Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 3: Funktionen und Ableitungen

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

22. Oktober 2014

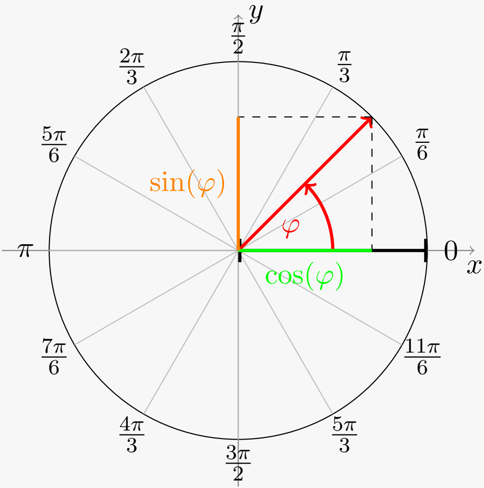
Hinweise zur Klausur

- Es darf **keine** eigene Formelsammlung verwendet werden.
- Die Klausur enthält eine Seite mit relevanten Formeln.
- Multiple Choice: Nur die Antwort zählt, der Lösungsweg spielt keine Rolle für die Bewertung.
- Taschenrechner dürfen uneingeschränkt benutzt werden.
  Allerdings ist es nicht erlaubt, Informationen zu möglichen Klausuraufgaben zu speichern.

Inhalt

Übersicht

1. Wiederholung
2. Exponentialfunktionen
3. Logarithmen
4. Differentiation

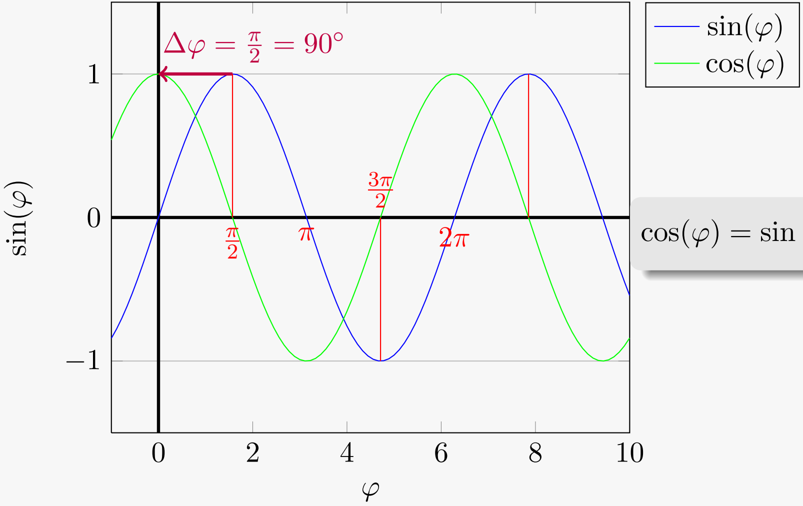


- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Graphen von Sinus und Cosinus



$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Allgemeine Sinus-Funktion und Periode

$$f(x) = A \cdot \sin\left(c \cdot \varphi + \varphi_0\right)$$

- Normaler Sinus hat die Periode $P = 2\pi$
- Allgemeine Sinus-Funktion mit Periode P:

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{P}\varphi + \varphi_0\right)$$

- Also $c = \frac{2\pi}{P}$ bzw.:

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{c}}$$

Größenordnungen

Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
10^{24}	Yotta	Y	10^{-1}	Dezi	d
10^{21}	Zetta	Z	10^{-2}	Zenti	c
10^{18}	Exa	E	10^{-3}	Milli	m
10^{15}	Peta	P	10^{-6}	Mikro	µ
10^{12}	Tera	T	10^{-9}	Nano	n
10^{9}	Giga	G	10^{-12}	Piko	p
10^{6}	Mega	M	10^{-15}	Femto	f
10^{3}	Kilo	k	10^{-18}	Atto	a
10^{2}	Hekto	h	10^{-21}	Zepto	z
10^{1}	Deka	da	10^{-24}	Yocto	y

Übersicht Exponentialfunktionen

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

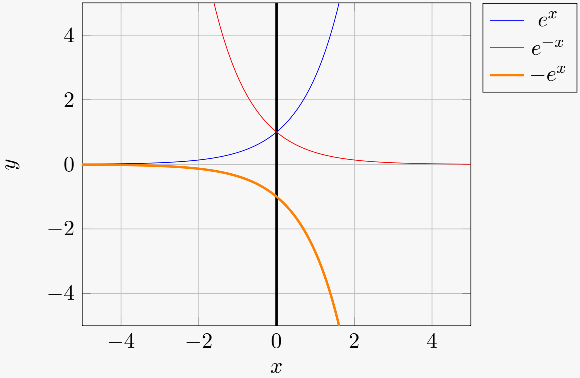
- Faktor b im Exponenten $\rightarrow$ wirkt wie andere Basis
- Negative b $\rightarrow$ **exponentiell fallend**
- Verschiebung entlang der x-Achse :x_0
- Verschiebung entlang der y-Achse :c

Abfallende Exponentialfunktion

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

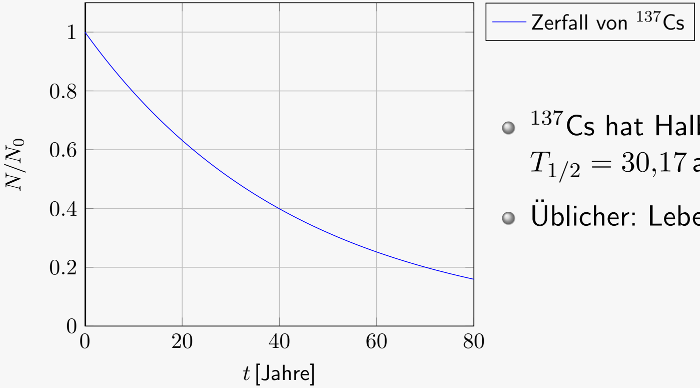
Negative b: **exponentiell fallend** (z.B. $e^{-x} = 1/e^x$)



Übersicht

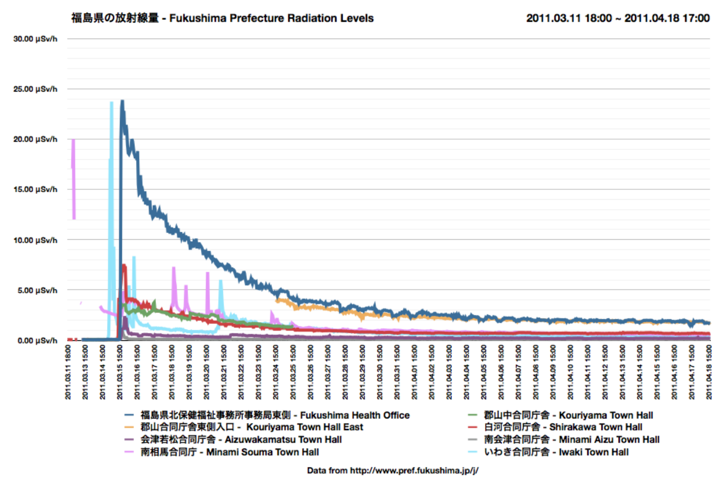
Beispiel: Radioaktiver Zerfall von Cäsium

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



- ^{137}Cs hat Halbwertszeit $T_{1/2} = 30{,}17\,\mathrm{a}$
- Üblicher: Lebensdauer $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)}$

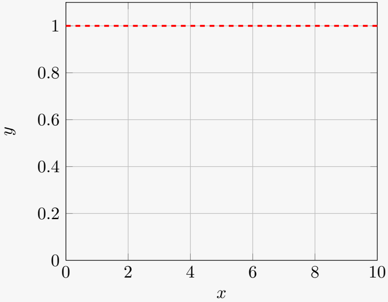
Radioaktiver Zerfall – Strahlenbelastung



Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fukushima_I_radiation,_Fukushima_Prefecture_2,_March-April_2011.png

- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasant ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle

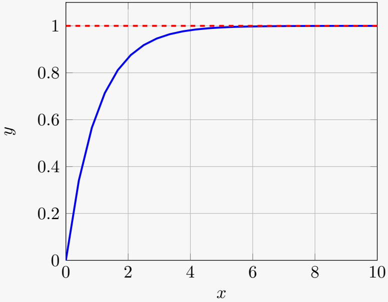
$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



Sättigungsfunktion

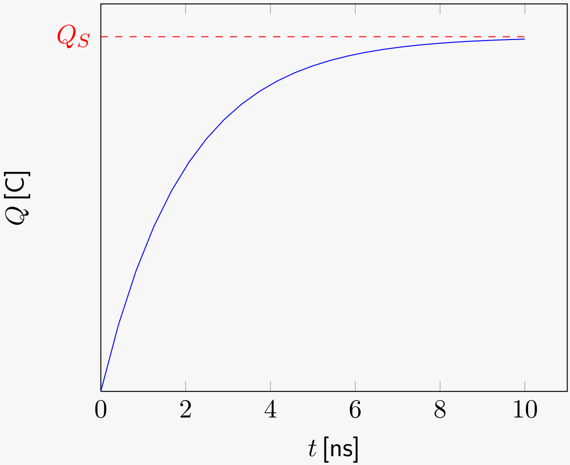
- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasant ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle

$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



Beispiel: Laden eines Kondensators

$$Q(t) = Q_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Übersicht

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

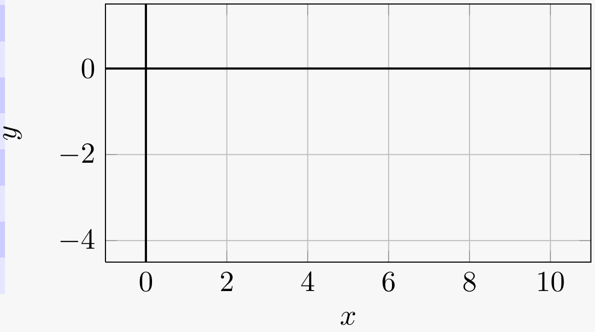
$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

$$x = \log_{10}(10000)$$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

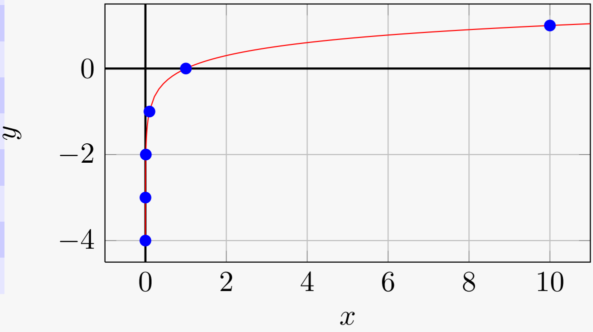


Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

$$x = \log_{10}(10000)$$



Logarithmus

$$10^x = 10000$$
$$x = \log_{10}(10000) = 4$$

- $x = 4$: Anzahl der Nullen
- $\log_{10}$ steht für Logarithmus zur Basis 10
- Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit gleicher Basis
- Wächst extrem langsam

Logarithmus allgemein

Gegeben

$$b = a^x \qquad \text{mit } a > 0$$

Lösung: **Logarithmus von b zur Basis a**

$$x = \log_a b$$

Logarithmus allgemein

Gegeben

$$b = a^x \qquad \text{mit } a > 0$$

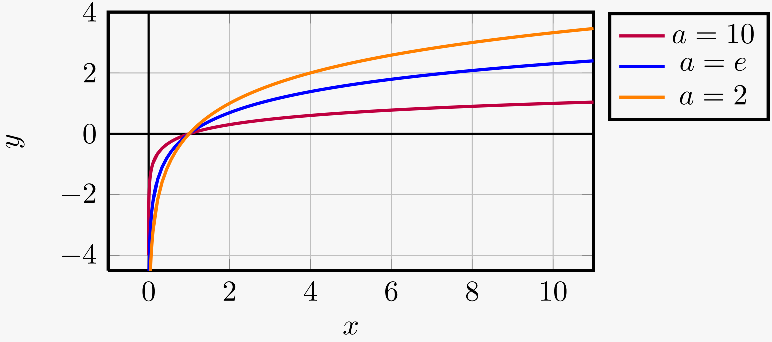
Lösung: **Logarithmus von b zur Basis a**

$$x = \log_a b$$

Besondere Basen:

10: $\log_{10} b = \lg b$ $\qquad$ e: $\boxed{\log_e b = \ln b}$

Logarithmus mit unterschiedlicher Basis



- y-Achse ist Asymptote
- Schneidet x-Achse bei $x = 1$

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

Rechnen mit Logarithmen – Multiplikation

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} \\ &= 10^{\lg(A)+\lg(B)} \\ \lg(A \cdot B) &= \lg(10^{\lg(A)+\lg(B)}) \\ &= \lg(A) + \lg(B) \end{aligned}$$

Rechnen mit Logarithmen

Multiplikation

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

Division

$$\log_b(A/B) = \log_b(A) - \log_b(B)$$

Potenz

$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

Wurzel

$$\log_b(\sqrt[m]{A}) = \log_b(A)/m$$

Beispiel

$$\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) =$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) &= \log_2(\frac{10 \cdot x}{40}) \\
&= \log_2(\frac{x}{4}) \\
&= \log_2(\frac{x}{2^2}) \\
&= \log_2(x \cdot 2^{-2}) \\
&= \log_2(x) + \log_2(2^{-2}) \\
&= \log_2(x) - 2
\end{aligned}$$

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln(A)}$$

$$10^{\lg(A)} = A = e^{\ln(A)}$$

$$\ln(10^{\lg(A)}) = \ln(A)$$

$$\lg(A)\ln(10) = \ln(A)$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln(A)}$$

$$10^{\lg(A)} = A = e^{\ln(A)}$$

$$\ln(10^{\lg(A)}) = \ln(A)$$

$$\lg(A)\ln(10) = \ln(A)$$

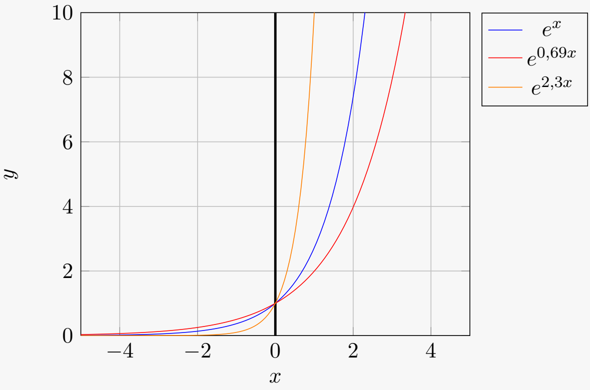
Allgemein

$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



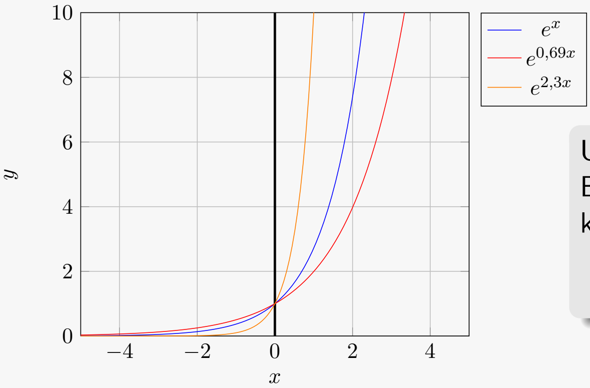
- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

Wiederholung: Exponentialfunktion allgemein

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

Um von einer beliebigen Basis B auf die Basis e zu kommen:

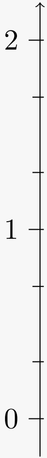
$$B^x = e^{\ln(B) \cdot x}$$

Logarithmisch geteilte Achsen

Z.B. für die y-Achse

- Trage jeden Messwert y an der Stelle $\lg(y)$ auf.

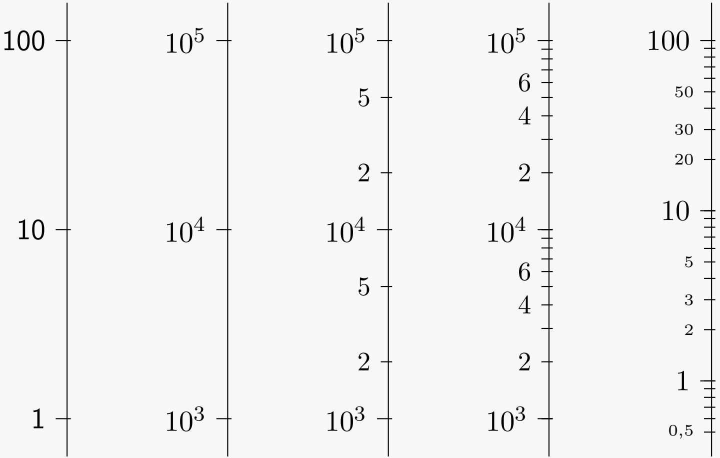
$$
\begin{aligned}
1 &\rightarrow \lg(1) = 0 \\
10 &\rightarrow \lg(10) = 1 \\
100 &\rightarrow \lg(100) = 2 \\
2 &\rightarrow \lg(2) \simeq 0{,}3 \\
5 &\rightarrow \lg(5) \simeq 0{,}7
\end{aligned}
$$



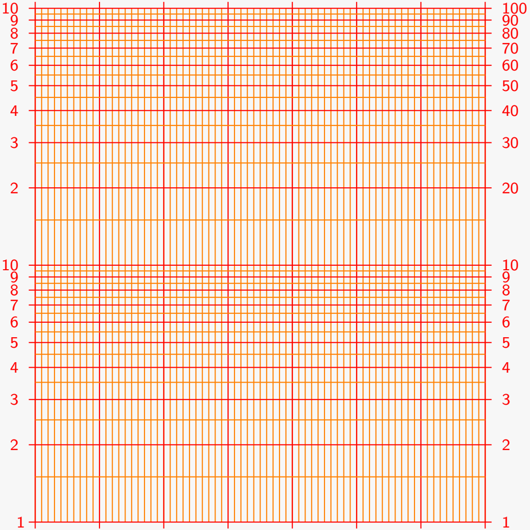
- $\lg(x)$ nur für positive x
- Darstellung nur für positive y-Werte möglich

Beschriftung logarithmisch geteilter Achsen

Verschiedene Beschriftungen möglich

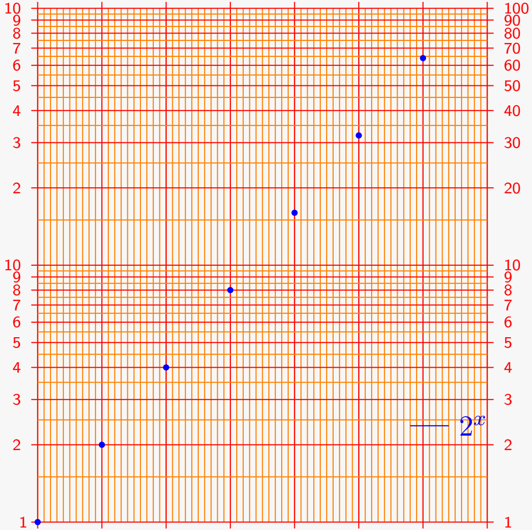


Einfach-logarithmisches Papier



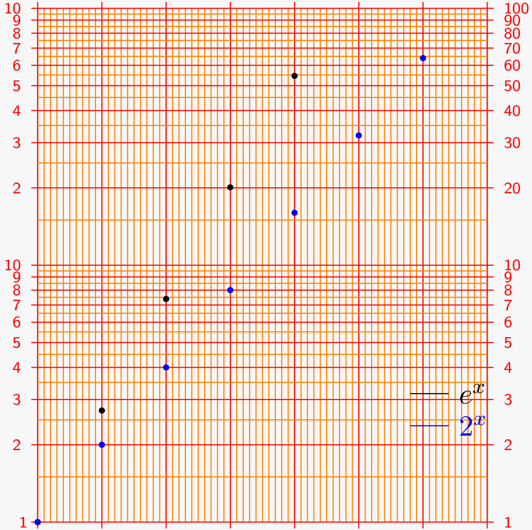
- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

Einfach-logarithmisches Papier



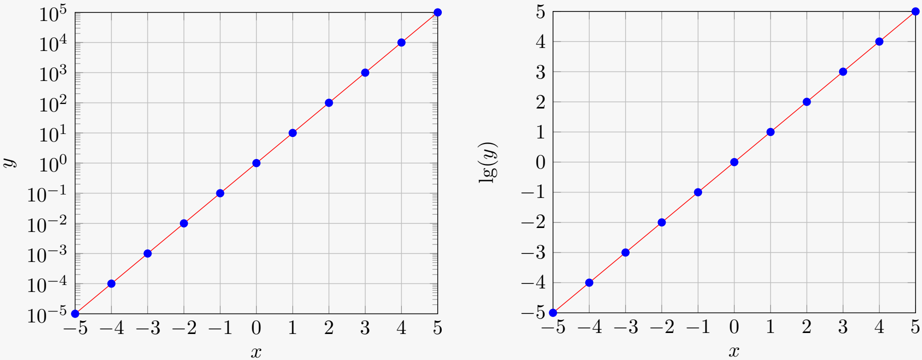
- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

Einfach-logarithmisches Papier



- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

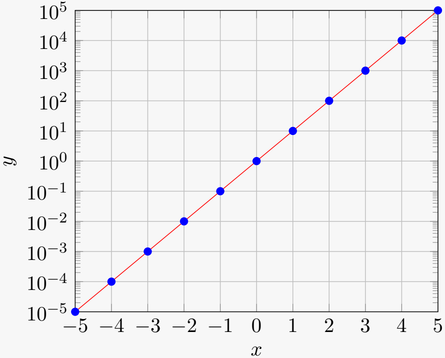
Logarithmische Graphen

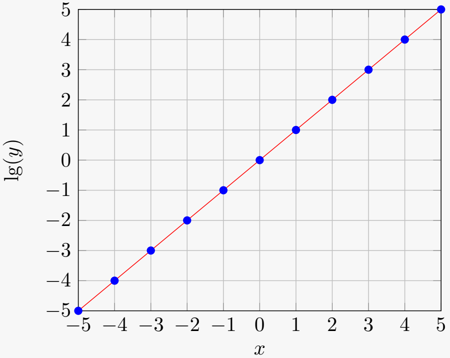


Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$

Steigung $= c$



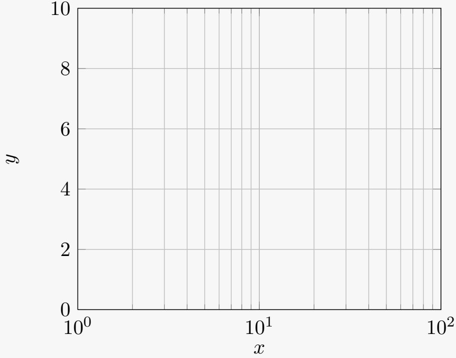


Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$
$$y = B^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x \cdot \lg(B)$$

Steigung $= c \cdot \lg(B)$

Logarithmische x-Achse

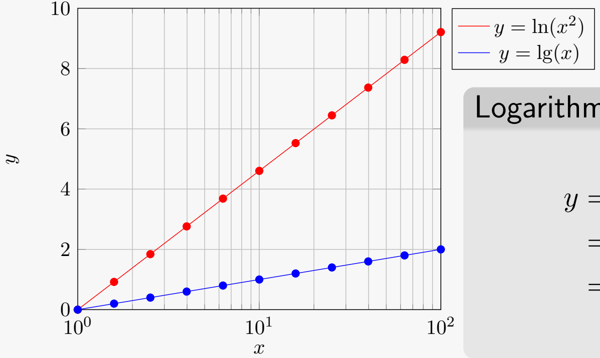


Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned} y &= \log_b(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x) \end{aligned}$$

Steigung: $n \log_b(10)$

Logarithmische x-Achse



Logarithmische Zusammenhänge

$$\begin{aligned} y &= \log_b(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\ &= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x) \end{aligned}$$

Steigung: $n \log_b(10)$

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

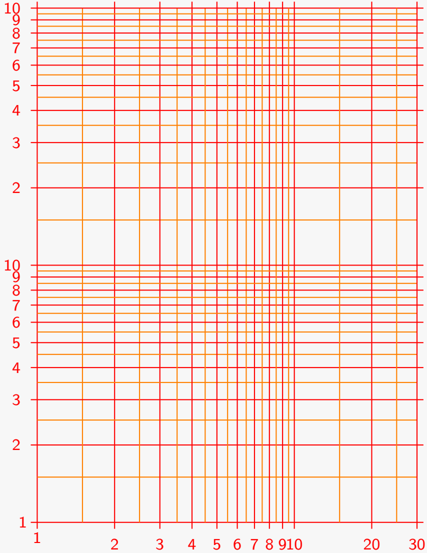
$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



Potenzfunktion

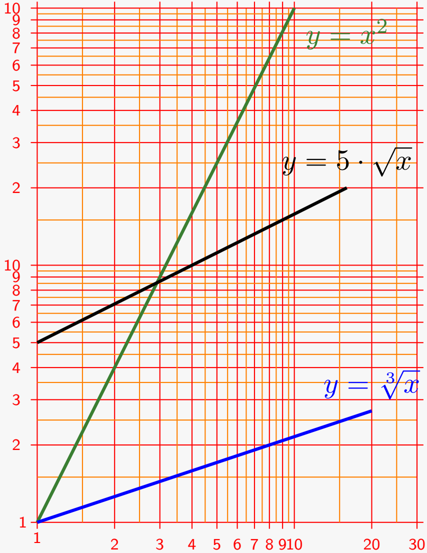
$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

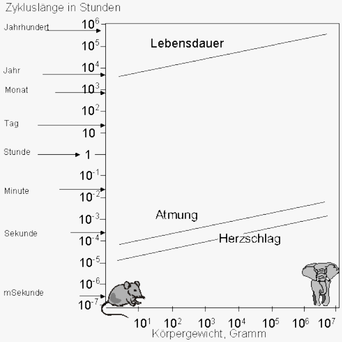
wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



Beispiel Allometrie

- Messen und Vergleichen von Beziehungen zwischen der Körpergröße von Lebewesen und deren Verhältnis zu verschiedensten biologischen Größen



Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Allometrie

Klassische Allometrieformel

$$y = a \cdot x^b$$

Übersicht

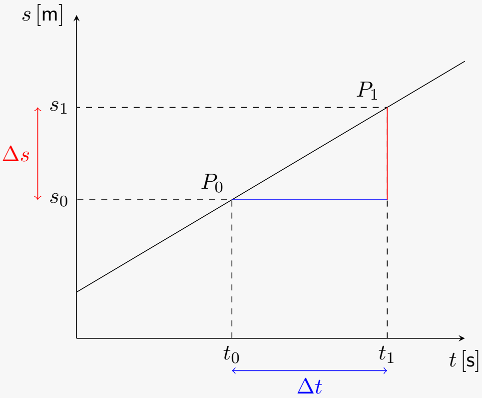
Beispiel:

- Auto mit **konstanter Geschwindigkeit** v
- Verhältnis aus zurückgelegtem Weg Δs und dafür benötigter Zeit Δt immer gleich

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Um die Geschwindigkeit zu messen, reicht es Zeit und Ort an einem Startpunkt P_0 und an einem Stopppunkt P_1 zu bestimmen.

Weg-Zeit-Diagramm – konstante Bewegung

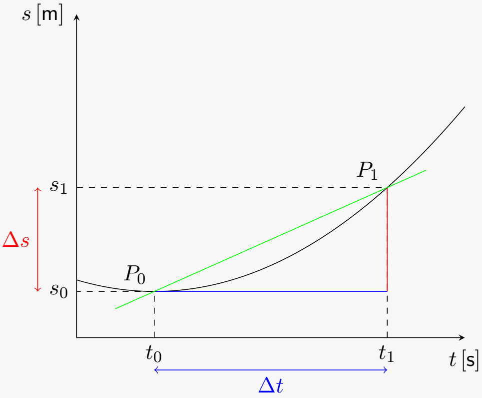


- P_0: Startpunkt der Messung
  t_0 Startzeit, s_0 Startort
- P_1: Stopppunkt der Messung
  t_1 Stoppzeit, s_1 Stopport
- Geschwindigkeit konstant
  $\Rightarrow$ v ist Steigung der Geraden

Geschwindigkeit

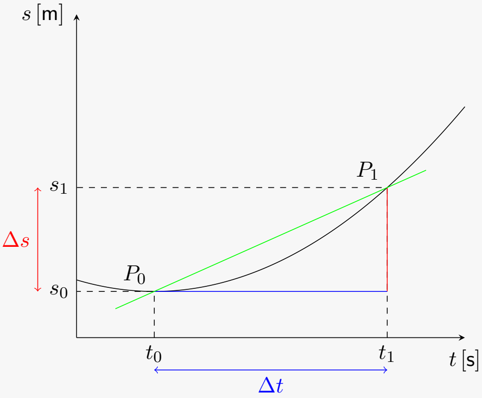
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Weg-Zeit-Diagramm – Beschleunigte Bewegung



- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken

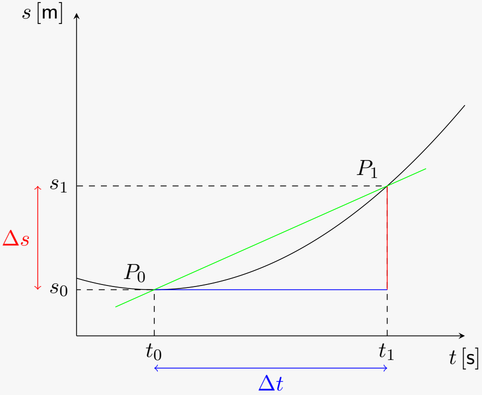
Weg-Zeit-Diagramm – Beschleunigte Bewegung



- Geschwindigkeit nicht konstant, v abhängig von t
- Steigungsdreieck gibt eine gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}$
- Für eine genauere Messung muss t_1 näher an t_0 rücken

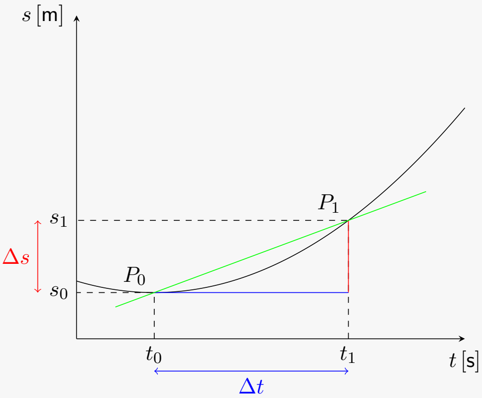
- Δt muss so klein gewählt werden, dass die Geschwindigkeitsänderung während Δt vernachlässigbar klein wird.

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



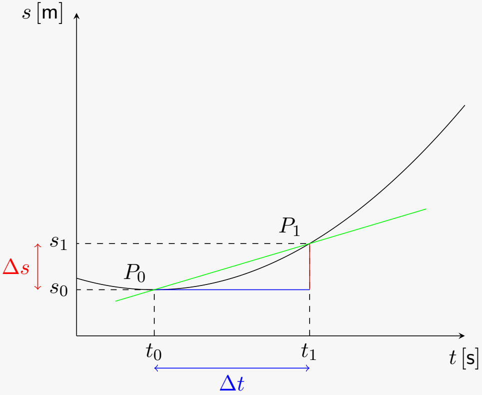
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



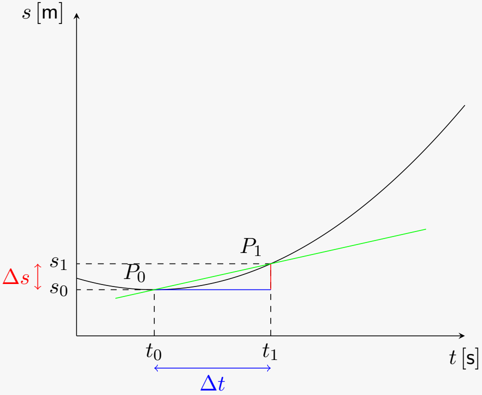
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



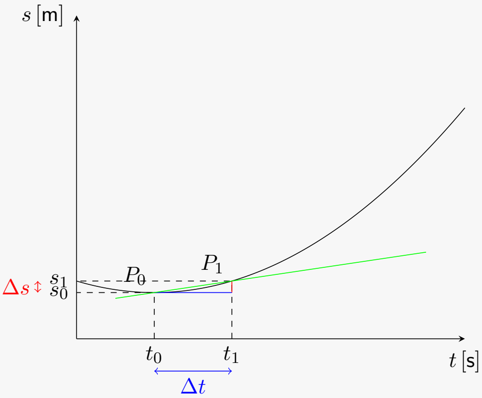
- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t

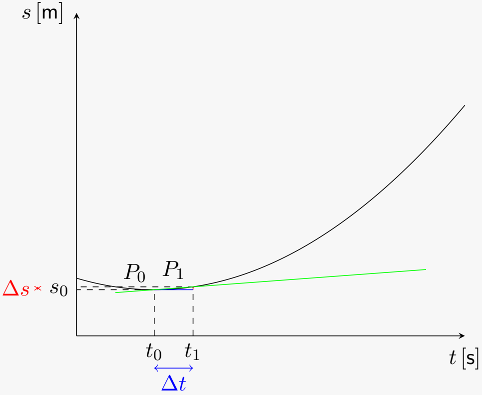


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t

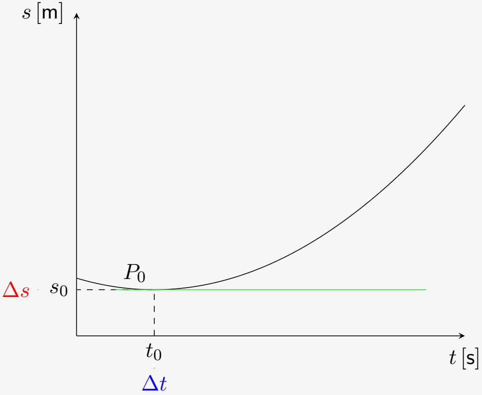


- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \rightarrow 0$



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$

Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t



- Gesucht: Geschwindigkeit an Punkt P_0 bzw. bei $t = t_0$
- $\Delta t \to 0$
- Tangente an die Kurve bei P_0

Differentialquotient

Mathematisch kann man Δt *„unendlich klein“* werden lassen

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t_0}$$

Die Steigung der Kurve im Punkt P ist die Tangente an die Kurve in diesem Punkt.

Ableitung

- Die **Ableitung** an einem Punkt P der Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt P an.
- Mathematisch definiert durch den **Differentialquotienten** $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$
- Im Differentialquotienten sind die Differenzen infinitesimal klein.

Man schreibt:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Beispiel $f(x) = x^2$

Beispiel $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= 2x + \Delta x \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}$$

Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen

$f(x)$	$y' = f'(x)$
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) =$

Konstanter Faktor

$$y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

- Faktoren können vor die Ableitung gezogen werden
- Beispiel: $f(x) = 7 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{7}{x}$

Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) =$

Summenregel

$$y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Summanden werden einzeln differenziert
- Beispiel: $f(x) = x^3 + e^x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + e^x$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= \end{aligned}$$

Produktregel

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

Quotientenregel

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = \sin(x)/\cos(x)$$
$$\rightarrow f'(x) =$$

$$y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v^2(x)$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\ \rightarrow f'(x) &= (\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x)))/\cos^2(x) \\ &= 1 + \sin^2(x)/\cos^2(x) \\ &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

Kettenregel

$$y = f(x) = f(u(x)) \to f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \to u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) =$$

$$y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= f'(u) \cdot u'(x)$$

- Innere Ableitung mal äußere Ableitung
- Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow u(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(u) = e^u$$
$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

Ableitungsregeln

1. **Konstanter Faktor**
   $y = f(x) = c \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$
2. **Summenregel**
   $y = f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
3. **Produktregel**
   $y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
4. **Quotientenregel**
   $y = f(x) = u(x)/v(x) \rightarrow f'(x) = (u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))/v(x)^2$
5. **Kettenregel**
   $y = f(x) = f(u(x)) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

Beispiele für Ableitungen

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) =$

- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \rightarrow f'(x) =$

Beispiele für Ableitungen

- $f(x) = 5 \cdot x^3 + x^2 + 3/x \rightarrow f'(x) = 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3/x^2$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \rightarrow f'(x) = 3/(5 \cdot \sqrt[5]{x^2})$
- $f(x) = x^5 \cdot \ln(x) \rightarrow f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$
- $f(x) = \sin(x^3 - x^2) \rightarrow f'(x) = (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot \cos(x^3 - x^2)$
- $f(x) = \ln(x)/(x+1) \rightarrow f'(x) = (1 + 1/x - \ln(x))/(x+1)^2$