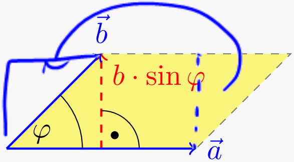
Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.
- Die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung von $\vec{c}$:





$$c = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

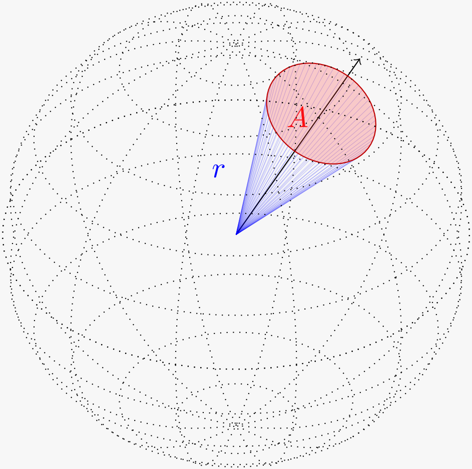
$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\vec{a} \cdot \vec{e_x} =$ $(a_x \cdot 1 + a_y \cdot 0 + a_z \cdot 0) = a_x$
- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} =$ $(4 - \frac{1}{2})\vec{a} = 3.5\,\vec{a}$
- $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{c}} \cdot \vec{a} =$ $\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}|\,|\vec{a}|\,\cancel{\sin}\cos\varphi = 0$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} =$ 0
- $\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) / 10 =$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b})/(\vec{a} \cdot \vec{a}) =$

Beispiele: Rechnen mit Vektoren

- $\vec{a} \cdot \vec{e_x} = a_x$
- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} = 3{,}5 \cdot \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} = c \cdot a \cdot \cos\varphi = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos\varphi = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) /10 = \left(\begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \end{pmatrix}\right) /10 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} /10 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \vec{e_x}$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b})/(\vec{a} \cdot \vec{a}) = a \cdot b \cdot \sin(\varphi)/a^2 = b \cdot \sin(\varphi)/a$

Nachtrag: Raumwinkel



- Winkel in 2D: Öffnung zwischen zwei Geraden
- Raumwinkel Ω: räumliche Öfnungswinkel eines Kegels
- A: Durchstoßfläche des Kegels durch die Kugeloberfläche mit Radius r

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

- Einheit Steradiant (sr)
- Gesamter Raumwinkel: 4π