Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 2: Noch mehr Funktionen

Dr. Daniel Bick

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

17. Oktober 2014

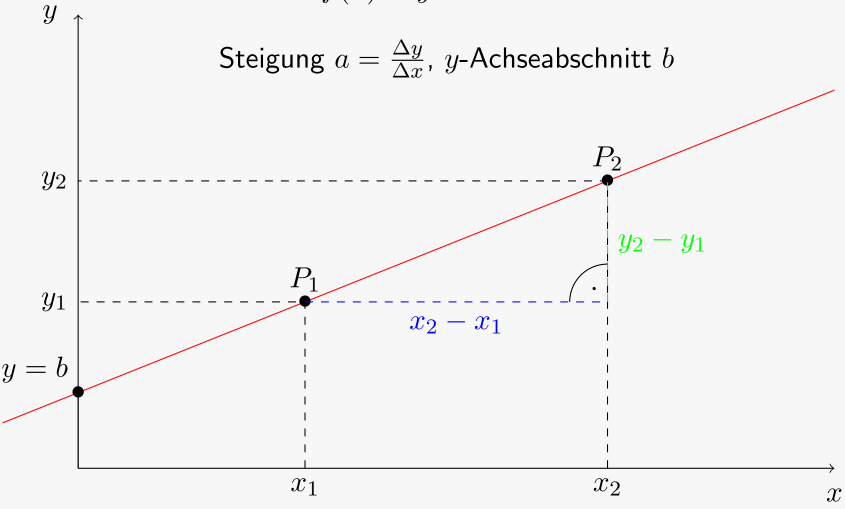
Inhalt

Übersicht

Wiederholung: Lineare Funktionen

$$f(x) = y = a \cdot x + b$$

Steigung $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, y-Achseabschnitt b



Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst

z.B.: $x \cdot x = x^2 \rightarrow$ 2. Potenz von x

- 0. Potenz: $x^0 = 1$
- 1. Potenz: $x = x^1$
- 2. Potenz: $x \cdot x = x^2$
- 3. Potenz: $x \cdot x \cdot x = x^3$
- n. Potenz: $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n} = x^n$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

n nennt man **Exponent** oder Hochzahl

Übersicht

Potenzfunktionen

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen
Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$ $= a$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1$ $= a \cdot x$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2$
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3$
- n. Grades: $f(x) = a \cdot x^n$

Potenzfunktionen

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen
Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1 + b$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- n. Grades: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$

Potenzfunktionen

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen
Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

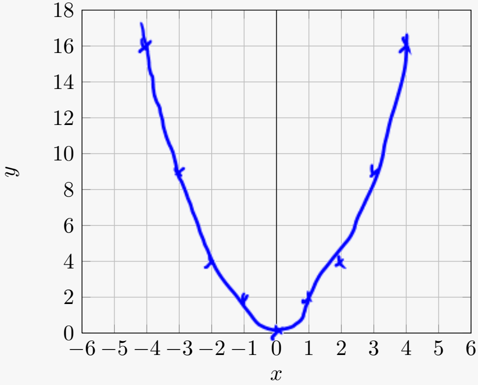
- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1 + b$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Quadratische Gleichung
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- n. Grades: $f(x) = a_n \cdot x^n$

Normalparabel

Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

$$f(x) = y = x^2$$

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

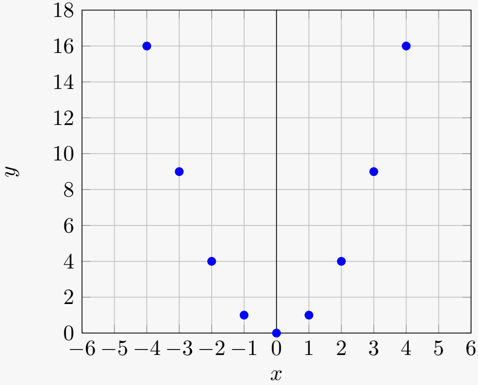


Normalparabel

Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

$$f(x) = y = x^2$$

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

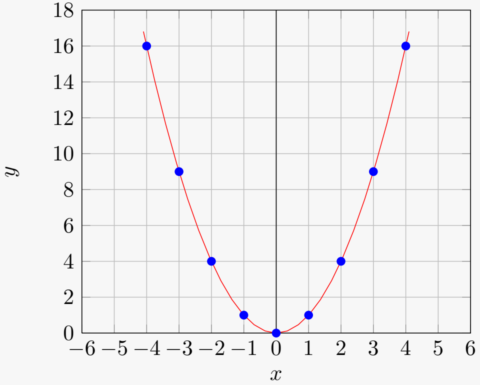


Normalparabel

Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

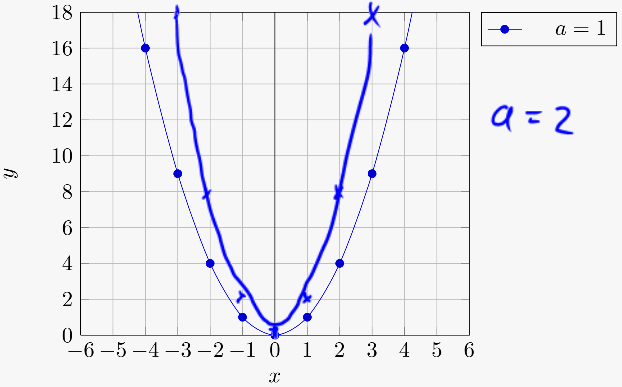
$$f(x) = y = x^2$$

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung

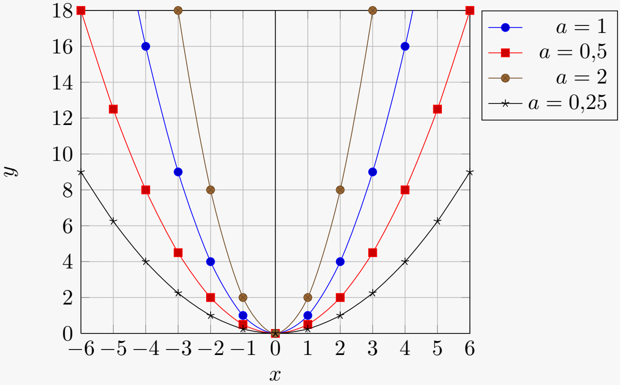
$$f(x) = a \cdot x^2$$



- $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = x^2 \rightarrow$ nur positive Werte
- $f(-x) = f(x) \rightarrow$ symmetrisch zur y-Achse
- $f(0) = 0 \rightarrow$ Scheitelpunkt im Ursprung

Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung

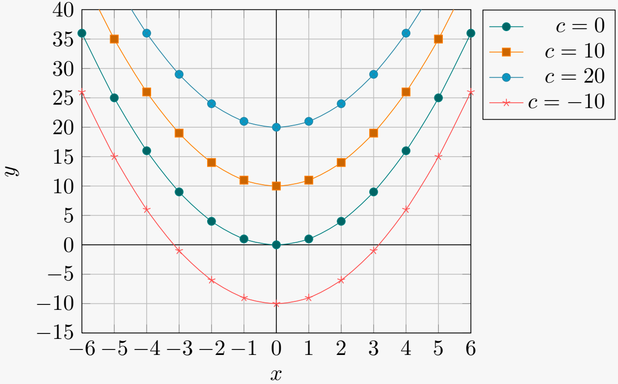
$$f(x) = a \cdot x^2$$



- $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = x^2 \rightarrow$ nur positive Werte
- $f(-x) = f(x) \rightarrow$ symmetrisch zur y-Achse
- $f(0) = 0 \rightarrow$ Scheitelpunkt im Ursprung

$$f(x) = x^2 + c$$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt bei $y_s = c$

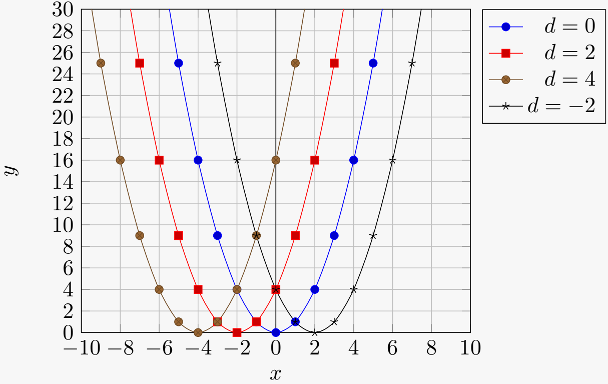


Verschieben in x-Richtung

$$f(x) = (x + d)^2$$

1. Binomische Formel: $(x + d)^2 = x^2 + 2d \cdot x + d^2$

Scheitelpunkt bei $x_s = -d$



Parabeln allgemein

Quadratische Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Wie finde ich den Scheitelpunkt S?

$$\begin{aligned} f(x) = y &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ y &= a \cdot x^2 - 2a \cdot x_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s \end{aligned}$$

Parabeln allgemein

Quadratische Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Wie finde ich den Scheitelpunkt S?

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a \cdot x^2 - 2a \cdot x_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s$$

Koeffizientenvergleich:

$b = -2a \cdot x_s \quad \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a}$

$c = a \cdot x_s^2 + y_s \quad \Rightarrow y_s = c - a \cdot x_s^2 = c - \frac{b^2}{4a}$

Scheitelpunktsform

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Meistens ist aber gegeben: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Quadratische Ergänzung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + 0\right) + c$$

$$f(x) = a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \underbrace{- \frac{b^2}{4a} + c}$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} \qquad y_s = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Quadratische Ergänzung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Ausklammern des Leitkoeffizienten

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x\right) + c$$

Quadratische Ergänzung

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x \underbrace{+ \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=0}\right) + c$$

Binomische Formel *rückwärts*

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Beispiel Quadratische Ergänzung

$a = 1$
$b = -4$
$c = 3$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f(x) = x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 3$$
$$= x^2 - 4x + (-2)^2 - 4 + 3$$
$$= (x-2)^2 - 1$$

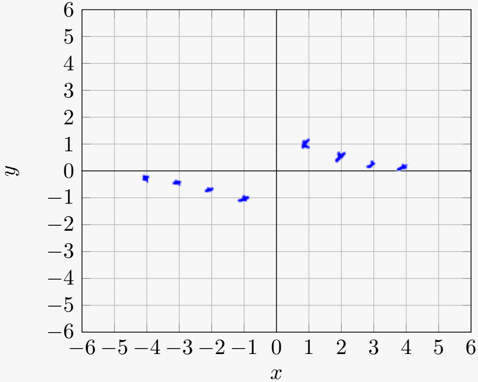
$x_S = 2$
$y_S = -1$

Negativen Potenz → Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$ $= \frac{1}{x}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0.25
-3	-0.33
-2	-0.5
-1	-1
0	
1	1
2	0.5
3	0.33
4	0.25



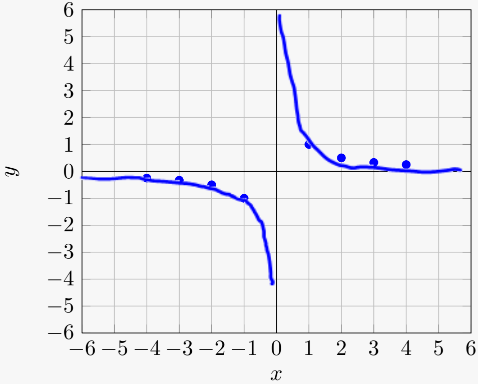
Funktionen mit negativen Potenzen

Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25



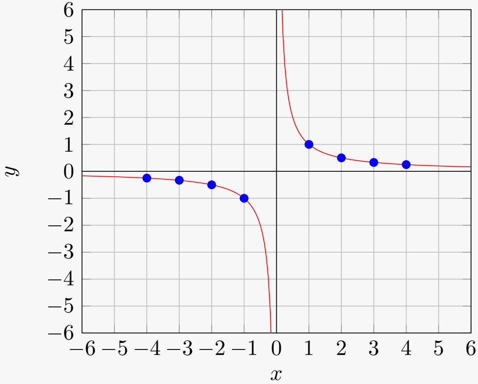
Funktionen mit negativen Potenzen

Negativen Potenz → Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25

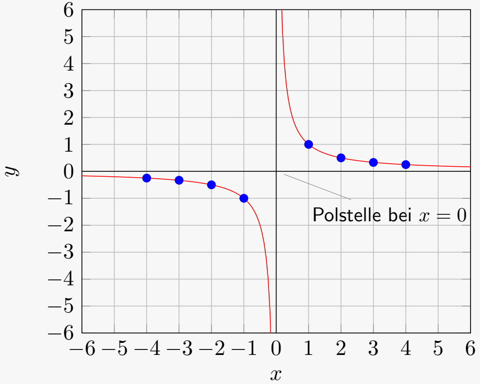


Negativen Potenz → Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25

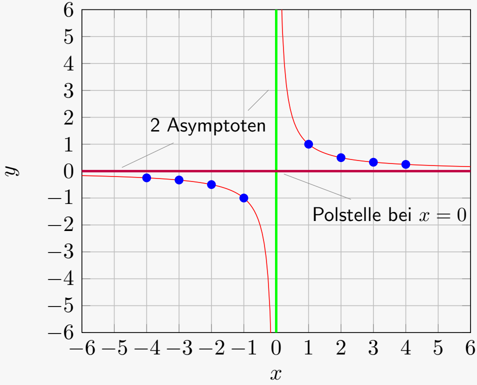


Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

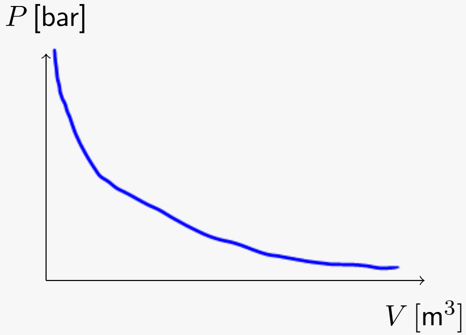
x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25



Beispiel Hyperbel

Gesetz von Boyle-Mariotte Gilt für abgeschlossene Gasmenge bei konstanter Temperatur T mit Volumen V und Druck P

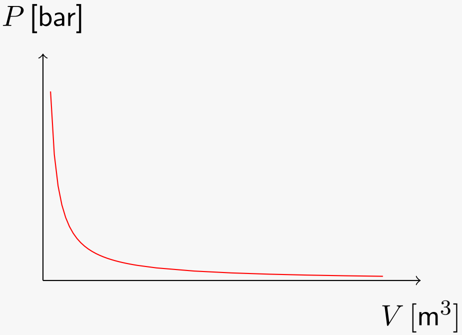
$$P \propto V^{-1} \text{ oder } P = c/V \text{ mit Konstante } c$$



Beispiel Hyperbel

Gesetz von Boyle-Mariotte Gilt für abgeschlossene Gasmenge bei konstanter Temperatur T mit Volumen V und Druck P

$$P \propto V^{-1} \text{ oder } P = c/V \text{ mit Konstante } c$$



Umkehrfunktionen

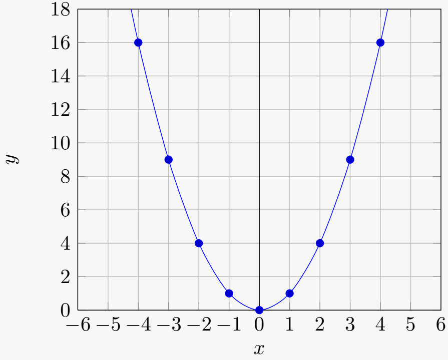
Gegeben: $y = f(x)$
Gesucht: Funktion, die zu jedem y-Wert den zugehörigen x-Wert liefert
Definition: Diese Funktion heißt Umkrehfunktion f^{-1}: $x = f^{-1}(y)$

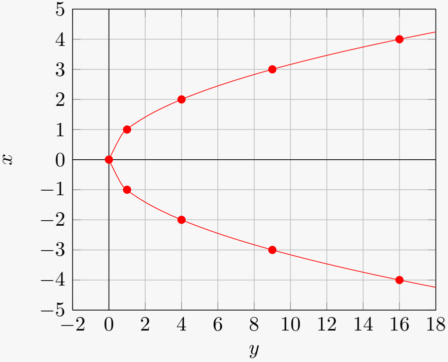
x	$f(x) = y = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

$\longrightarrow$

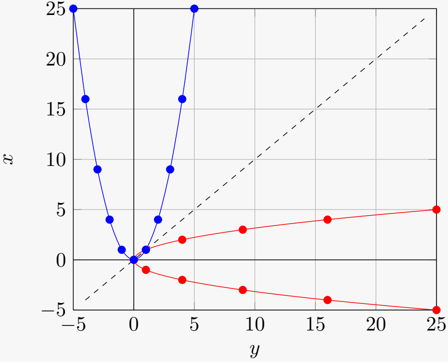
y	$x = f^{-1}(y)$
16	-4
9	-3
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

Graphische Folgen



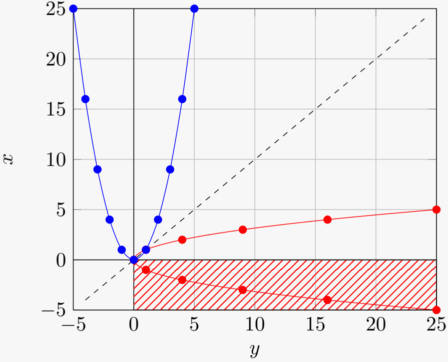


Normalparabel und Umkehrung



Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

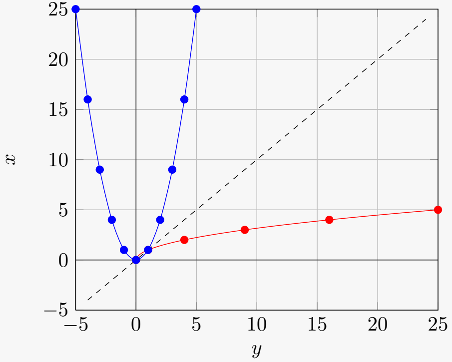
Normalparabel und Umkehrung



Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

Funktion muss jedem x-Wert **eindeutig** einen Funktionswert y zuordnen

Normalparabel und Umkehrung



Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

Funktion muss jedem x-Wert **eindeutig** einen Funktionswert y zuordnen

Wurzel

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$

Umkehrfunktion zu einfachen Potenzen: $f(x) = x^m$

Rechenregeln wie bei Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

Wurzeln

Wurzel

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Umkehrfunktion zu einfachen Potenzen: $f(x) = x^m$

Rechenregeln wie bei Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

Beispiele: Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = (5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$

$$\left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot (2^{\frac{1}{2}})^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} = a^2$$

Beispiele: Rechnen mit Wurzeln

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$

$$\left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$$

Nullstelle: $f(x) = y = 0$

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad / : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + px + q = 0 \qquad p = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{a}$$

p-q-Formel $\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Nullstellen einer Quadratischen Gleichung

Nullstelle: $f(x) = y = 0$

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Normierte Form: Teilen durch a

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Mit $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Lösung mit p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Gegeben

- Höhe des Hügels $h_0 = 200\,\mathrm{m}$
- Startgeschwindigkeit in vertikaler Richtung $v_0 = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{mit } g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \simeq 10\frac{m}{s^2}$$

Wie lange fliegt die Kugel?

$$h(t) = 0 = h_0 + v_0 t - g\frac{t^2}{2} \quad \Big| \frac{2}{-g}$$

$$0 = \underbrace{\frac{-2}{g}h_0}_{q} - \underbrace{\frac{2}{g}v_0 \cdot t}_{p} + t^2$$

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}$$

$$\frac{200\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{400\,s^2 + \frac{400\,m}{10\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$= 20\frac{1}{\frac{1}{s}} \pm \sqrt{400\,s^2 + 40\,s^2} \simeq 20\,s \pm 21\,s \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 41\,s \\ t_2 = -1\,s \end{array}$$

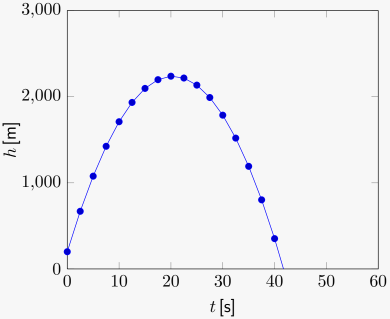
Beispiel: Kanone auf Hügel

Gegeben

- Höhe des Hügels $h_0 = 200\,\mathrm{m}$
- Startgeschwindigkeit in vertikaler Richtung $v_0 = 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{mit } g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

Wie lange fliegt die Kugel?



$$h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot \frac{v_0}{g} \cdot t - 2 \cdot \frac{h_0}{g} = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2 \cdot \frac{h_0}{g}}$$

$$t_{1/2} = (20{,}4\,\mathrm{s} \pm 21{,}4\,\mathrm{s})$$

$t_1 = 41.8\,s$ $t_2 = -1\,s$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c \qquad / -c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

$$y - c = a x^{\frac{n}{m}} \qquad /:a$$

$$\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}} \qquad /(\ )^{m}$$

$$\left(\frac{y-c}{a}\right)^{m} = x^{n} \qquad /\sqrt[n]{\cdots} = (\ )^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $\quad y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $\quad y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\quad \frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $\quad y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\quad \frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
3. Potenzieren mit m: $\quad \left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
3. Potenzieren mit m: $\left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$
4. Ziehen der $n$ten Wurzel: $\sqrt[n]{\left(\frac{y-c}{a}\right)^m} = \left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$

Termumformungen

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen **(Umkehroperationen)** auf beiden Seiten:

1. Subtraktion von c: $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
2. Division durch a: $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
3. Potenzieren mit m: $\left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$
4. Ziehen der $n$ten Wurzel: $\sqrt[n]{\left(\frac{y-c}{a}\right)^m} = \left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$

Beispiel: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$t(s)$

$$s(t) = 0{,}5 \cdot a \cdot t^2 \qquad | \cdot 2$$

$$2s = at^2 \qquad | :a$$

$$\frac{2s}{a} = t^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\sqrt{\frac{2s}{a}} = t$$

Beispiel: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$s(t) = 0{,}5 \cdot a \cdot t^2$$

Multiplikation mit 2:

$$2 \cdot s = a \cdot t^2$$

Division mit a:

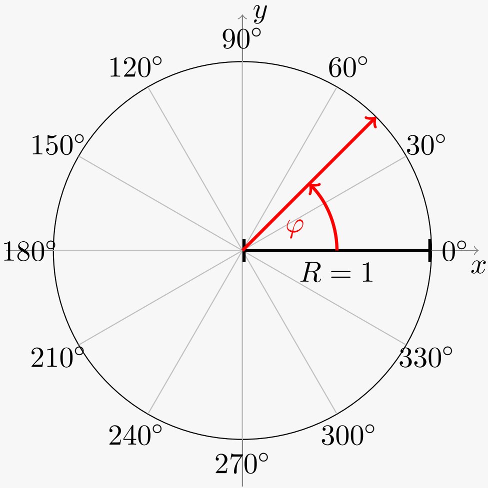
$$2 \cdot \frac{s}{a} = t^2$$

Ziehen der Quadratwurzel:

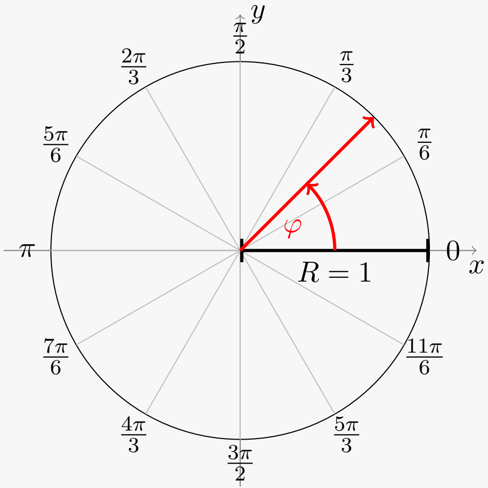
$$t(s) = \sqrt{2 \cdot \frac{s}{a}}$$

Übersicht

Einheitskreis



- Kreis mit Radius $R = 1$
- Winkel gegen den Uhrzeigersinn definiert (Rechtsdrehung)
- Eine Umdrehung: $360°$
- Kreisumfang: $U = 2\pi R$



- Kreis mit Radius $R = 1$
- Winkel gegen den Uhrzeigersinn definiert (Rechtsdrehung)
- Eine Umdrehung: $360°$
- Kreisumfang: $U = 2\pi R$
- $\rightarrow 360° = 2\pi\,\mathrm{rad} = 2\pi$
- rad=Radiant=Bogenmaß
- Einheit „rad“ wird weggelassen

Umrechnung Grad $\leftrightarrow$ Bogenmaß

- α: Winkel in Grad
- φ: Winkel im Bogenmaß

Es gilt:

$$360^\circ \mathrel{\widehat{=}} 2\pi$$

Für den gleichen Winkel $\alpha = \varphi$ folgt also:

$$\alpha = \varphi$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi} \qquad | \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot 360^\circ = \varphi \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \varphi$$

Umrechnung Grad $\leftrightarrow$ Bogenmaß

- α: Winkel in Grad
- φ: Winkel im Bogenmaß

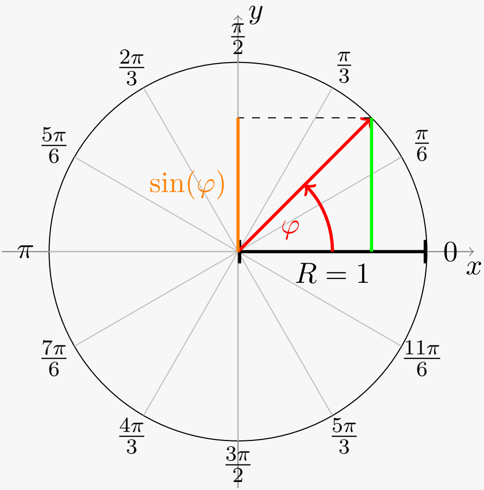
Es gilt:

$$360^\circ \mathrel{\widehat{=}} 2\pi$$

Für den gleichen Winkel $\alpha = \varphi$ folgt also:

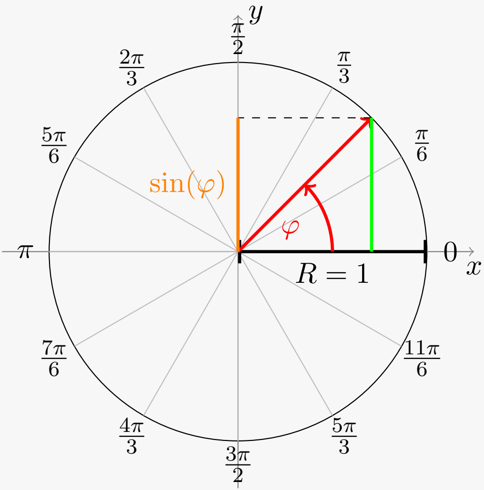
$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi \\ \frac{\alpha}{360^\circ} &= \frac{\varphi}{2\pi} \\ \alpha &= \frac{\varphi}{2\pi} 360^\circ = \varphi \frac{180^\circ}{\pi} \\ \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi = \alpha \frac{\pi}{180^\circ} &= \varphi \end{aligned}$$

Sinus-Funktion



- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- Gegenkathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

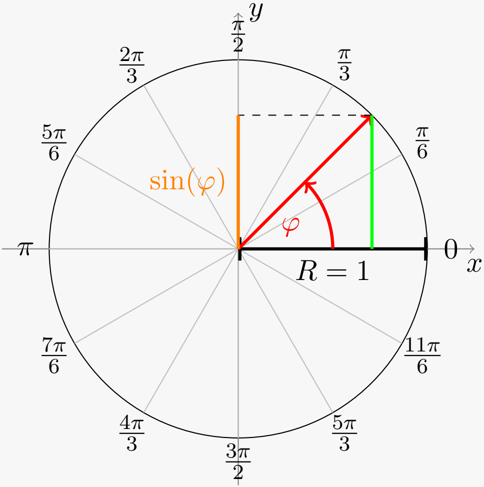


- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- Gegenkathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(0) = 0$$
$$\sin(\pi/2) = 1$$
$$\sin(\pi) = 0$$
$$\sin(3\pi/2) = -1$$

Sinus-Funktion

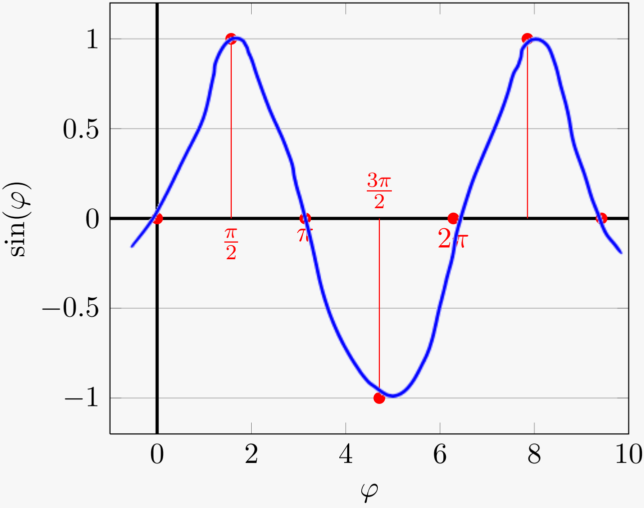


- $\sin(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die y-Achse
- Gegenkathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

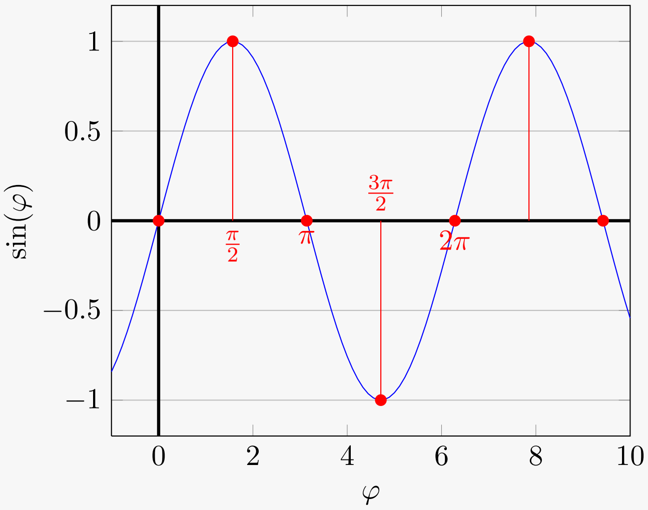
$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(0) = 0$$
$$\sin(\pi/2) = 1$$
$$\sin(\pi) = 0$$
$$\sin(3\pi/2) = -1$$

Graphen von Sinus



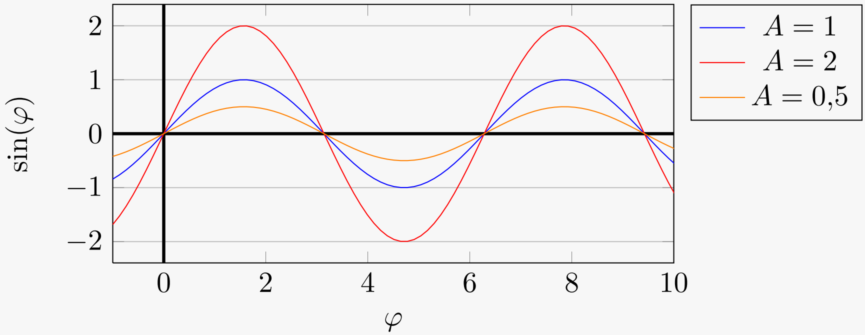
Graphen von Sinus



Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

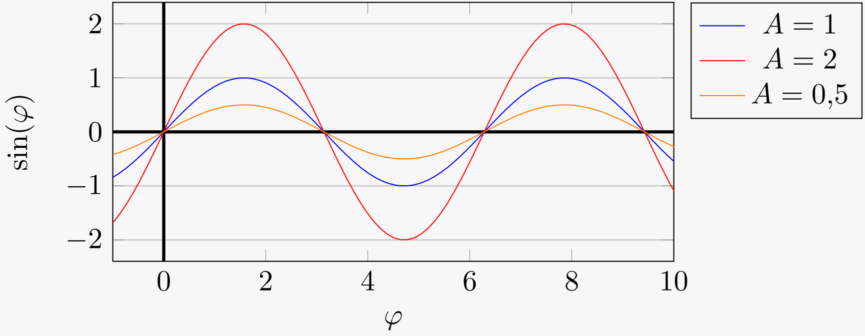
$\varphi_0 = 0 \quad c = 1 \quad \Rightarrow A \cdot \sin(\varphi)$



Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Amplitude: Höhe der Kurve
Entspricht Radius bzw. Hypotenuse

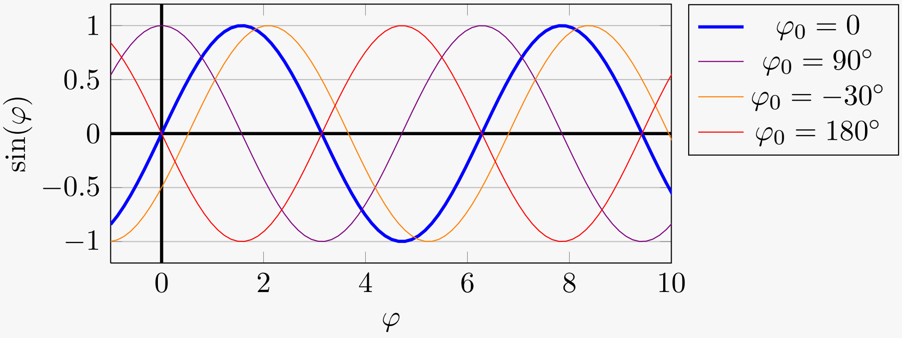


Sinus-Funktion mit Parametern - Phase

Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

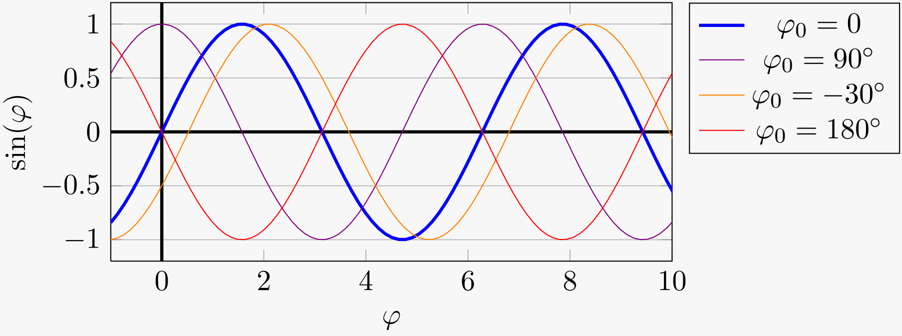
$A = 1 \quad c = 1 \quad \rightarrow \quad \sin(\varphi + \varphi_0)$



Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

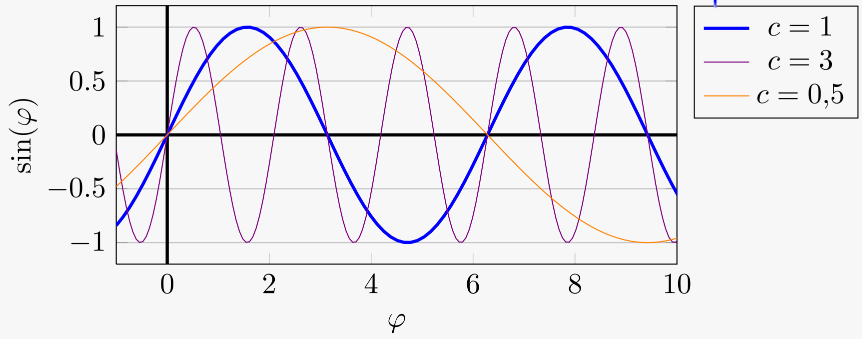
Phase: Verschiebung entlang x-Achse



Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

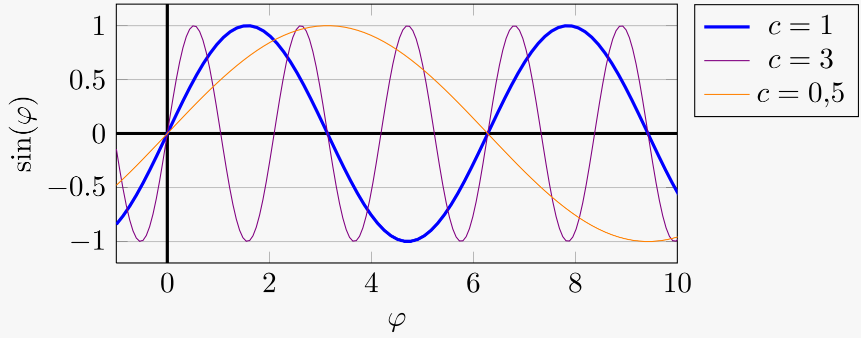
$A = 1 \quad \varphi = 0 \Rightarrow \sin(c \cdot \varphi)$



Allgemeine Sinus-Funktion

$$f(\varphi) = A \cdot \sin(c \cdot \varphi + \varphi_0)$$

Periode P: Abstand zwischen zwei gleichen Kurvenpunkten, z.B. Maxima



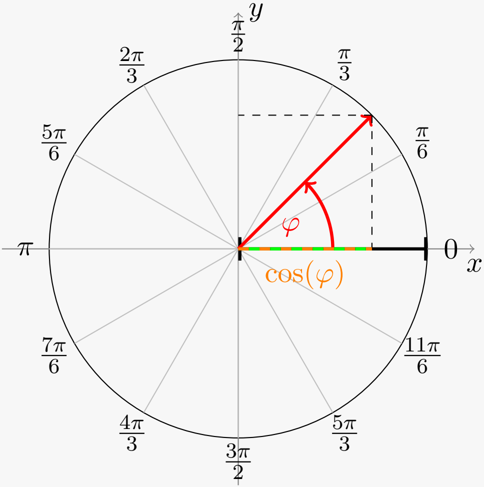
Periode

- Normaler Sinus hat die Periode $P = 2\pi$
- Allgemeine Sinus-Funktion mit Periode P:

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{P}\varphi + \varphi_0\right)$$

- Also $c = \frac{2\pi}{P}$ bzw.:

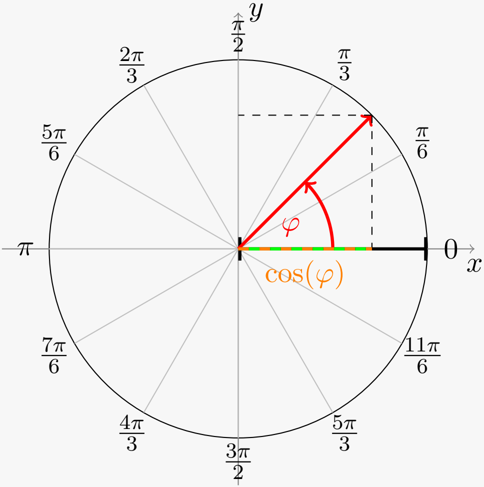
$$\boxed{P = \frac{2\pi}{c}}$$



- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- Ankathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

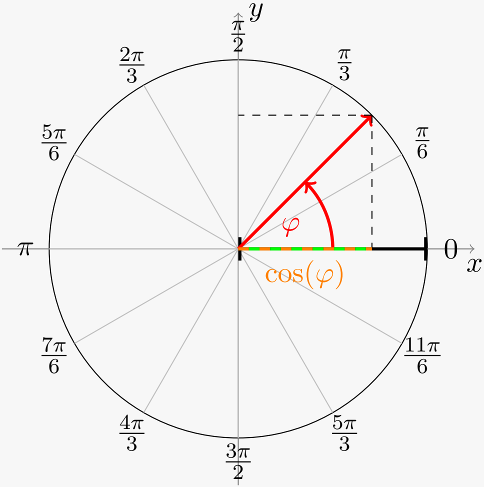
Cosinus-Funktion



- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- Ankathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1 \\ \cos(\pi/2) &= 0 \\ \cos(\pi) &= -1 \\ \cos(3\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

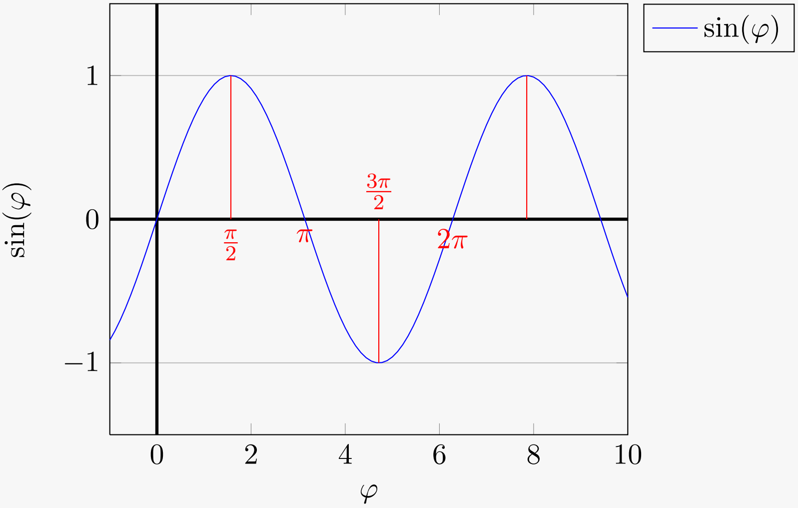


- $\cos(\varphi)$: Projektion des Einheitsvektors auf die x-Achse
- Ankathete des Dreiecks aus Einheitsvektor und x-Achse
- In beliebigem **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

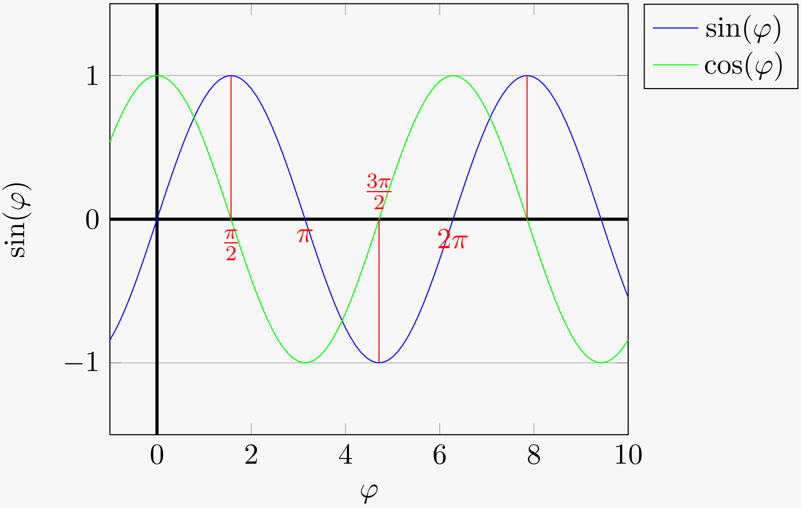
$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

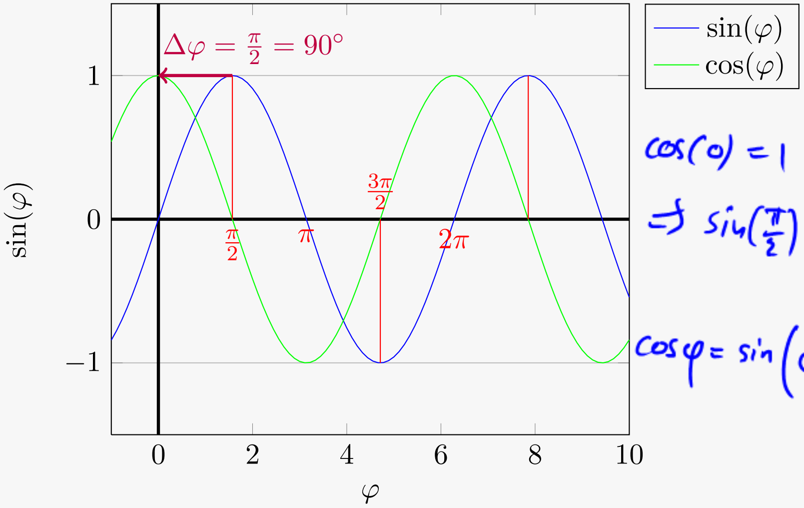
$$\cos(0) = 1$$
$$\cos(\pi/2) = 0$$
$$\cos(\pi) = -1$$
$$\cos(3\pi/2) = 0$$

Graphen von Sinus und Cosinus



Graphen von Sinus und Cosinus



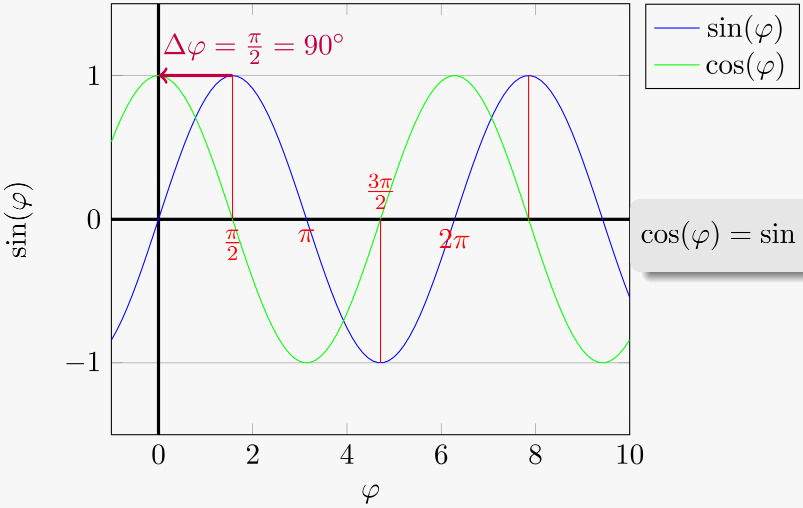


$\cos(0) = 1$

$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2})$

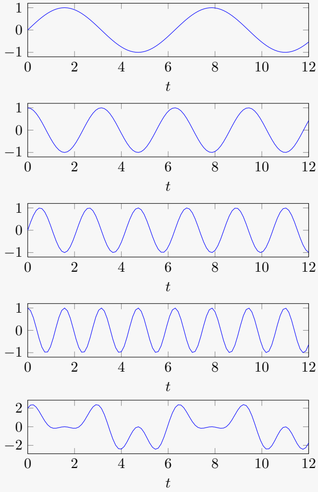
$\cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

Graphen von Sinus und Cosinus



$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Überlagerung von harmonischen Schwingungen

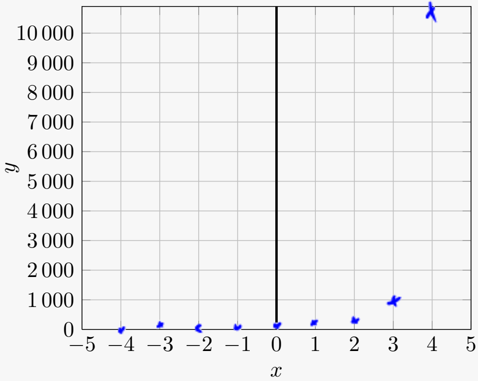


Übersicht

- Variabler Exponent $f(x) = y = B^x$
- B nennt man Basis

Beispiel: $B = 10$

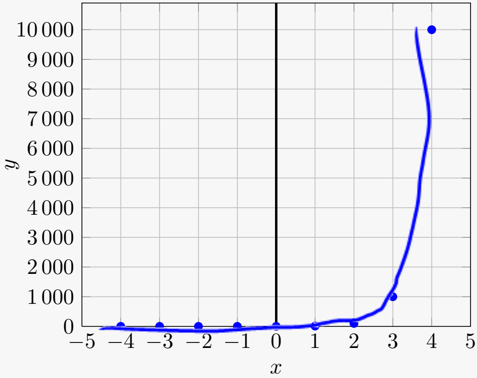
x	$f(x) = 10^x$
-4	0.0001
-3	0.001
-2	0.01
-1	0.1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000



- Variabler Exponent $f(x) = y = B^x$
- B nennt man Basis

Beispiel: $B = 10$

x	$f(x) = 10^x$
-4	0,0001
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000

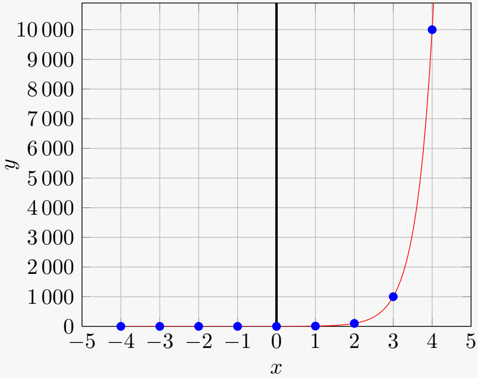


Exponentialfunktionen

- Variabler Exponent $f(x) = y = B^x$
- B nennt man Basis
- Extrem schnelles Wachstum! **Exponentielles Wachstum**

Beispiel: $B = 10$

x	$f(x) = 10^x$
-4	0,0001
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000



Größenordnungen

Potenz	Name	Zeichen	Potenz	Name	Zeichen
10^{24}	Yotta	Y	10^{-1}	Dezi	d
10^{21}	Zetta	Z	10^{-2}	Zenti	c
10^{18}	Exa	E	10^{-3}	Milli	m
10^{15}	Peta	P	10^{-6}	Mikro	µ
10^{12}	Tera	T	10^{-9}	Nano	n
10^{9}	Giga	G	10^{-12}	Piko	p
10^{6}	Mega	M	10^{-15}	Femto	f
10^{3}	Kilo	k	10^{-18}	Atto	a
10^{2}	Hekto	h	10^{-21}	Zepto	z
10^{1}	Deka	da	10^{-24}	Yocto	y

Beispiele Größenordnungen – Längen

- Weltall 10^{26} m
- Galaxis 10^{20} m
- Sonnensystem 10^{14} m
- Erde 10^{7} m
- Mensch 10^{0} m
- DNA 10^{-7} m
- Atom 10^{-10} m
- Atomkern 10^{-14} m
- Proton 10^{-15} m

Weltall, Galaxis, Sonnensystem: Astronomie, Astrophysik

Mensch, DNA: Biologie, Biophysik, Medizin

Atom, Atomkern, Proton: Atom- und Kernphysik

Erde bis Atom: Chemie

http://htwins.net/scale2/index.html
http://www.youtube.com/watch?v=0fKBhvDjuy0

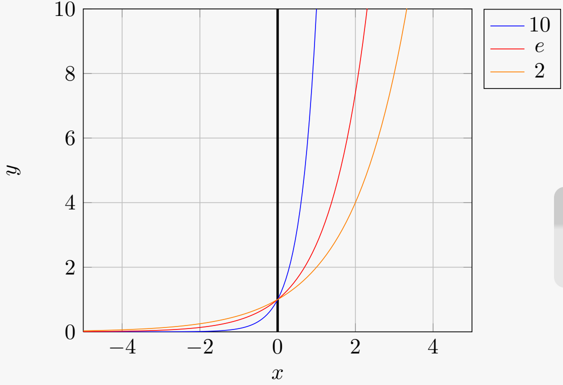
Beispiele Größenordnungen – Zeiten

Lebensdauer des Higgs-Bosons	10^{-22} s
Schwingungsperiode von sichtbarem Licht	10^{-15} s
Laufzeit des Lichts durch das Auge (3 cm)	10^{-10} s
Taktzeit eines Pentiumprozessors	10^{-9} s
Blitz beim Fotoapparat	10^{-5} s
Nervenleitung (1 m)	10^{-2} s
Kürzeste Reaktionszeit	$2 \cdot 10^{-1}$ s
Konzentrationszeit	$5 \cdot 10^{3}$ s
Studiendauer	$1{,}6 \cdot 10^{8}$ s
Lebensdauer eines Menschen	$3 \cdot 10^{9}$ s
Unsere Milchstraße	$3 \cdot 10^{17}$ s
Alter des Universums (15 Mrd Jahre)	$5 \cdot 10^{17}$ s
Mittlere Lebensdauer eines Protons	$> 5 \cdot 10^{32}$ s

Beispiele Größenordnungen – Gewicht

Elektron	10^{-30} kg
Proton	10^{-27} kg
Aminosäure	10^{-25} kg
Hämoglobin	10^{-22} kg
Virus	10^{-20} kg
Salzkorn	10^{-8} kg
Menschliches Haar	10^{-6} kg
DIN A6 Blatt	10^{-3} kg
Mensch	10^{2} kg
Großer LKW	10^{4} kg
Pyramide	10^{10} kg
Sonne	10^{24} kg

Exponentialfunktion mit verschiedener Basis



- x-Achse ist Asymptote
- Schneidet immer bei $y = 1$

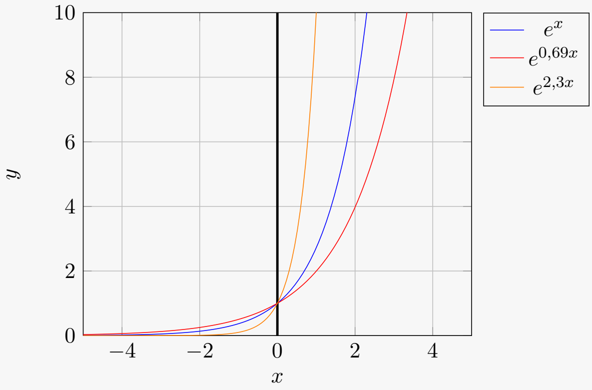
Eulersche Zahl

$$e \sim 2{,}718$$

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

$$\left(B^b\right)^{(x-x_0)}$$



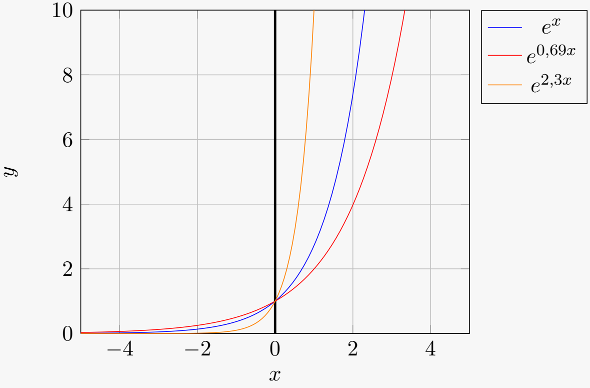
- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e
- $e^x = \exp(x)$

Exponentialfunktion allgemein

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$

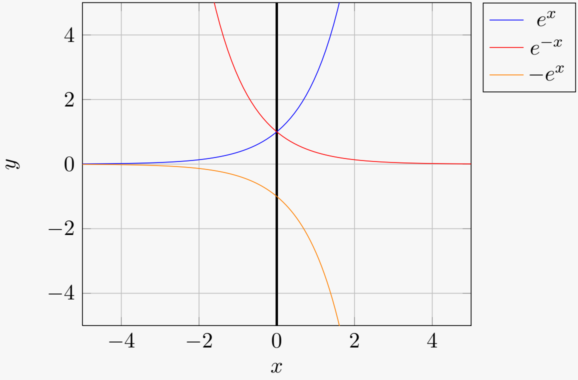


- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e
- $e^x = \exp(x)$

Abfallende Exponentialfunktion

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

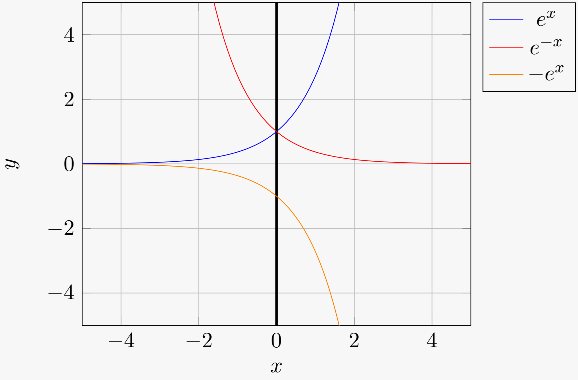


Abfallende Exponentialfunktion

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Negative b: **exponentiell fallend** $(e^{-x} = 1/e^{x})$



Übersicht Exponentialfunktionen

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

- Faktor b im Exponenten $\rightarrow$ wirkt wie andere Basis
- Negative b $\rightarrow$ **exponentiell fallend**
- Verschiebung entlang der x-Achse :x_0
- Verschiebung entlang der y-Achse :c

Beispiele: Exponentielles Wachstum

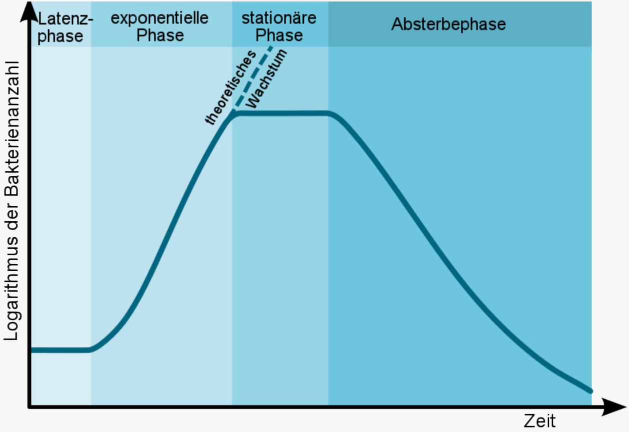
- Vermehrung von Bakterien
- Findet durch Zellteilung statt
- Im Mittel feste Periode

Beispiel: Generationszeit von $T_G = 10$ Minuten

Teilungen	**Bakterien**	**Zeit**
0	1	0
1	2	10
2	4	20
3	8	30
4	16	40
⋮	⋮	⋮
12	8096	120

$$B(t) = B_0 \cdot 2^{t/T_G}$$

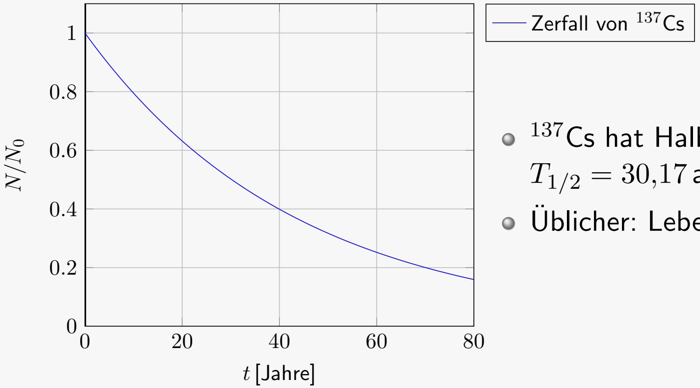
Ideale Wachstumskurve einer statischen Bakterienkultur



Quelle http://de.wikipedia.org/wiki/Bakterielles_Wachstum

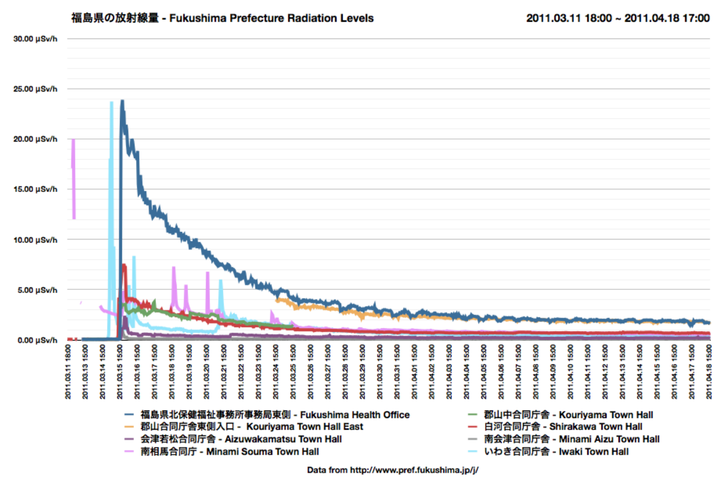
Beispiel: Radioaktiver Zerfall von Cäsium

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



- ^{137}Cs hat Halbwertszeit $T_{1/2} = 30{,}17\,\mathrm{a}$
- Üblicher: Lebensdauer τ

Radioaktiver Zerfall – Strahlenbelastung

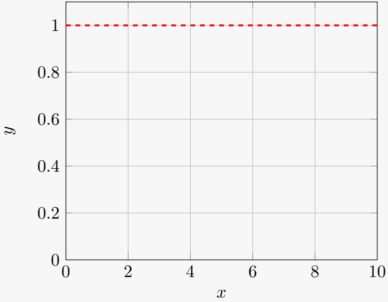


Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fukushima_I_radiation,_Fukushima_Prefecture_2,_March-April_2011.png

Sättigungsfunktion

- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasand ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle
- Beispiel: Laden einen Kondensators, ...

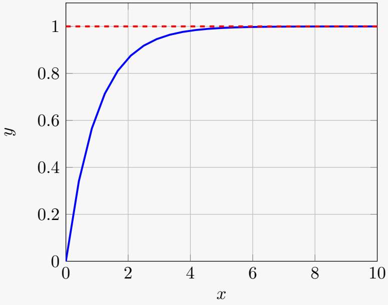
$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



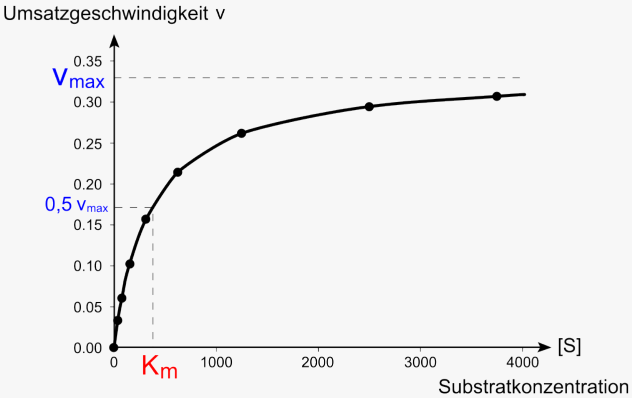
Sättigungsfunktion

- Viele Prozesse laufen zunächst sehr rasand ab, stoßen dann aber an eine Grenze/Schwelle
- Beispiel: Laden einen Kondensators, ...

$$f(x) = y = y_s(1 - e^{-x})$$



Sättigung der enzymatischen Reaktion



Quelle http://de.wikipedia.org/wiki/Michaelis-Menten-Theorie

Übersicht

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$

$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Logarithmus zur Basis 10

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

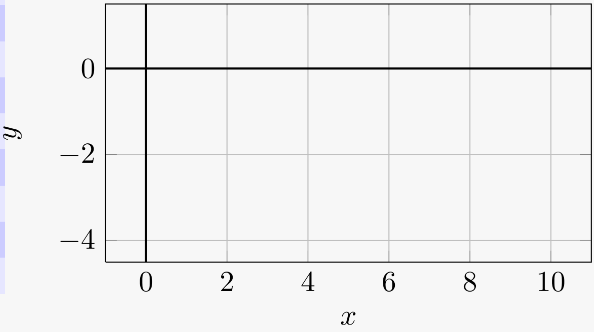
$f(x) = 10^x$	x
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

$$x = \log_{10}(10000)$$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

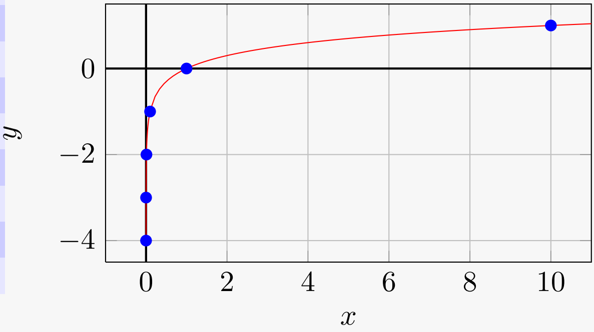


Wie oft muss man 10 mit sich selbst multiplizieren, um z.B. 10000 zu erhalten?

$$10^x = 10000$$
$$x = 4$$

x	$f(x) = \log_{10} x$
0,0001	-4
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4

$$x = \log_{10}(10000)$$



Logarithmus

$$10^x = 10000$$
$$x = \log_{10}(10000) = 4$$

- $x = 4$: Anzahl der Nullen
- $\log_{10}$ steht für Logarithmus zur Basis 10
- Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit gleicher Basis
- Wächst extrem langsam

Logarithmus allgemein

Gegeben

$$b = a^x \qquad \text{mit } a > 0$$

Lösung: **Logarithmus von** b **zur Basis** a

$$x = \log_a b$$

Logarithmus allgemein

Gegeben

$$b = a^x \qquad \text{mit } a > 0$$

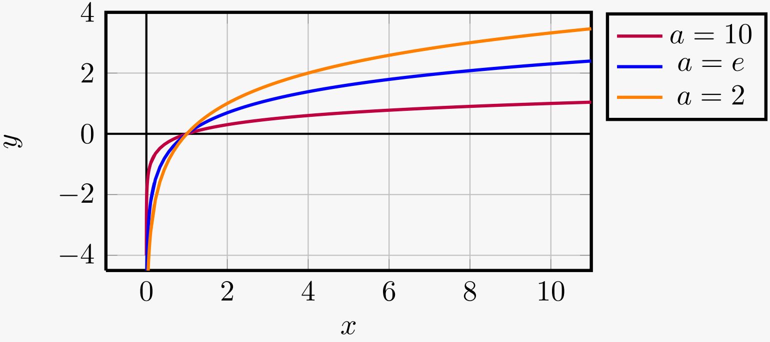
Lösung: **Logarithmus von b zur Basis a**

$$x = \log_a b$$

Besondere Basen:

10: $\log_{10} b = \lg b$ $\qquad$ e: $\boxed{\log_e b = \ln b}$

Logarithmus mit unterschiedlicher Basis



- y-Achse ist Asymptote
- Schneidet x-Achse bei $x = 1$

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

Rechnen mit Logarithmen – Multiplikation

Am Beispiel mit der Basis 10

Es sei $A = 10^n$ und $B = 10^m$,

dann gilt $\lg(A) = n$ und $\lg(B) = m$

und $A = 10^{\lg(A)}$ und $B = 10^{\lg(B)}$

Multiplikation

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} \\ &= 10^{\lg(A)+\lg(B)} \\ \lg(A \cdot B) &= \lg(10^{\lg(A)+\lg(B)}) \\ &= \lg(A) + \lg(B) \end{aligned}$$

Rechnen mit Logarithmen

Multiplikation

$$\log_b(A \cdot B) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

Division

$$\log_b(A/B) = \log_b(A) - \log_b(B)$$

Potenz

$$\log_b(A^m) = m \cdot \log_b(A)$$

Wurzel

$$\log_b(\sqrt[m]{A}) = \log_b(A)/m$$

Beispiel

$$\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) =$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\log_2(10 \cdot x) - \log_2(40) &= \log_2(\frac{10 \cdot x}{40}) \\
&= \log_2(\frac{x}{4}) \\
&= \log_2(\frac{x}{2^2}) \\
&= \log_2(x \cdot 2^{-2}) \\
&= \log_2(x) + \log_2(2^{-2}) \\
&= \log_2(x) - 2
\end{aligned}$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln(A)}$$
$$10^{\lg(A)} = A = e^{\ln(A)}$$
$$\ln(10^{\lg(A)}) = \ln(A)$$
$$\lg(A)\ln(10) = \ln(A)$$

Basistransformation

$\lg(A)$ sei bekannt. Es gilt

$$A = 10^{\lg(A)}$$

Wie erhält man den Logarithmus zu einer anderen Basis, z.B. $\ln(A)$?

$$A = e^{\ln(A)}$$

$$10^{\lg(A)} = A = e^{\ln(A)}$$

$$\ln(10^{\lg(A)}) = \ln(A)$$

$$\lg(A)\ln(10) = \ln(A)$$

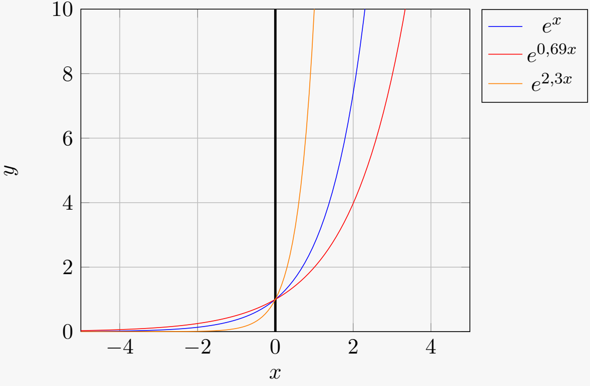
Allgemein

$$\log_b(x) = \log_b(g) \cdot \log_g(x)$$

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$

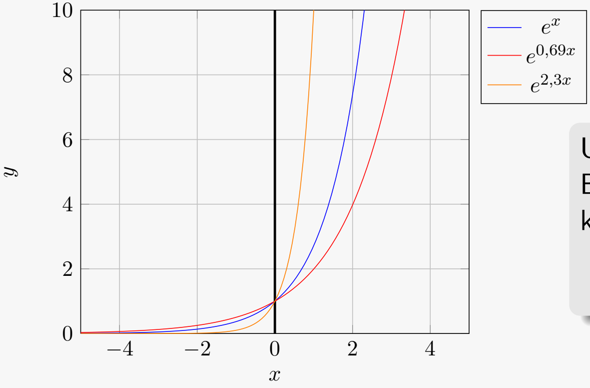


- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

Allgemein:

$$f(x) = y = a \cdot B^{b(x-x_0)} + c$$

Faktor b im Exponenten wirkt wie andere Basis, da $B^{b(x-x_o)} = (B^b)^{(x-x_0)}$



- Eine Basis ist genug
- Üblicherweise e

Um von einer beliebigen Basis B auf die Basis e zu kommen:

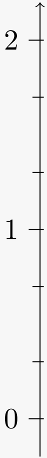
$$B^x = e^{\ln(B) \cdot x}$$

Logarithmisch geteilte Achsen

Z.B. für die y-Achse

- Trage jeden Messwert y an der Stelle $\lg(y)$ auf.

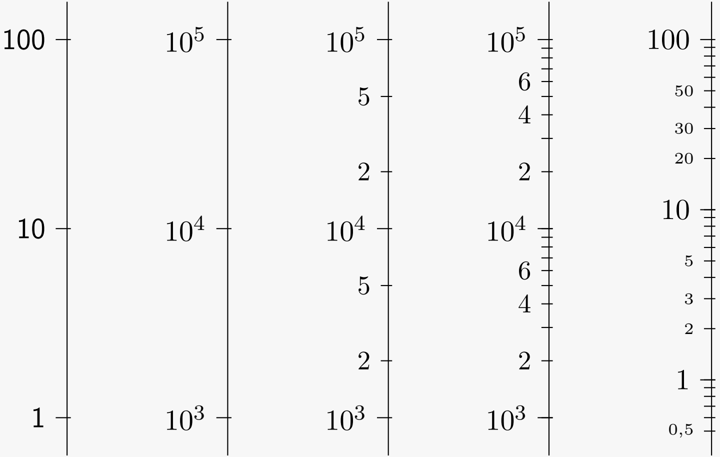
$$
\begin{aligned}
1 &\rightarrow \lg(1) = 0 \\
10 &\rightarrow \lg(10) = 1 \\
100 &\rightarrow \lg(100) = 2 \\
2 &\rightarrow \lg(2) \simeq 0{,}3 \\
5 &\rightarrow \lg(5) \simeq 0{,}7
\end{aligned}
$$



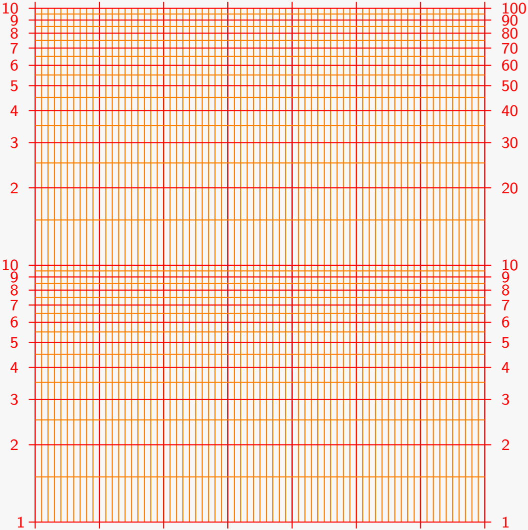
- $\lg(x)$ nur für positive x
- Darstellung nur für positive y-Werte möglich

Beschriftung logarithmisch geteilter Achsen

Verschiedene Beschriftungen möglich

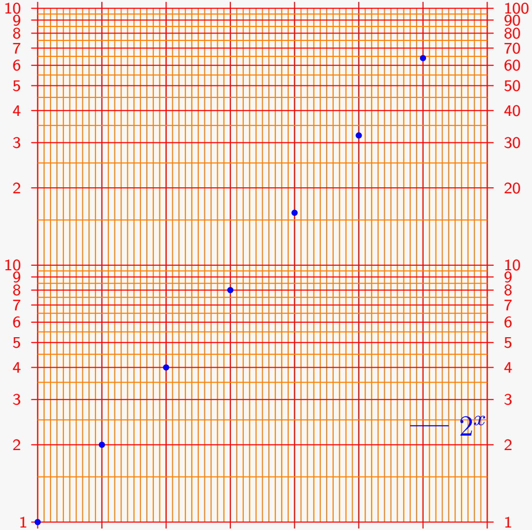


Einfach-logarithmisches Papier



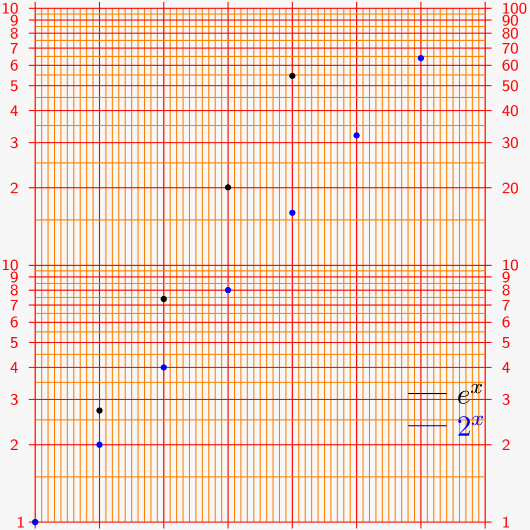
- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

Einfach-logarithmisches Papier



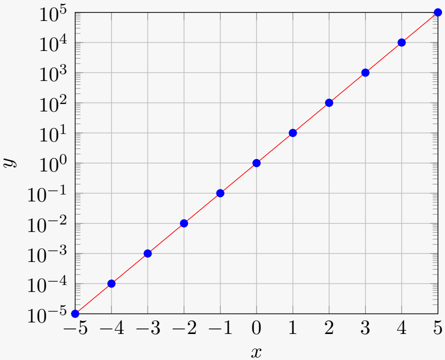
- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

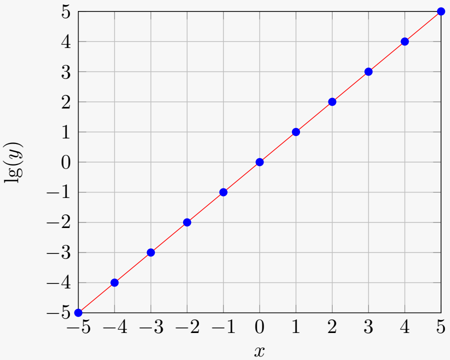
Einfach-logarithmisches Papier



- logarithmische Y-Achse
- Einsatz bei exponentiellen Zusammenhängen
- **Achtung:** Nie die Null unterschreiten

Logarithmische Graphen

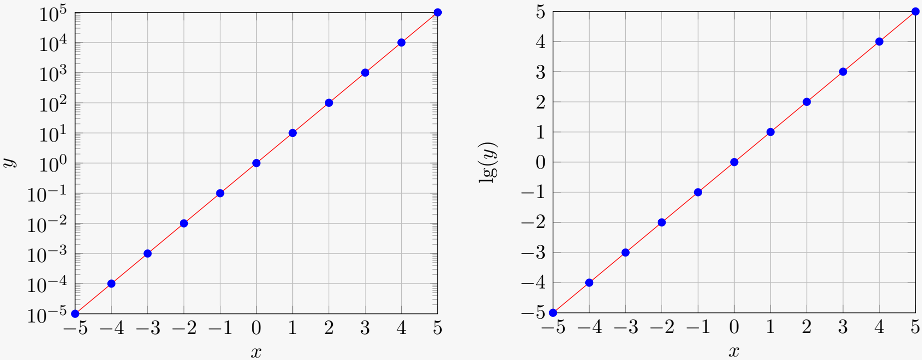




Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$

Steigung $= c$

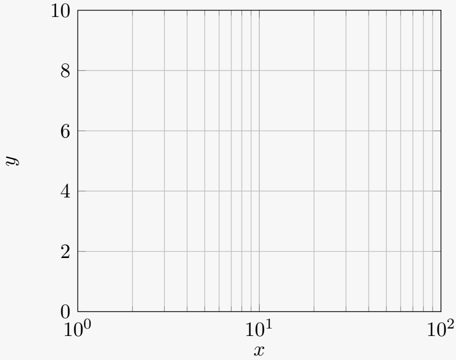


Beispiel 10^x: logarithmische Darstellung ergibt Gerade

$$y = 10^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x$$
$$y = B^{c \cdot x} \rightarrow \lg(y) = c \cdot x \cdot \lg(B)$$

Steigung $= c \cdot \lg(B)$

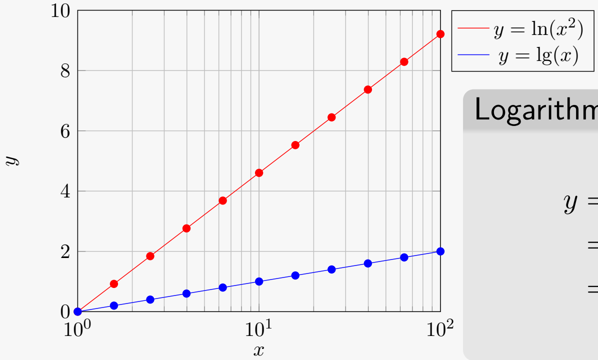
Logarithmische x-Achse



Logarithmische Zusammenhänge

$$
\begin{aligned}
y &= \log_b(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

Steigung: $n \log_b(10)$



Logarithmische Zusammenhänge

$$
\begin{aligned}
y &= \log_b(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot \lg(x^n) \\
&= \log_b(10) \cdot n \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

Steigung: $n \log_b(10)$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Doppelt logarithmisch geteilte Achsen

Potenzfunktion

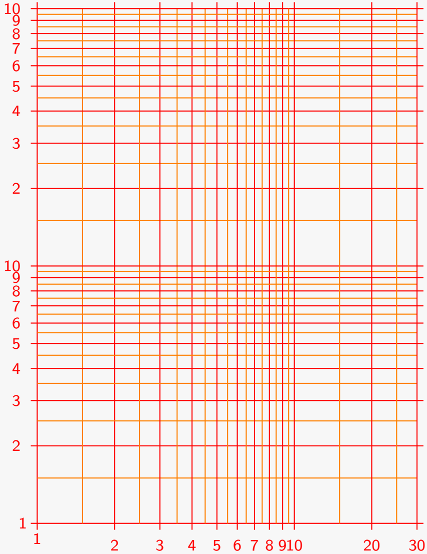
$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Analog zu linearer Funktion mit

- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



Potenzfunktion

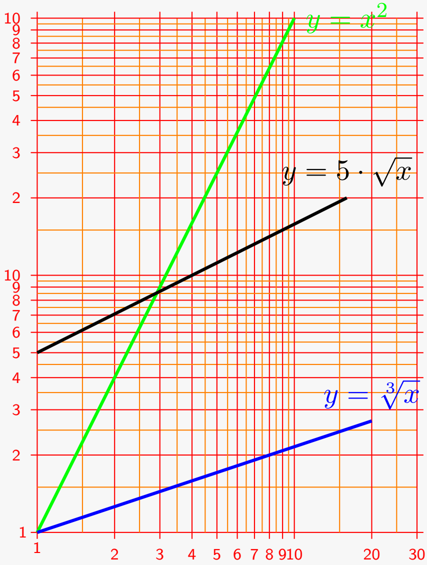
$$y = a \cdot x^n$$
$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

Analog zu linearer Funktion mit

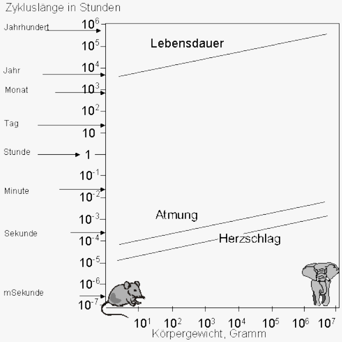
- Steigung n
- y-Achsenabschnitt $\lg(a)$

wenn man $\lg(y)$ gegen $\lg(x)$ aufträgt

Vorsicht bei der Interpretation: es sind nur positive Werte dargestellt: $\lg(x) = 0$ bei $x = 1$



- Messen und Vergleichen von Beziehungen zwischen der Körpergröße von Lebewesen und deren Verhältnis zu verschiedensten biologischen Größen



Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Allometrie

Klassische Allometrieformel

$$y = a \cdot x^b$$