

Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 4: Messfehler und Vektoren

Dr. Daniel Bick



24. Oktober 2014

1 Wiederholung

2 Differentiation

3 Messfehler

4 Vektoren

1 Wiederholung

2 Differentiation

3 Messfehler

4 Vektoren

- Gegeben: $a^x = b$ mit bekanntem b
- x kann durch den Logarithmus bestimmt werden:

$$x = \log_a b$$

Allgemein:

- Der Logarithmus ist die **Umkehrfunktion** zu Exponentialfunktionen
 $y = a^x$

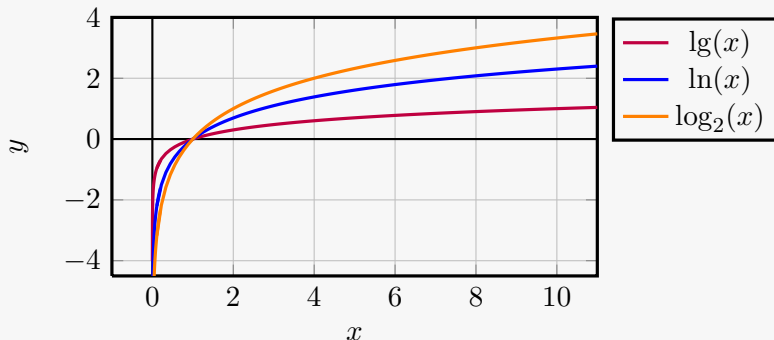
Logarithmusfunktion

$$f(x) = y = \log_a x$$

- Achtung: da wir die Umkehrfunktion betrachten, schreiben wir x nun als Variable in die Funktion.

$$f(x) = \log_a x$$

- Logarithmus von x zur Basis a
- y -Achse ist Asymptote, schneidet x -Achse bei $x = 1$
- Besondere Basen: $\log_{10}(x) = \lg(x)$ und $\log_e(x) = \ln(x)$



- Die **Ableitung** an einem Punkt P der Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt P an.
- Mathematisch definiert durch den **Differentialquotienten** $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$
- Im Differentialquotienten sind die Differenzen infinitesimal klein.

Man schreibt:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

$f(x)$	$y' = f'(x)$
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$
$$\rightarrow f'(x) =$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

- 1 Wiederholung
- 2 Differentiation**
- 3 Messfehler
- 4 Vektoren

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x)/\cos(x)$$
$$\rightarrow f'(x) =$$

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)))/\cos^2(x) \\ &= 1 + \sin^2(x)/\cos^2(x) \\ &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ = f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u \\ f'(x) =$$

$$\begin{aligned} y = f(x) = f(u(x)) &\rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u) \cdot u'(x) \end{aligned}$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) = e^{x^2} &\rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u \\ f'(x) &= 2xe^{x^2} \end{aligned}$$

① Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

② Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

③ Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

④ Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

⑤ Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) = 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3/x^2$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) = 3/(5 \cdot \sqrt[5]{x^2})$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) = (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x + 1) \rightarrow f'(x) = (1 + 1/x - \ln(x))/(x + 1)^2$

1 Wiederholung

2 Differentiation

3 **Messfehler**

4 Vektoren

Systematische Fehler

- Falsche Eichung
- Fehlerhaftes Messgerät
- Nährungen
- Längenänderung durch Temperatur
- ...

Zufällige Fehler

- Ablesefehler
- statistische Schwankungen
- Spiel bei Mikrometerschraube
- ...

Zufällige Fehler lassen sich durch Wiederholung der Messung verringern!

$$\text{Messergebnis} = \text{Messwert} \pm \text{Fehler}$$

Absoluter Fehler

$$L = (5,63 \pm 0,05) \text{ m}$$

Relativer Fehler

$$L = 5,63 \text{ m} \pm 0,9\%$$

Fehler = Zufallsfehler + systematischer Fehler

$$L = (5,63 \pm 0,03 \text{ (stat.)} \pm 0,04 \text{ (sys.)}) \text{ m}$$

Der **wahre Wert** ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Fehlerintervall enthalten.

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

$$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta \bar{x}, \bar{x} + \Delta \bar{x}]$

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

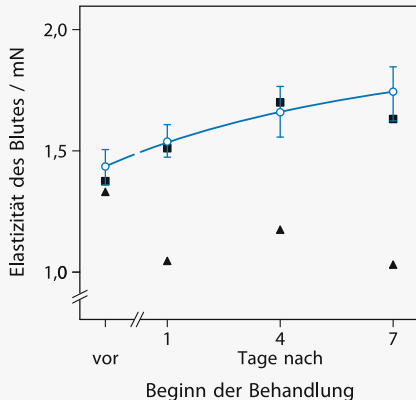
Fehler des Mittelwerts

$$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta \bar{x}, \bar{x} + \Delta \bar{x}]$

Je häufiger ich messe, desto kleiner wird der Fehler des Mittelwerts! Um ihn zu halbieren brauche ich 4 mal so viele Messwerte!

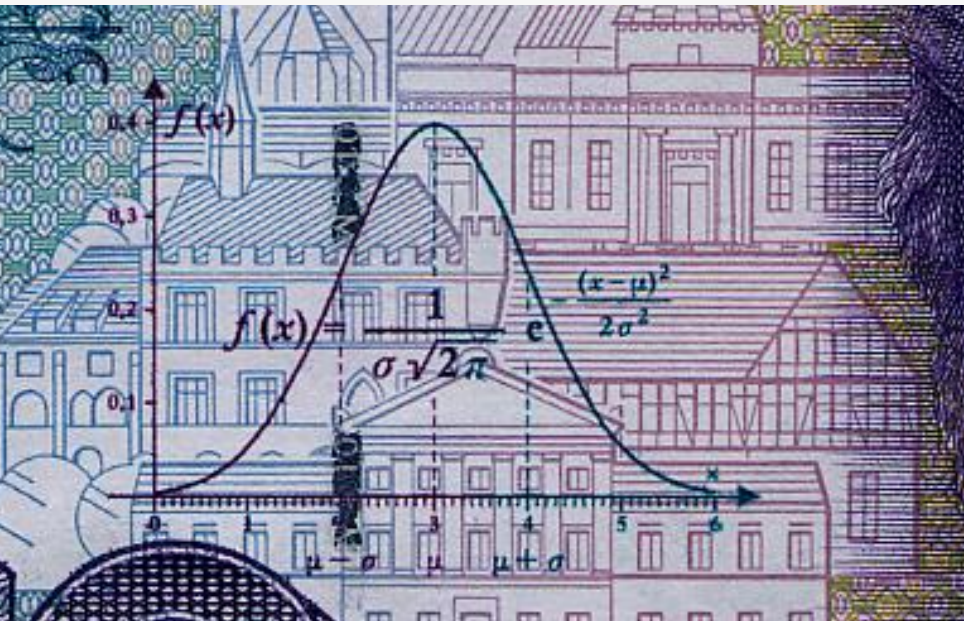
Trombelastogramm während einer Behandlung mit Heparin



- Beobachtungsgruppe von 28 Patienten
- ■ und ▲: zwei Mitglieder der Beobachtungsgruppe
- Blaue Kreise: Mittelwert der Werte aller Patienten
- Die blauen Fehlerbalken geben die Standardabweichung an

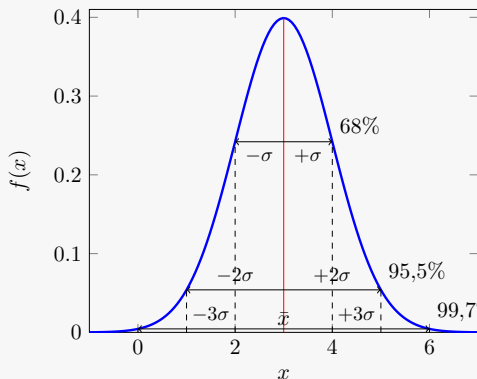
Aus: Harten *Physik für Mediziner*







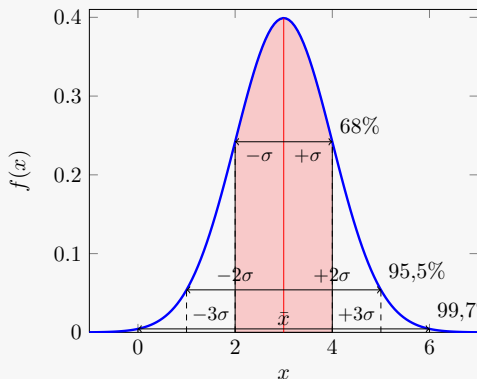
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

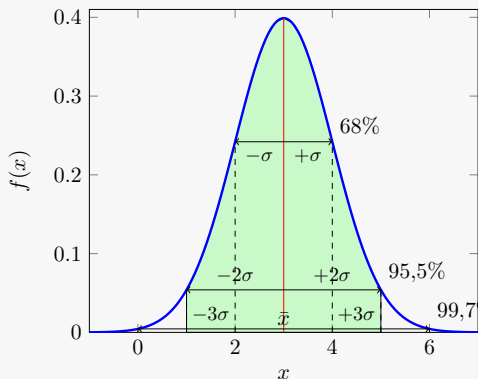
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

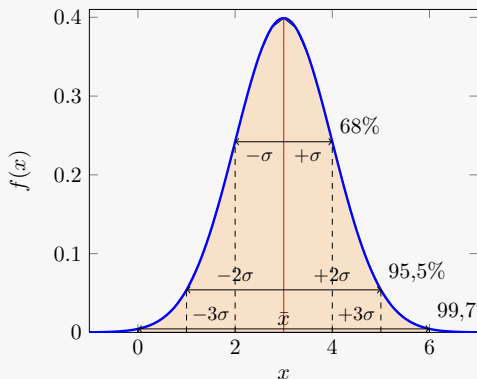
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

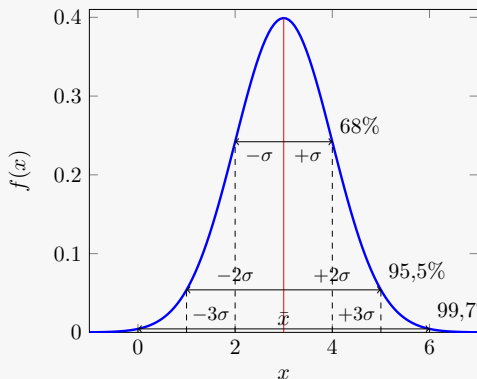
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

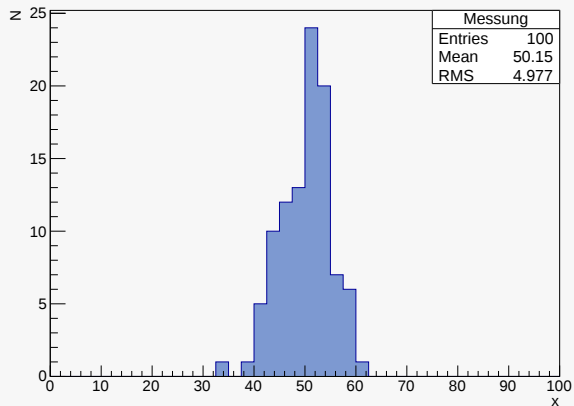
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

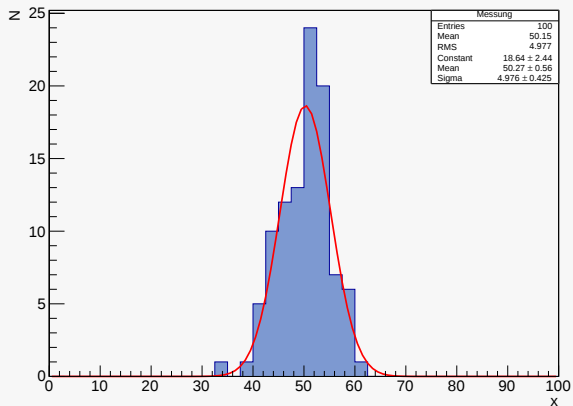


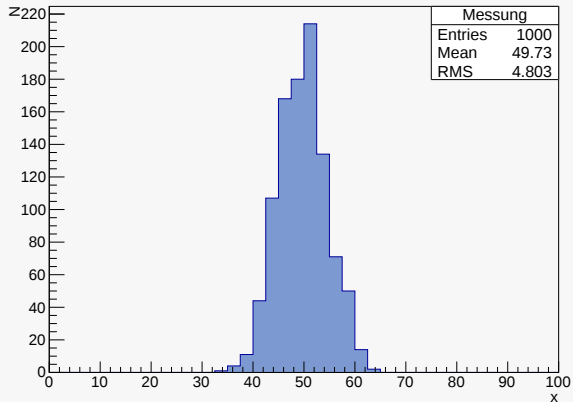
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

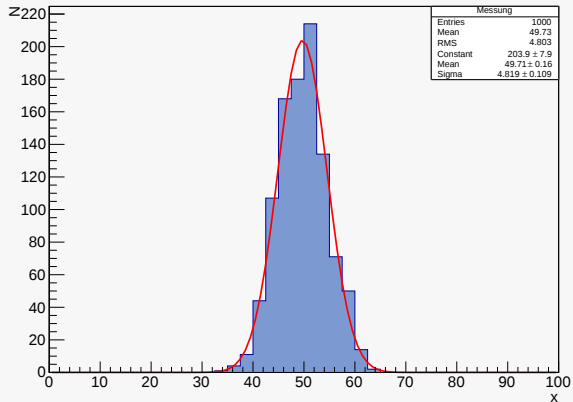
- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

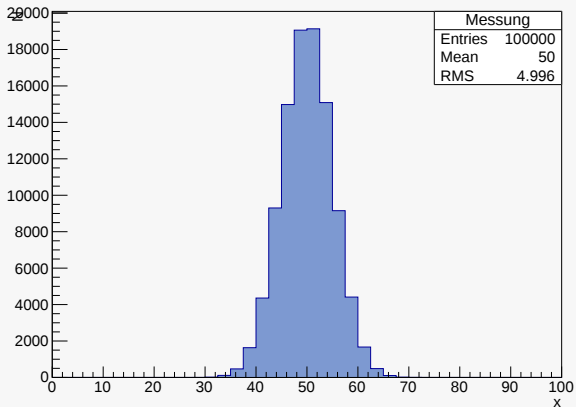
- Analog: 68% in $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$
- 95,5% in $[\bar{x} - 2\Delta\bar{x}, \bar{x} + 2\Delta\bar{x}]$
- 99,7% in $[\bar{x} - 3\Delta\bar{x}, \bar{x} + 3\Delta\bar{x}]$

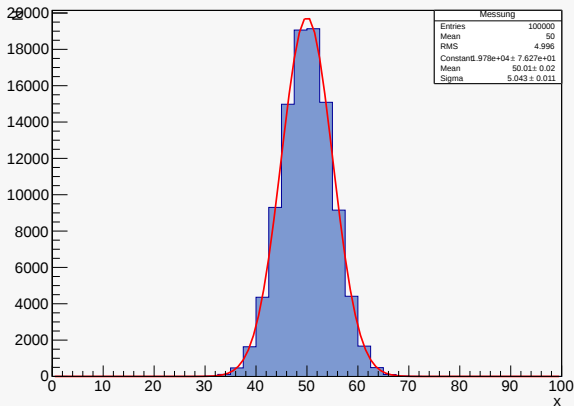












Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	$x_i/[x]$	$(x_i - \bar{x})/[x]$	$(x_i - \bar{x})^2/[x]^2$
1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			
$\sum_i x_i = \dots$		$\sum_i (x - \bar{x})^2 = \dots$	

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe			

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe	222,7		

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe	222,7		

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	
2	35,5	-1,6	
3	36,8	-0,3	
4	38,1	1,0	
5	37,8	0,7	
6	37,2	0,1	
Summe	222,7		

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

Man messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

$$\text{Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222,7}{6} = 37,1167$$

$$\text{Fehler: } \Delta \bar{l} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{6 \cdot 5} \cdot 4,19 \text{ cm}^2} = 0,3737 \text{ cm}$$

$$l = (37,1 \pm 0,4) \text{ cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$l = (37,1 \pm 0,4) \text{ cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$\begin{aligned} l &= 37,1 \text{ cm} \pm \frac{0,4}{37,1} \cdot 100\% \\ &= 37,1 \text{ cm} \pm 1,1\% \end{aligned}$$

- Messgröße setzt sich aus mehreren fehlerbehafteten Größen zusammen
- Nur die Fehler der einzelnen Größen sind bekannt

Wie groß ist der Gesamtfehler?

Zwei Fälle

- Addition der Größen
- Multiplikation der Größen

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t .

Kleinster Wert von v :

Größter Wert von v :

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t .

Kleinsten Wert von v :

$$v_{\min} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größten Wert von v :

$$v_{\max} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t .

Kleinster Wert von v :

$$v_{\min} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größter Wert von v :

$$v_{\max} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

- $\bar{v}$ liegt etwa in der Mitte von $[v_{\min}, v_{\max}]$.
- Die größere der Differenzen $\bar{v} - v_{\min}$ bzw. $v_{\max} - \bar{v}$ ist der Fehler $\Delta\bar{v}$

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120,0 \pm 0,2) \text{ cm}$
- Kantenlänge $b = (90,0 \pm 0,1) \text{ cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120 \text{ cm} \cdot 90 \text{ cm} = 10800 \text{ cm}^2$

Fehlergrenzen:

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120,0 \pm 0,2) \text{ cm}$
- Kantenlänge $b = (90,0 \pm 0,1) \text{ cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120 \text{ cm} \cdot 90 \text{ cm} = 10800 \text{ cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned} F_{\max} &= (\bar{a} + \Delta\bar{a})(\bar{b} + \Delta\bar{b}) \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b}}_{\text{klein}} \\ &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \\ F_{\min} &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} - \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \end{aligned}$$

Es folgt für den Fehler: $\Delta\bar{F} \simeq F_{\max} - \bar{F} \simeq \bar{F} - F_{\min} \simeq \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$

$$\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

Allgemeine Regel

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta \bar{b}}{\bar{b}}$$

Der **relative Fehler von Produkten** (hier $F = a \cdot b$) **und** **Quotienten** von Messwerten ist gleich der **Summe der relativen Fehler der Faktoren**

Zwei Größen $a = \bar{a} + \Delta\bar{a}$ und $b = \bar{b} + \Delta\bar{b}$

Addition oder Subtraktion: $c = a + b$ bzw. $c = a - b$

Werden a und b **addiert oder subtrahiert**, so **addieren** sich die **absoluten Fehler** zum absoluten Gesamtfehler:

$$\Delta\bar{c} = \Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}$$

Multiplikation oder Division: $c = a \cdot b$ bzw. $c = a/b$

Werden a und b **multipliziert oder dividiert**, so **addieren** sich die **relativen Fehler** zum relativen Gesamtfehler:

$$\frac{\Delta\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

1 Wiederholung

2 Differentiation

3 Messfehler

4 **Vektoren**

Skalare

Größen unabhängig von einer Richtung, z.B.:

- Masse m
- Zeit t
- Volumen V
- Ladung Q

Vektoren

Größen mit Richtung, z.B.:

- Geschwindigkeit $\vec{v}$
- Kraft $\vec{F}$
- Impuls $\vec{p}$

- Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre Länge und Richtung identisch sind
- Ein Vektor ändert sich nicht, wenn er beliebig parallel verschoben wird
- Die Länge eines Vektors gibt eine physikalische Größe wieder (Zahl + Einheit)
- Verschiedene Schreibweisen üblich: $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{a}$, $\mathbf{a}$, ...
- Wir verwenden $\vec{a}$

- Meistens 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem
- 3 Achsen x , y und z stehen senkrecht aufeinander

Einheitsvektoren

Vektor der Länge 1 entlang (parallel) der entsprechenden Achse

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$$

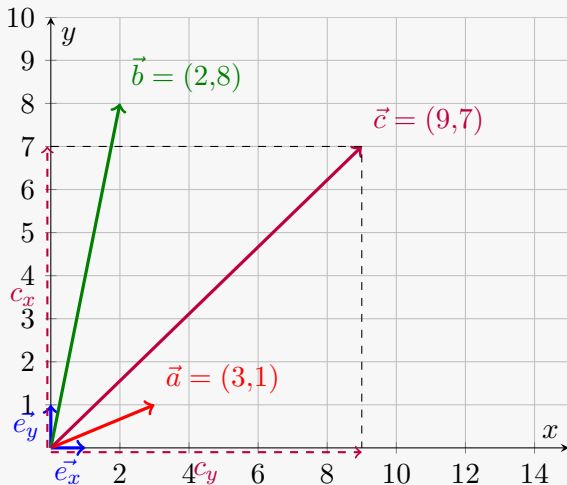
Länge der **Projektion** auf die Achsen

$$a_x, a_y, a_z$$

Vektor zusammengesetzt aus seinen Komponenten

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$



Addition

Komponentenweise

Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

wird auf jede Komponente angewendet

Betrag (Länge)

Zum Merken: Pythagoras in 3D

Addition

Komponentenweise

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)

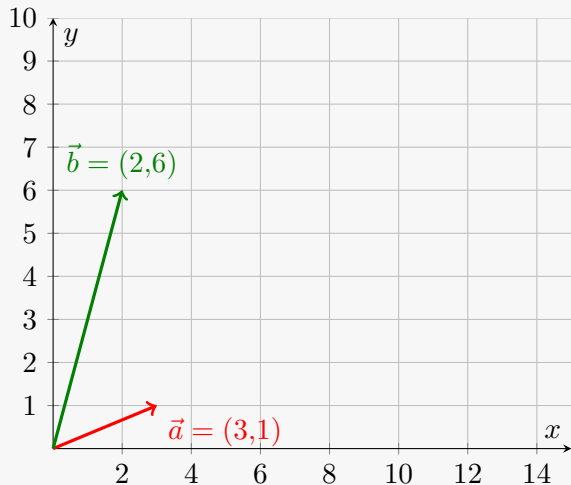
wird auf jede Komponente angewendet

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z)$$

Betrag (Länge)

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Zum Merken: Pythagoras in 3D



- Gegeben:

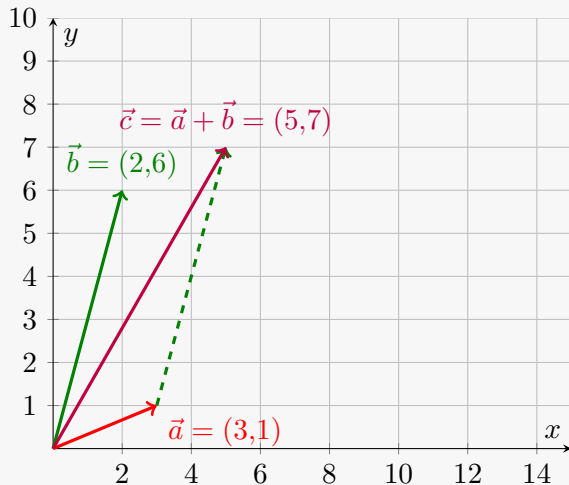
$$\vec{a} = (3,1)$$

$$\vec{b} = (2,6)$$

- Gesucht:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$$



- Gegeben:

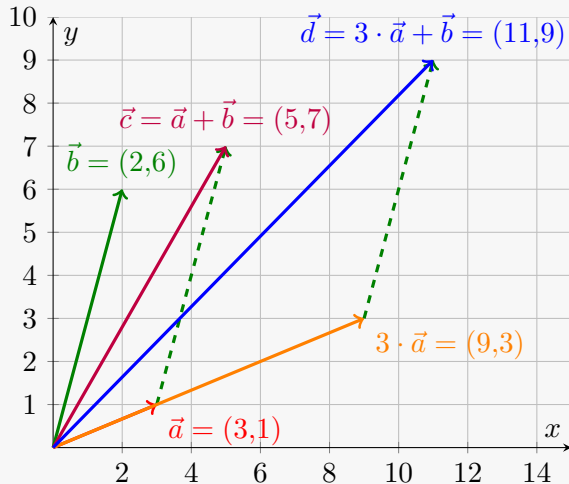
$$\vec{a} = (3,1)$$

$$\vec{b} = (2,6)$$

- Gesucht:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$$



● Gegeben:

$$\vec{a} = (3,1)$$

$$\vec{b} = (2,6)$$

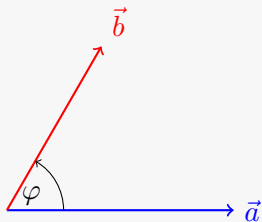
● Gesucht:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$$

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

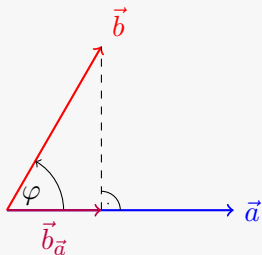
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$
- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



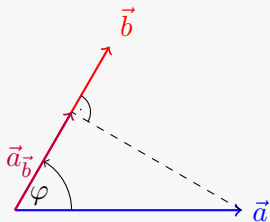
- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$

$$c = |\vec{b}_a| \cdot |\vec{a}| = b \cdot a \cdot \cos(\varphi)$$

- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = c$$



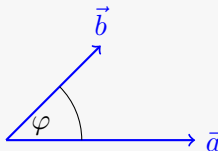
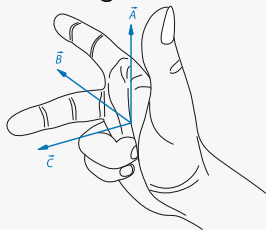
- Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ multipliziert mit $\vec{a}$
- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.
- Die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung von $\vec{c}$:

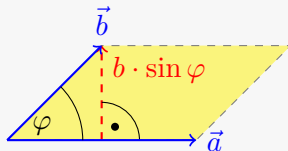
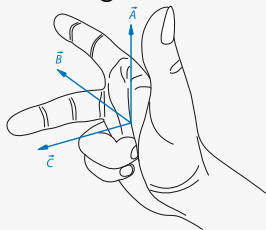


Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt gibt einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.
- Die Länge von $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung von $\vec{c}$:



$$c = a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

- $\vec{a} \cdot \vec{e}_x =$

- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} =$

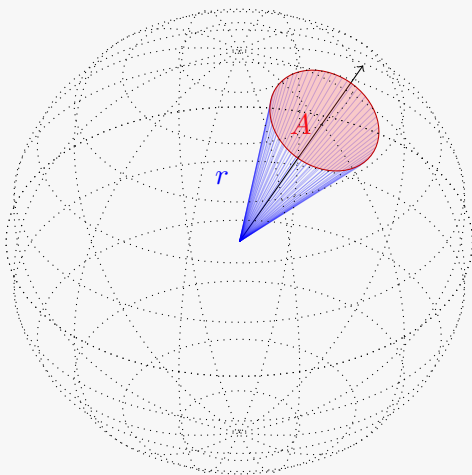
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} =$

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} =$

- $\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right) / 10 =$

- $(\vec{a} \cdot \vec{b}) / (\vec{a} \cdot \vec{a}) =$

- $\vec{a} \cdot \vec{e}_x = a_x$
- $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{a} = 3,5 \cdot \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} = c \cdot a \cdot \cos \varphi = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{a}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} = c \cdot b \cdot \cos \varphi = 0$ da $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right) / 10 = \left(\begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \end{pmatrix} \right) / 10 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} / 10 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \vec{e}_x$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b}) / (\vec{a} \cdot \vec{a}) = a \cdot b \cdot \sin(\varphi) / a^2 = b \cdot \sin(\varphi) / a$



- Winkel in 2D: Öffnung zwischen zwei Geraden
- Raumwinkel Ω : räumliche Öffnungswinkel eines Kegels
- A : Durchstoßfläche des Kegels durch die Kugeloberfläche mit Radius r

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

- Einheit Steradian (sr)
- Gesamter Raumwinkel: 4π