Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 3: Funktionen und Ableitungen

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

22. Oktober 2014

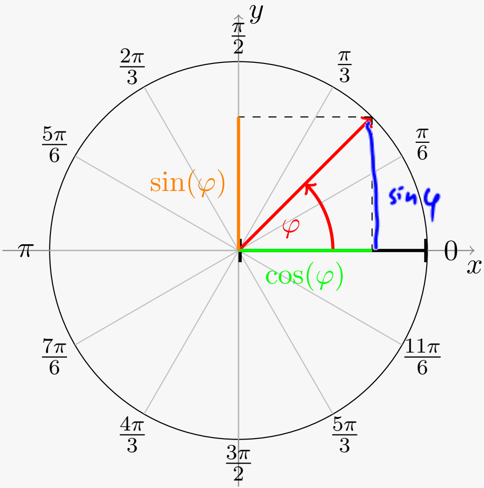
Hinweise zur Klausur

- Es darf **keine** eigene Formelsammlung verwendet werden.
- Die Klausur enthält eine Seite mit relevanten Formeln.
- Multiple Choice: Nur die Antwort zählt, der Lösungsweg spielt keine Rolle für die Bewertung.
- Taschenrechner dürfen uneingeschränkt benutzt werden.
  Allerdings ist es nicht erlaubt, Informationen zu möglichen Klausuraufgaben zu speichern.

Inhalt

Übersicht

1. Wiederholung
2. Exponentialfunktionen
3. Logarithmen
4. Differentiation
5. Messfehler

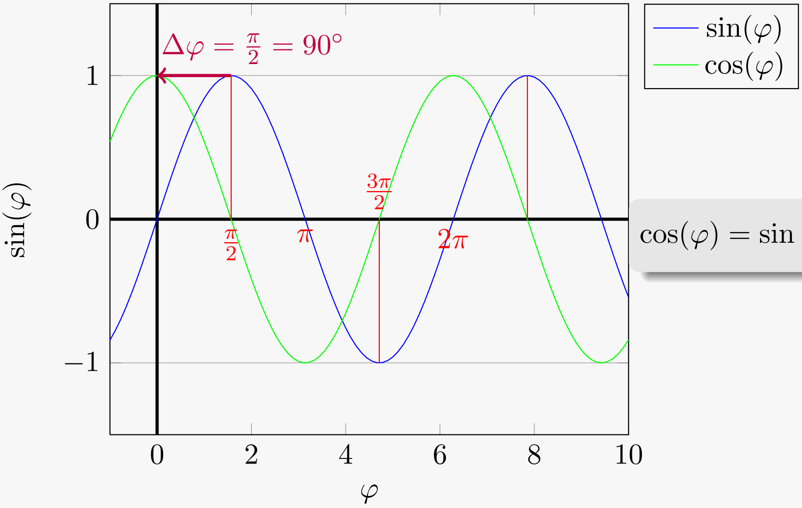


- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Graphen von Sinus und Cosinus



$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Allgemeine Sinus-Funktion und Periode

$$f(x) = A \cdot \sin\left(c \cdot \varphi + \varphi_0\right)$$

- Normaler Sinus hat die Periode $P = 2\pi$
- Allgemeine Sinus-Funktion mit Periode P:

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{P}\varphi + \varphi_0\right)$$

- Also $c = \frac{2\pi}{P}$ bzw.:

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{c}}$$

Größenordnungen

Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
10^{24}	Yotta	Y	10^{-1}	Dezi	d
10^{21}	Zetta	Z	10^{-2}	Zenti	c
10^{18}	Exa	E	10^{-3}	Milli	m
10^{15}	Peta	P	10^{-6}	Mikro	µ
10^{12}	Tera	T	10^{-9}	Nano	n
10^{9}	Giga	G	10^{-12}	Piko	p
10^{6}	Mega	M	10^{-15}	Femto	f
10^{3}	Kilo	k	10^{-18}	Atto	a
10^{2}	Hekto	h	10^{-21}	Zepto	z
10^{1}	Deka	da	10^{-24}	Yocto	y

Übersicht Exponentialfunktionen

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

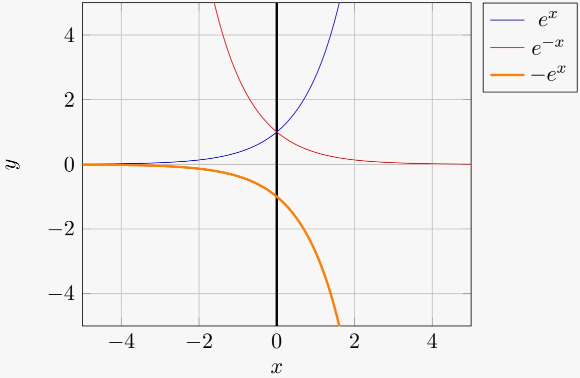
- Faktor b im Exponenten $\rightarrow$ wirkt wie andere Basis
- Negative b $\rightarrow$ **exponentiell fallend**
- Verschiebung entlang der x-Achse :x_0
- Verschiebung entlang der y-Achse :c

Abfallende Exponentialfunktion

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

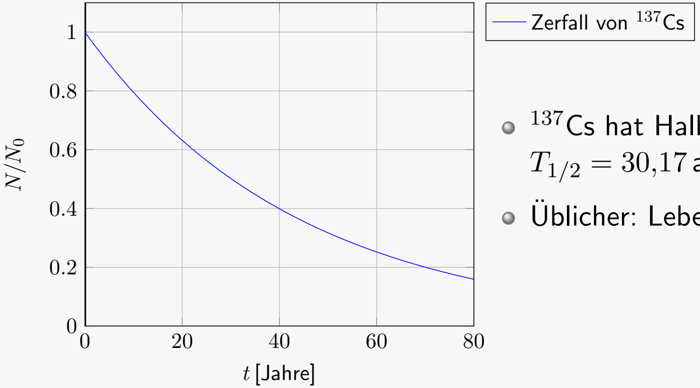
Negative b: **exponentiell fallend** (z.B. $e^{-x} = 1/e^x$)



Übersicht

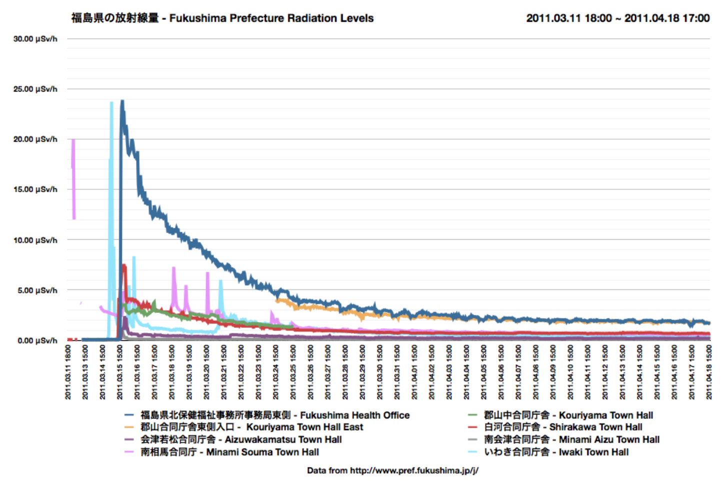
Beispiel: Radioaktiver Zerfall von Cäsium

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



- ^{137}Cs hat Halbwertszeit $T_{1/2} = 30{,}17\,\mathrm{a}$
- Üblicher: Lebensdauer $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)}$

Radioaktiver Zerfall – Strahlenbelastung

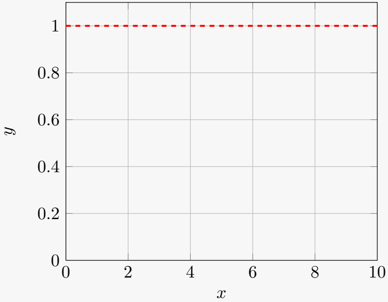


Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fukushima_I_radiation,_Fukushima_Prefecture_2,_March-April_2011.png

Sättigungsfunktion

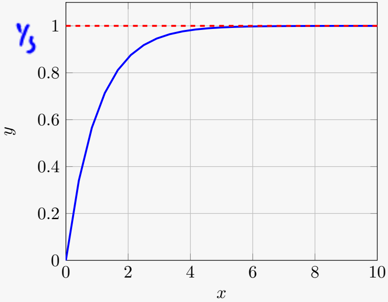
- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasant ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle

$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



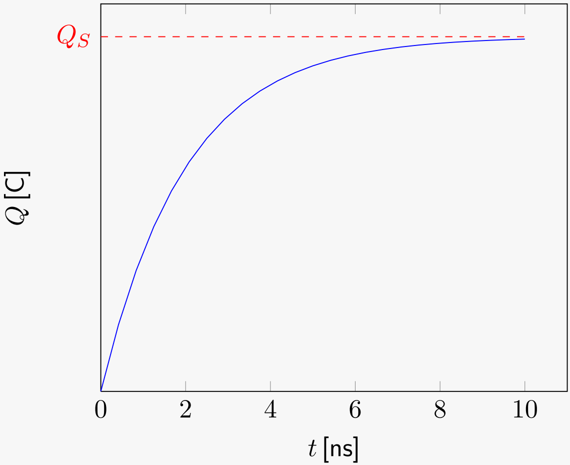
- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasant ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle

$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



Beispiel: Laden eines Kondensators

$$Q(t) = Q_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Übersicht

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

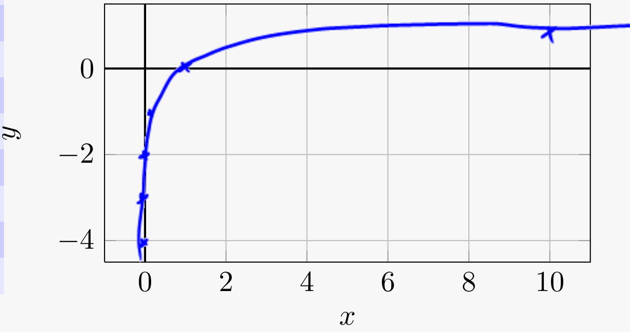
$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

$$x = \log_{10}(10000)$$

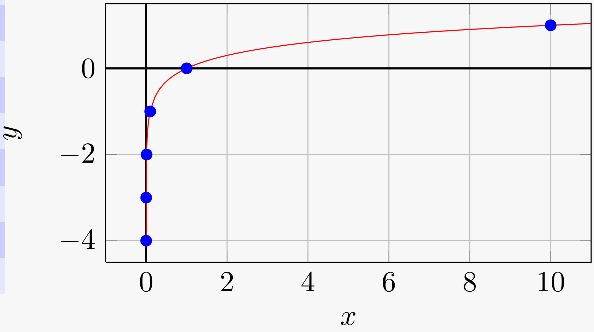


Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

$$x = \log_{10}(10000)$$



Logarithmus

$$
\begin{aligned}
10^x &= 10000 \\
x &= \log_{10}(10000) = 4
\end{aligned}
$$

- $x = 4$: Anzahl der Nullen
- $\log_{10}$ steht für Logarithmus zur Basis 10
- Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit gleicher Basis
- Wächst extrem langsam

Logarithmus allgemein

Gegeben

$$b = a^x \qquad \text{mit } a > 0$$

Lösung: **Logarithmus von b zur Basis a**

$$x = \log_a b$$

$$x = \log_a b = \boxed{\log_a a^x = x}$$

Logarithmus allgemein

Gegeben

$$b = a^x \qquad \text{mit } a > 0$$

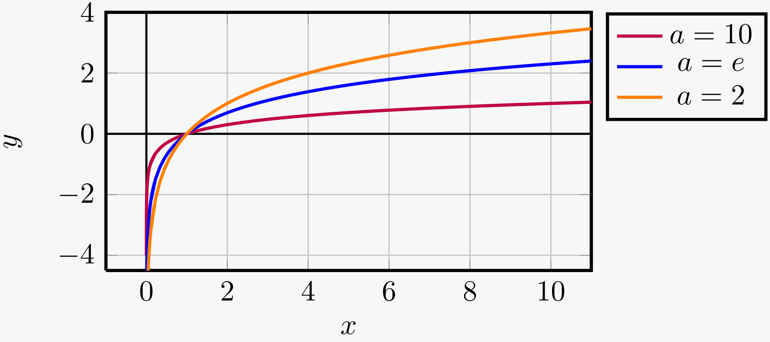
Lösung: **Logarithmus von** b **zur Basis** a

$$x = \log_a b$$

Besondere Basen:

10: $\log_{10} b = \lg b$ $\qquad$ e: $\boxed{\log_e b = \ln b}$

Logarithmus mit unterschiedlicher Basis



- y-Achse ist Asymptote
- Schneidet x-Achse bei $x = 1$

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

$$A \cdot B = 10^n \cdot 10^m = 10^{\lg A} \cdot 10^{\lg B} \quad / \lg(\ )$$

$$\lg(A \cdot B) = \lg(10^{\lg A} \cdot 10^{\lg B}) = \lg(10^{\lg A + \lg B})$$

$$\lg(A \cdot B) = \lg A + \lg B$$

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} \\ &= 10^{\lg(A)+\lg(B)} \\ \lg(A \cdot B) &= \lg(10^{\lg(A)+\lg(B)}) \\ &= \lg(A) + \lg(B) \end{aligned}$$

Rechnen mit Logarithmen

Multiplikation

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

Division

$\log(A \cdot B^{-1})$

$$\log_b(A/B) = \log_b(A) - \log_b(B)$$

Potenz

$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

$A \cdot A = A^2$

Wurzel

$$\log_b(A^{\frac{1}{m}}) = \log_b(\sqrt[m]{A}) = \log_b(A)/m = \frac{1}{m} \log_b(A)$$

Beispiel

$$\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) = \log_2\left(\frac{10 \cdot x}{40}\right) = \log_2\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{x}{2^2}\right) = \log_2\left(x \cdot 2^{-2}\right)$$

$$= \log_2(x) + \underbrace{\log_2\left(2^{-2}\right)}_{-2}$$

$$= \boxed{\log_2(x) - 2}$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) =& \log_2(\frac{10 \cdot x}{40}) \\
&= \log_2(\frac{x}{4}) \\
&= \log_2(\frac{x}{2^2}) \\
&= \log_2(x \cdot 2^{-2}) \\
&= \log_2(x) + \log_2(2^{-2}) \\
&= \log_2(x) - 2
\end{aligned}
$$

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln A} = 10^{\lg A} \quad / \ln(\,)$$

$$\ln\left(e^{\ln A}\right) = \ln\left(10^{\lg A}\right)$$

$$\ln A = \lg A \cdot \ln(10)$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln(A)}$$

$$10^{\lg(A)} = A = e^{\ln(A)}$$

$$\ln(10^{\lg(A)}) = \ln(A)$$

$$\lg(A)\ln(10) = \ln(A)$$

$$\log_b(x) = \log_b(g)\log_g(x)$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$
\begin{aligned}
A &= e^{\ln(A)} \\
10^{\lg(A)} = A &= e^{\ln(A)} \\
\ln(10^{\lg(A)}) &= \ln(A) \\
\lg(A)\ln(10) &= \ln(A)
\end{aligned}
$$

Allgemein

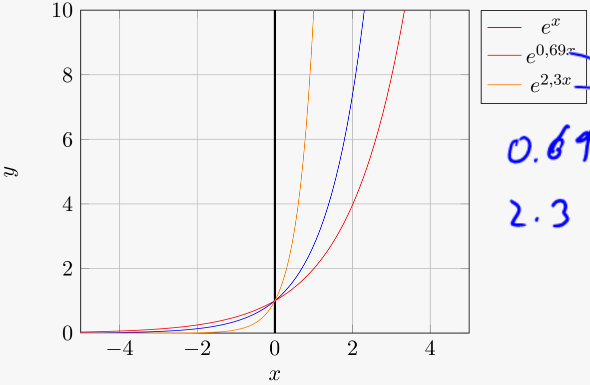
$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$

Wiederholung: Exponentialfunktion allgemein

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

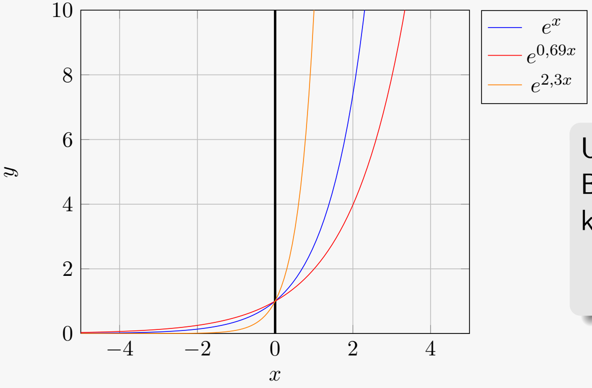
$0.69 = \ln 2 \Rightarrow 2^x$

$2.3 = \ln 10 \Rightarrow 10^x$

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

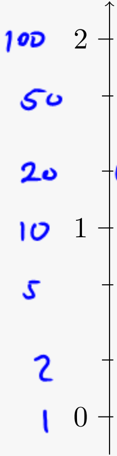
Um von einer beliebigen Basis B auf die Basis e zu kommen:

$$B^x = e^{\ln(B) \cdot x}$$

Z.B. für die y-Achse

- Trage jeden Messwert y an der Stelle $\lg(y)$ auf.

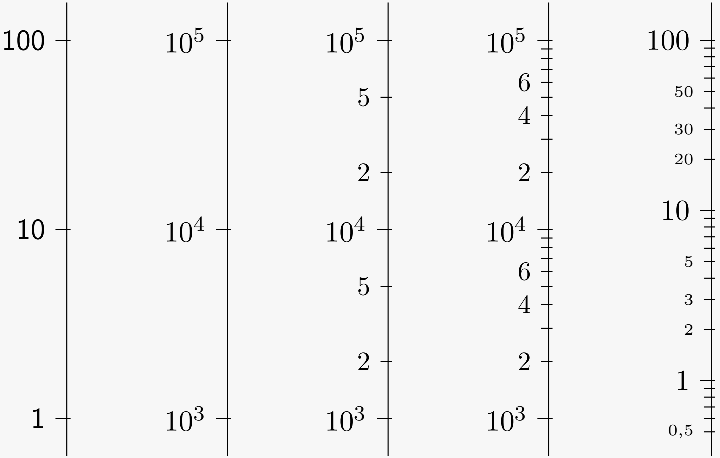
$$1 \to \lg(1) = 0$$
$$10 \to \lg(10) = 1$$
$$100 \to \lg(100) = 2$$
$$2 \to \lg(2) \simeq 0{,}3$$
$$5 \to \lg(5) \simeq 0{,}7$$



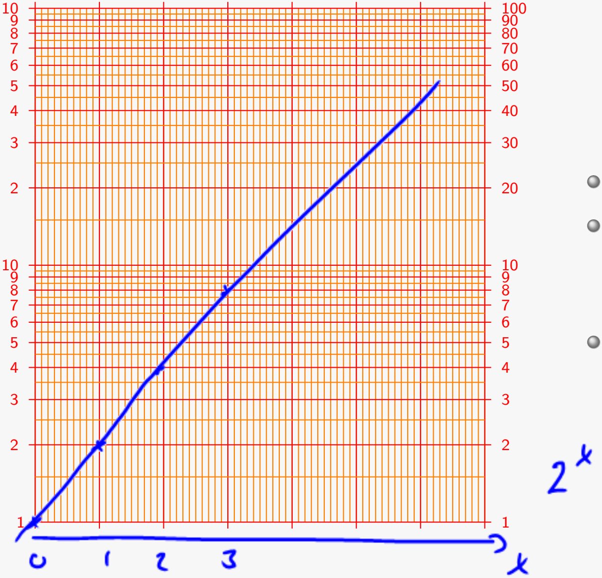
$$\lg 20 = \lg(2 \cdot 10) = \lg 2 + \lg 10 = \lg 2 + 1$$

- $\lg(x)$ nur für positive x
- Darstellung nur für positive y-Werte möglich

Verschiedene Beschriftungen möglich

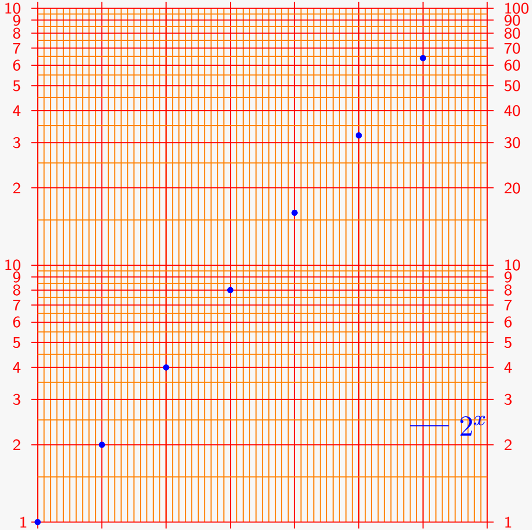


Einfach-logarithmisches Papier



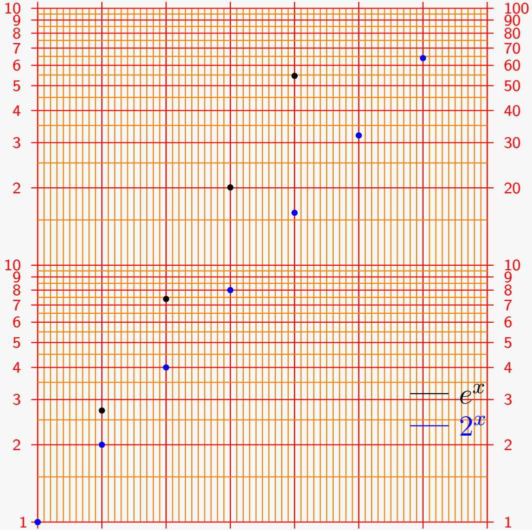
- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

Einfach-logarithmisches Papier



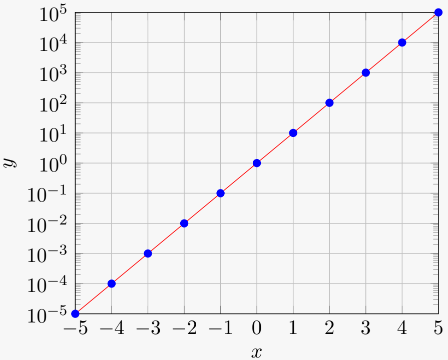
- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

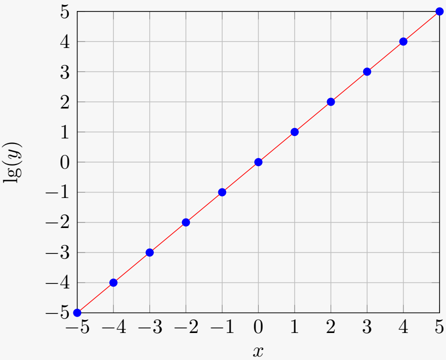
Einfach-logarithmisches Papier



- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

Logarithmische Graphen

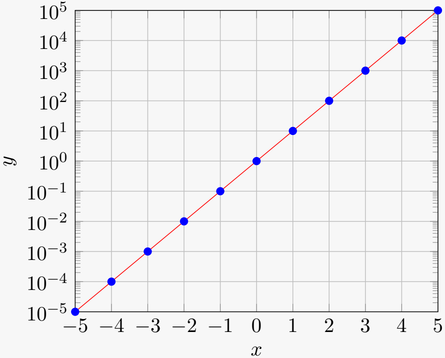


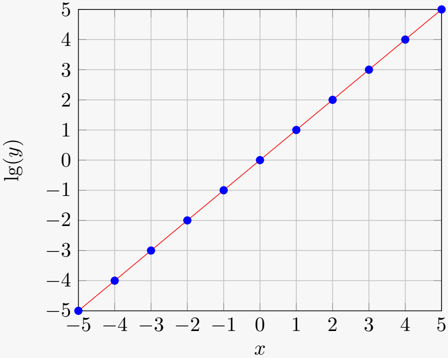


Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$

Steigung $= c$



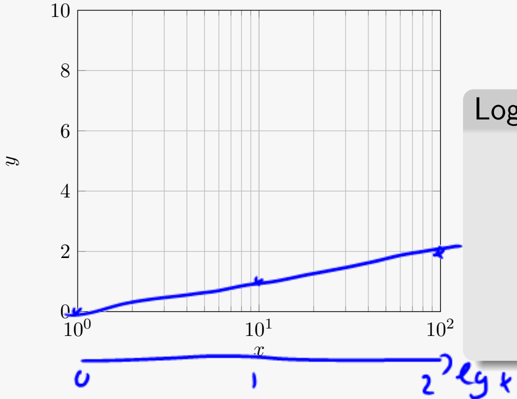


Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$
$$y = B^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x \cdot \lg(B)$$

Steigung $= c \cdot \lg(B)$

Logarithmische x-Achse



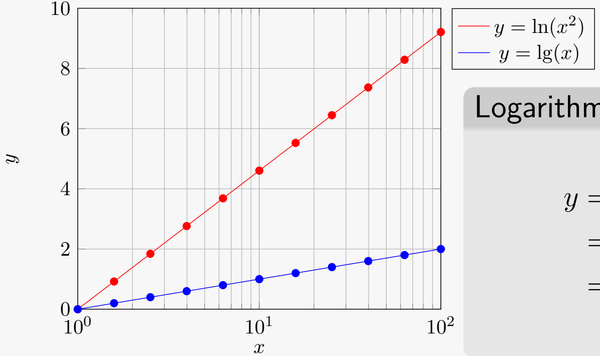
Logarithmische Zusammenhänge

$$
\begin{aligned}
y &= \log_b(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

Steigung: $n \log_b(10)$

$y = \lg(x)$

Logarithmische x-Achse



0 1 2 lg x

Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned} y &= \log_b(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\ &= \underbrace{\log_b(10) \cdot n}_{\text{zahl}} \cdot \lg(x) \end{aligned}$$

Steigung: $n \log_b(10)$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

$$\lg(y) = \lg(a \cdot x^n) = \lg(a) + \lg(x^n)$$

$$\lg(y) = \underbrace{\lg(a)}_{\text{Zahl}} + n \lg(x)$$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

$$
\begin{aligned}
y &= a \cdot x^n \\
\lg(y) &= \lg(a) + n \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

Potenzfunktion

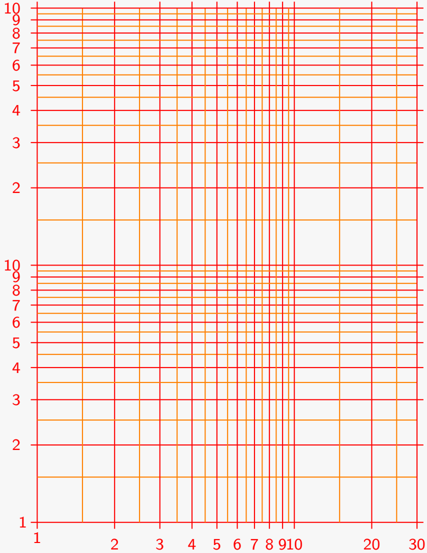
$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



Potenzfunktion

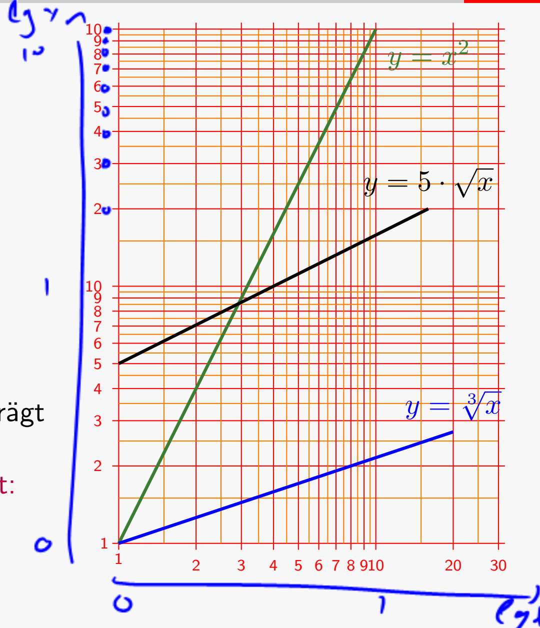
$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Analog zu linearer Funktion mit

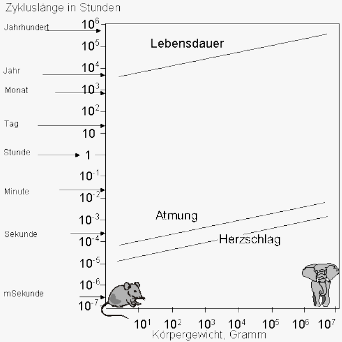
- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



- Messen und Vergleichen von Beziehungen zwischen der Körpergröße von Lebewesen und deren Verhältnis zu verschiedensten biologischen Größen



Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Allometrie

Klassische Allometrieformel

$$y = a \cdot x^b$$

Übersicht

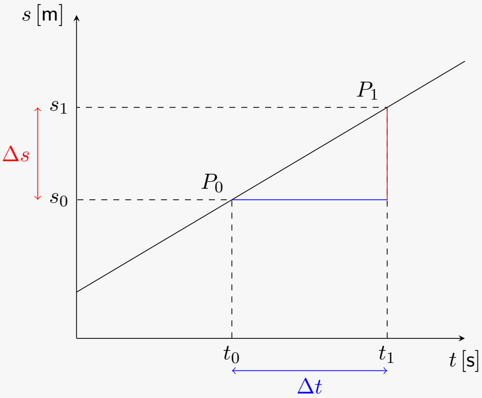
Beispiel:

- Auto mit **konstanter Geschwindigkeit** v
- Verhältnis aus zurückgelegtem Weg Δs und dafür benötigter Zeit Δt immer gleich

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

Um die Geschwindigkeit zu messen, reicht es Zeit und Ort an einem Startpunkt P_0 und an einem Stopppunkt P_1 zu bestimmen.

Weg-Zeit-Diagramm – konstante Bewegung

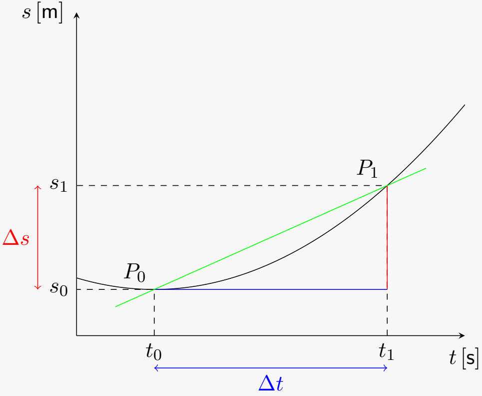


- P_0: Startpunkt der Messung
  t_0 Startzeit, s_0 Startort
- P_1: Stopppunkt der Messung
  t_1 Stoppzeit, s_1 Stopport
- Geschwindigkeit konstant
  $\Rightarrow$ v ist Steigung der Geraden

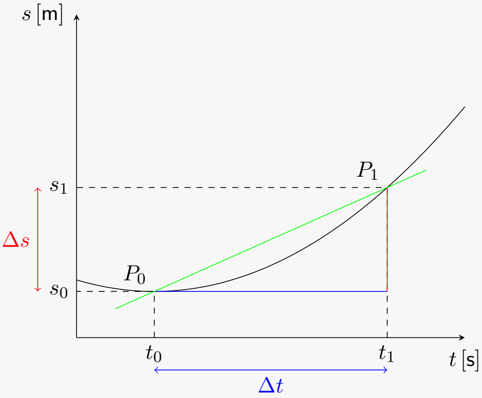
Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Weg-Zeit-Diagramm – Beschleunigte Bewegung

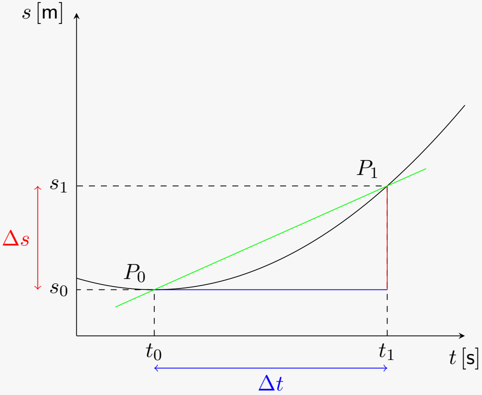


- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken



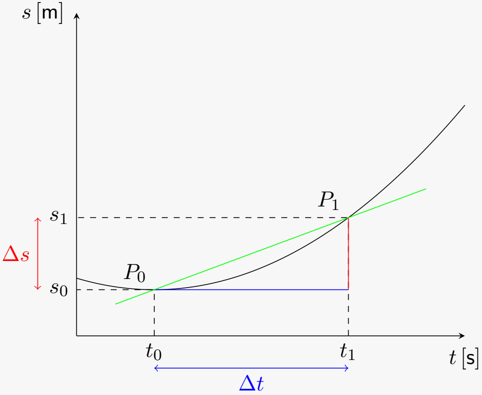
- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken

- Δt muss so klein gewählt werden, dass die Geschwindigkeitsänderung während Δt vernachlässigbar klein wird.

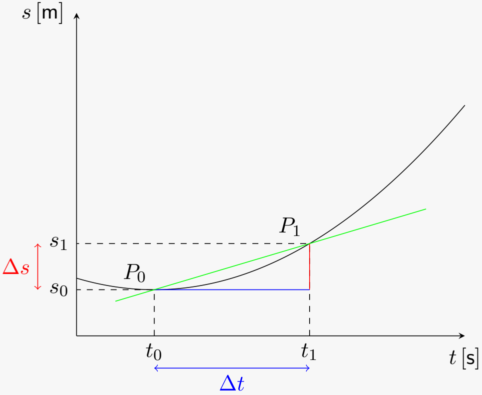


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

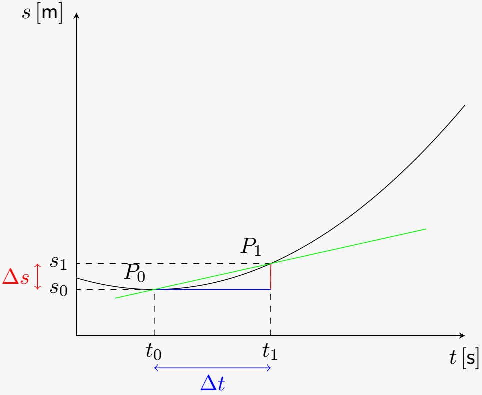
Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

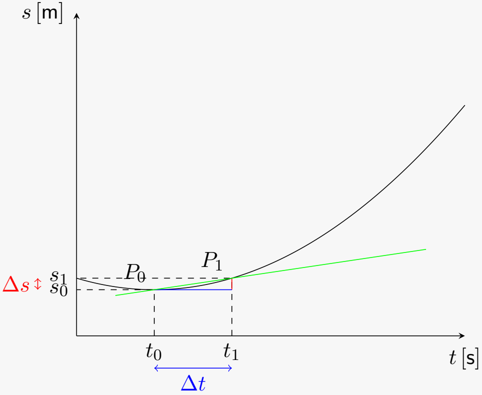


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$



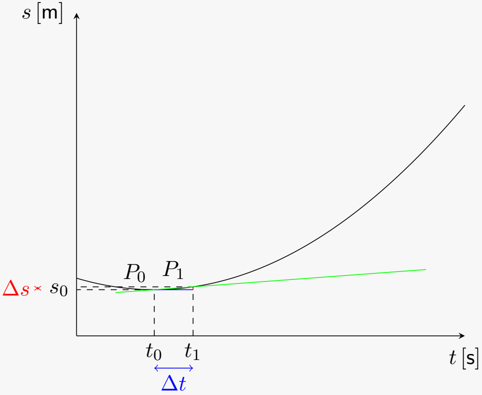
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t

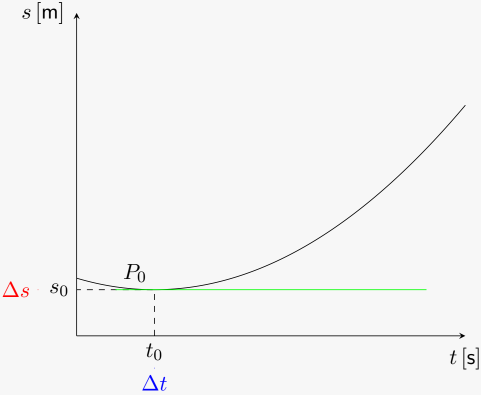


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$
- Tangente an die Kurve bei P_0

Differentialquotient

Mathematisch kann man Δt *„unendlich klein“* werden lassen

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t_0}$$

Die Steigung der Kurve im Punkt P ist die Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

Ableitung

- Die **Ableitung** an einem Punkt P der Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt P an.
- Mathematisch definiert durch den **Differentialquotienten** $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$
- Im Differentialquotienten sind die Differenzen infinitesimal klein.

Man schreibt:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Beispiel $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2\Delta x \cdot x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$f(x) = x^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \qquad f'(x) = 2x$$

Beispiel $f(x) = x^2$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= 2x + \Delta x \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}
$$

$f(x)$	$y' = f'(x)$
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$n=2 \rightarrow x^2 -$

$2 \cdot x$

Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) =$ $\frac{d}{dx}(7 \cdot \ln x) = 7 \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)$

$= 7 \cdot \frac{1}{x}$

Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{7}{x}$

Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) =$

Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + e^x$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \to f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\to f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin(x) \cdot \cos(x)\right) = \frac{d}{dx}(\sin(x)) \cdot \cos x + \sin x \, \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x)/\cos(x)$$
$$\rightarrow f'(x) =$$

Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)))/\cos^2(x) \\ &= 1 + \sin^2(x)/\cos^2(x) \\ &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) =$$

Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

Ableitungsregeln

1. **Konstanter Faktor**
   $y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$
2. **Summenregel**
   $y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
3. **Produktregel**
   $y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
4. **Quotientenregel**
   $y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v(x)^2$
5. **Kettenregel**
   $y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

Beispiele für Ableitungen

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \to f'(x) =$

- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \to f'(x) =$

- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \to f'(x) =$

- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \to f'(x) =$

- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \to f'(x) =$

Beispiele für Ableitungen

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) = 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3/x^2$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) = 3/(5 \cdot \sqrt[5]{x^2})$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) = (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \rightarrow f'(x) = (1 + 1/x - \ln(x))/(x+1)^2$

Übersicht

Ursachen für Messunsicherheiten/Fehler

Systematische Fehler

- Falsche Eichung
- Fehlerhaftes Messgerät
- Nährungen
- Längenänderung durch Temperatur
- ...

Zufällige Fehler

- Ablesefehler
- statistische Schwankungen
- Spiel bei Mikrometerschraube
- ...

Zufällige Fehler lassen sich durch Wiederholung der Messung verringern!

Messergebnisse

Messergebnis = Messwert ± Fehler

Absoluter Fehler

$$L = (5{,}63 \pm 0{,}05)\,\mathsf{m}$$

Relativer Fehler

$$L = 5{,}63\,\mathsf{m} \pm 0{,}9\%$$

Fehler = Zufallsfehler + systematischer Fehler

$$L = (5{,}63 \pm 0{,}03\,(\mathsf{stat.}) \pm 0{,}04\,(\mathsf{sys.}))\,\mathsf{m}$$

Der **wahre Wert** ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Fehlerintervall enthalten.

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

Um zufällige Fehler zu verringern wird mehrfach gemessen.
Wie erhält man nun die beste Schätzung für den wahren Wert?

Arithmetisches Mittel – Mittelwert

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Standardabweichung

Mittlerer (quadratischer) Fehler der Einzelmessung

Standardabweichung

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Messwert x_i liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$

Fehler des Mittelwerts

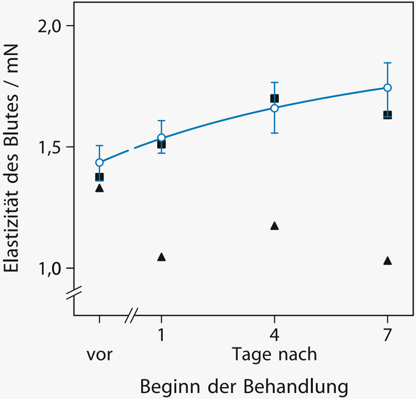
$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Wahrer Wert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$

Je häufiger ich messe, desto kleiner wird der Fehler des Mittelwerts! Um Ihn zu halbieren brauche ich 4 mal so viele Messwerte!

Beispiel

Trombelastogramm während einer Behandlung mit Heparin

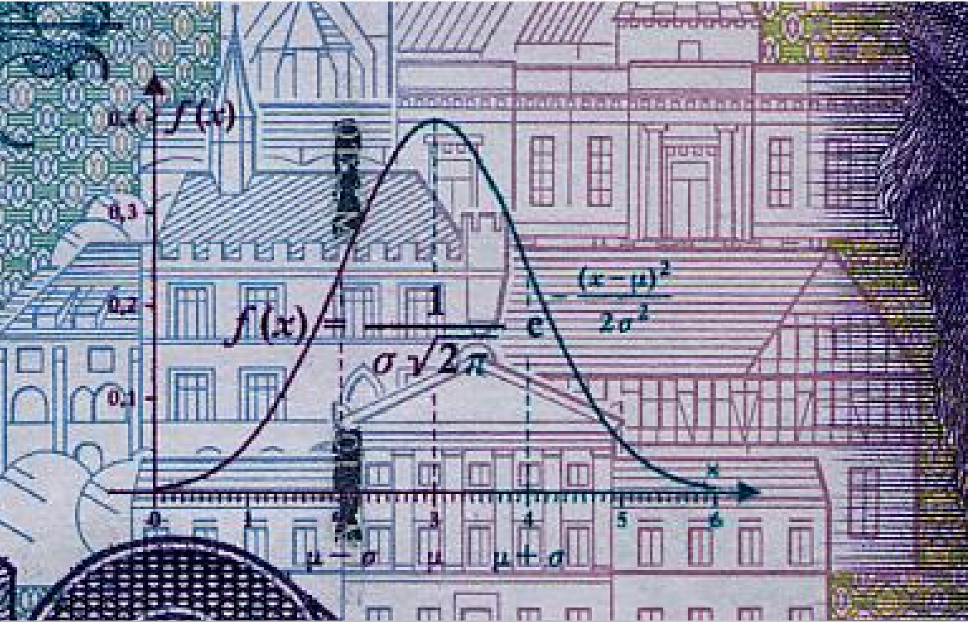


Aus: Harten *Physik für Mediziner*

- Beobachtungsgruppe von 28 Patienten
- ■ und ▲: zwei Mitglieder der Beobachtungsgruppe
- Blaue Kreise: Mittelwert der Werte aller Patienten
- Die blauen Fehlerbalken geben die Standardabweichung an

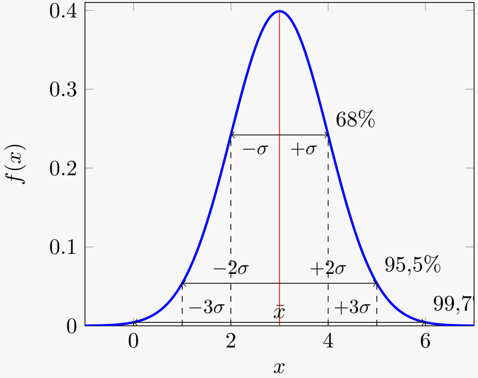
Normalverteilung

Normalverteilung



Normalverteilung

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

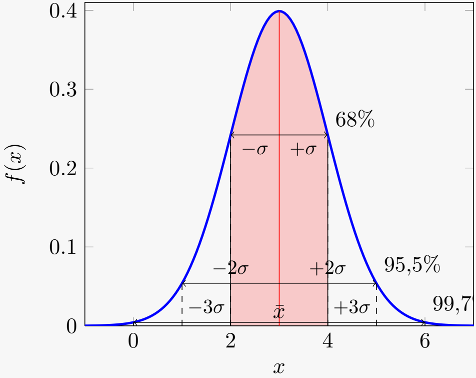


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Gaußsche Glockenkurve

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

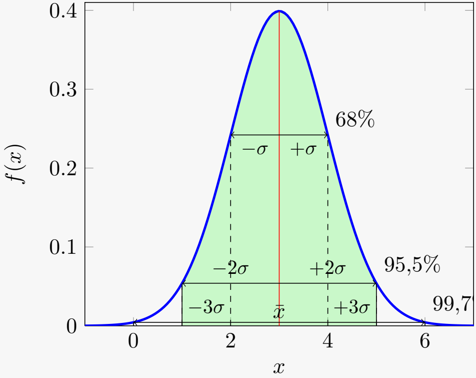


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Gaußsche Glockenkurve

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

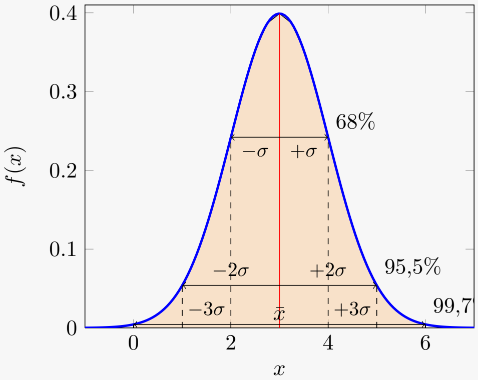


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Gaußsche Glockenkurve

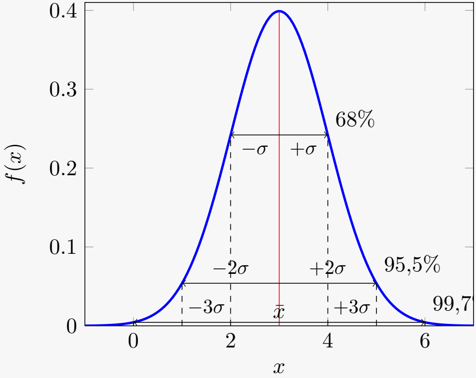
Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Häufigkeitsverteilung für reine Zufallsfehler

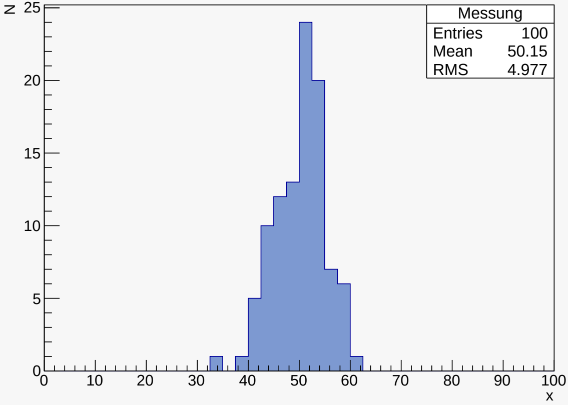


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

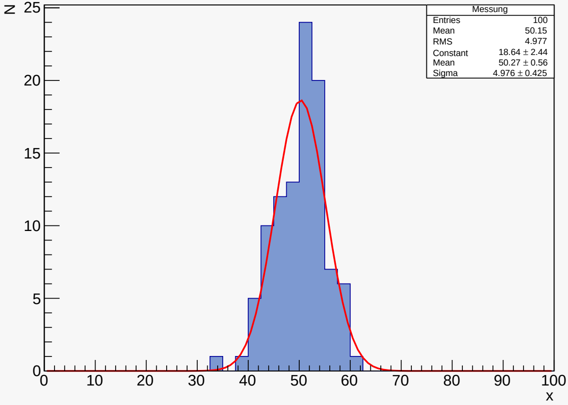
- Mittelwert $\mu = \langle x \rangle = \bar{x}$
- 68% im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95,5% in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,7% in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

- Analog: 68% in $[\bar{x} - \Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$
- 95,5% in $[\bar{x} - 2\Delta\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}]$
- 99,7% in $[\bar{x} - 3\Delta\bar{x}, \bar{x} + 3\Delta\bar{x}]$

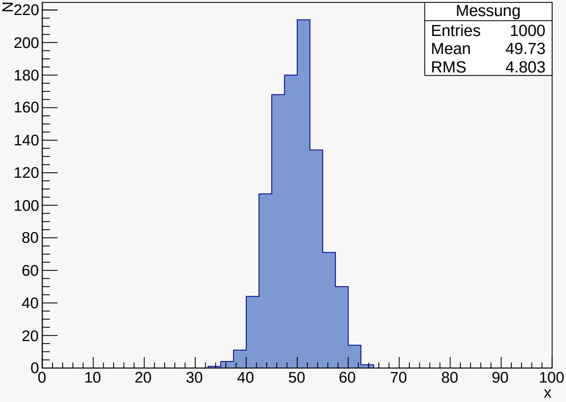
Gaußverteilung realistischer Messungen



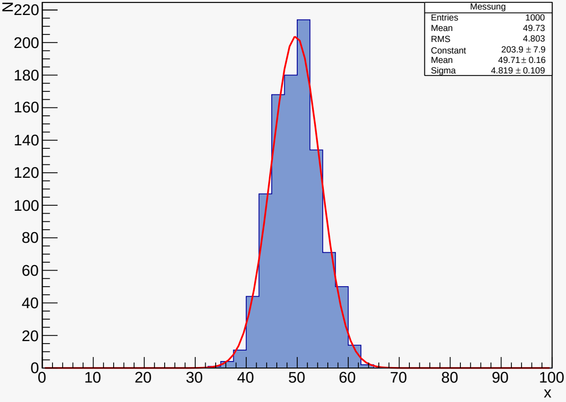
Gaußverteilung realistischer Messungen



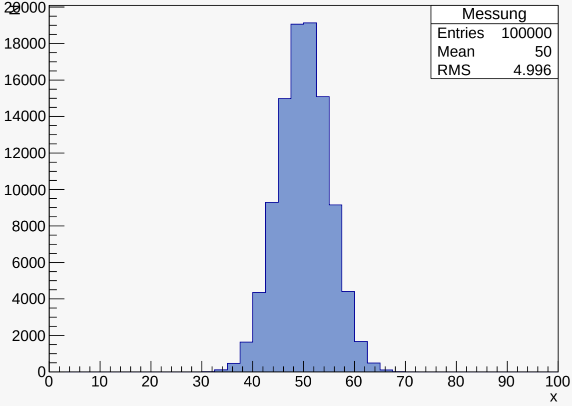
Gaußverteilung realistischer Messungen



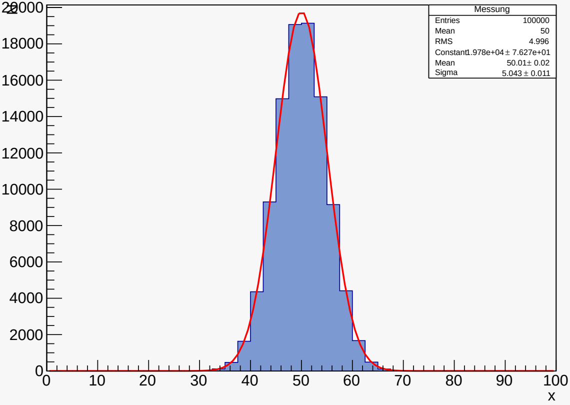
Gaußverteilung realistischer Messungen



Gaußverteilung realistischer Messungen



Gaußverteilung realistischer Messungen



Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	$x_i/[x]$	$(x_i - \bar{x})/[x]$	$(x_i - \bar{x})^2/[x]^2$
1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			
	$\sum_i x_i = \dots$		$\sum_i (x - \bar{x})^2 = \dots$

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe			

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\mathrm{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\mathrm{cm}^2$
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe	222,7		

Beispiel Protokollführung

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3		
2	35,5		
3	36,8		
4	38,1		
5	37,8		
6	37,2		
Summe	222,7		

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})/\text{cm}$	$(l_i - \bar{l})^2/\text{cm}^2$
1	37,3	0,2	
2	35,5	-1,6	
3	36,8	-0,3	
4	38,1	1,0	
5	37,8	0,7	
6	37,2	0,1	
Summe	222,7		

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Beispiel Protokollführung

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Messe 6 mal eine Länge

Lfd. Nr	Messwert	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
i	l_i/cm	$(l_i - \bar{l})$/cm	$(l_i - \bar{l})^2$/cm^2
1	37,3	0,2	0,04
2	35,5	-1,6	2,56
3	36,8	-0,3	0,09
4	38,1	1,0	1,00
5	37,8	0,7	0,49
6	37,2	0,1	0,01
Summe	222,7		4,19

Mittelwert: $\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{n} = \frac{222{,}7}{6} = 37{,}1167$

Fehler: $\Delta\bar{l} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2} = \sqrt{\frac{1}{6\cdot 5}\cdot 4{,}19\,\mathrm{cm}^2} = 0{,}3737\,\mathrm{cm}$

Ergebnis

$$l = (37{,}1 \pm 0{,}4)\,\mathsf{cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

Ergebnis

$$l = (37{,}1 \pm 0{,}4)\,\text{cm}$$

Achtung: Es wird nur die erste fehlerbehaftete Stelle (gerundet) angegeben

Relativer Fehler

$$\begin{aligned} l &= 37{,}1\,\text{cm} \pm \frac{0{,}4}{37{,}1} \cdot 100\% \\ &= 37{,}1\,\text{cm} \pm 1{,}1\% \end{aligned}$$

Fehlerfortpflanzung

- Messgröße setzt sich aus mehreren fehlerbehafteten Größen zusammen
- Nur die Fehler der einzelnen Größen sind bekannt

Wie groß ist der Gesamtfehler?

Zwei Fälle

- Addition der Größen
- Multiplikation der Größen

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

Fehlerfortpflanzung – Addition

Beispiel: Messung einer Länge $l = l_A + l_B$:

- Zwei Einzelmessungen l_A und l_B mit Fehler Δl_A und Δl_B
- Gesamtfehler: Summe der absoluten Einzelfehler

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B$$

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

Größter Wert von v:

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{\text{min}} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größter Wert von v:

$$v_{\text{max}} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

Fehlerfortpflanzung – Multiplikation

Vereinfachte Schätzung des Gesamtfehlers

Beispiel: Messung der Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

Bestimmung von v durch Messen des Weges s und der benötigten Zeit t.

Kleinster Wert von v:

$$v_{\text{min}} = \frac{\bar{s} - \Delta\bar{s}}{\bar{t} + \Delta\bar{t}}$$

Größter Wert von v:

$$v_{\text{max}} = \frac{\bar{s} + \Delta\bar{s}}{\bar{t} - \Delta\bar{t}}$$

- $\bar{v}$ liegt etwa in der Mitten von $[v_{\text{min}}, v_{\text{max}}]$.
- Die größere der Differenzen $\bar{v} - v_{\text{min}}$ bzw. $v_{\text{max}} - \bar{v}$ ist der Fehler $\Delta\bar{v}$

Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120{,}0 \pm 0{,}2)\,\text{cm}$
- Kantenlänge $b = (90{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 10800\,\text{cm}^2$

Fehlergrenzen:

Beispiel: Rechteck

Gemessen:

- Kantenlänge $a = (120{,}0 \pm 0{,}2)\,\text{cm}$
- Kantenlänge $b = (90{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$

Fläche (Mittelwert):

- $\bar{F} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 120\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 10800\,\text{cm}^2$

Fehlergrenzen:

$$\begin{aligned}
F_{\text{max}} &= (\bar{a} + \Delta\bar{a})(\bar{b} + \Delta b) \\
&= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} + \underbrace{\Delta\bar{a} \cdot \Delta\bar{b}}_{\text{klein}} \\
&\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a} \\
F_{\text{min}} &\simeq \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} - \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}
\end{aligned}$$

Es folgt für den Fehler: $\Delta\bar{F} \simeq F_{\text{max}} - \bar{F} \simeq \bar{F} - F_{\text{min}} \simeq \bar{a} \cdot \Delta\bar{b} + \bar{b} \cdot \Delta\bar{a}$

$$\frac{\Delta\bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$

Fehler von Produkten

Allgemeine Regel

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\bar{F}} \simeq \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta \bar{b}}{\bar{b}}$$

Der relative Fehler von Produkten (hier $F = a \cdot b$) **und** Quotienten von Messwerten ist gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren

Zusammenfassung: zwei Regeln

Zwei Größen $a = \bar{a} + \Delta\bar{a}$ und $b = \bar{b} + \Delta\bar{b}$

Addition oder Subtraktion: $c = a + b$ bzw. $c = a - b$

Werden a und b addiert oder subtrahiert, so **addieren** sich die **absoluten** Fehler zum absoluten Gesamtfehler:

$$\Delta\bar{c} = \Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}$$

Multiplikation oder Division: $c = a \cdot b$ bzw. $c = a/b$

Werden a und b multipliziert oder dividiert, so **addieren** sich die **relativen** Fehler zum relativen Gesamtfehler:

$$\frac{\Delta\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}}$$