

Physik für Biologen und Zahnmediziner

Propädeutikum 1: Grundlagen und Funktionen

Dr. Daniel Bick



Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

15. Oktober 2014

Aufteilung der Vorlesung

Propädeutikum (16. - 24. Okt.) Daniel Bick daniel.bick@desy.de

Physik Teil 1 Björn Wonsak bwonsak@mail.desy.de

Physik Teil 2 Georg Steinbrück georg.steinbrueck@desy.de

Folien zum Propädeutikum:

<http://www.desy.de/~daniel/vorlesung/ws2014>

Klausuren zum Praktikum (multiple choice):

- ① Mathematische Einführung (20 Fragen)
- ② Physik (30 Fragen) $\Leftarrow$ wichtiger!

Skript fürs Propädeutikum, Altklausuren, Übungen mit Lösungen:

<http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm/Zahnmedizin.html>

- Haas: „Physik für Pharmazeuten und Mediziner“, Wiss. Verlagsges., 7. Auflage (2012), 49,80 €
- Harten: „Physik für Mediziner“, Springer-Lehrbuch, 13. Auflage (2011), 29,95 €
Online lesbar im [Universitätsnetz](#) oder mit [Stabi Ausweis](#)
- Hellenthal: „Physik für Mediziner und Biologen“, Wiss. Verlagsges., 8. Auflage (2006), 29,80 €
- Trautwein, Kreibitz, Hüttermann: „Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten“, de Gruyter-V., 7. Auflage (2008), 29,95 €
- Tritthart: „Medizinische Physik und Biophysik“, Schattauer-V., 2. Auflage (2011), 39,95 €

Skript von Dr. Salehi:

<http://wwwiexp.desy.de/users/uwe.holm/Zahnmedizin.html>

Mathematische Hilfsmittel der Physik

- Funktionsbegriff
- Proportionalität und linearer Zusammenhang
- Funktionsgleichung einer Geraden, Graph
- Parabel
- Winkelfunktionen
- Exponentialfunktionen
- Logarithmusfunktionen

Physikalische Grundlagen

- Physikalische Begriffe und Größen
- Basisgrößen, Basiseinheiten, SI-System
- Abgeleitete Größen und Einheiten
- Vorsilben
- Messungen, Darstellung von Messergebnissen
- Messfehler
- Fehlerrechnung
- Vektoren
- Differentialquotient

- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 Potenzfunktionen

1 Einleitung

2 Mathematische Grundlagen

3 Lineare Funktionen

4 Potenzfunktionen



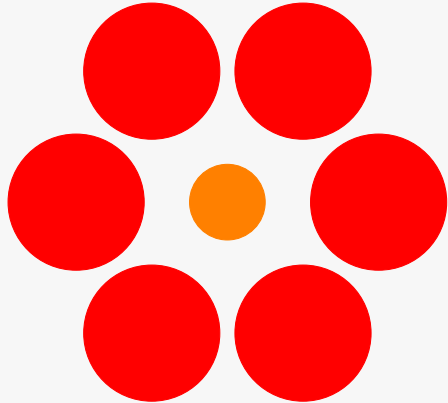
„Keine menschliche Forschung kann man **wahre Wissenschaft** heißen, wenn sie ihren Weg nicht durch die **mathematische Darlegung und Beweisführung** hin nimmt. Sagst du, die Wissenschaften, die vom Anfang bis zum Ende im Geist bleiben, hätten Wahrheit, so wird dies nicht zugestanden, sondern verneint aus vielen Gründen, und vornehmlich deshalb, weil bei solchem reingeistigen Abhandeln die Erfahrung (oder das **Experiment**) nicht vorkommt; ohne dies aber gibt sich kein Ding mit Sicherheit zu erkennen.“

Leonardo Da Vinci, 1452-1519



„**Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben**“
Galileo Galilei, 1564-1642

Welcher der beiden orangenen Kreise ist größer?



Welcher der beiden orangenen Kreise ist größer?

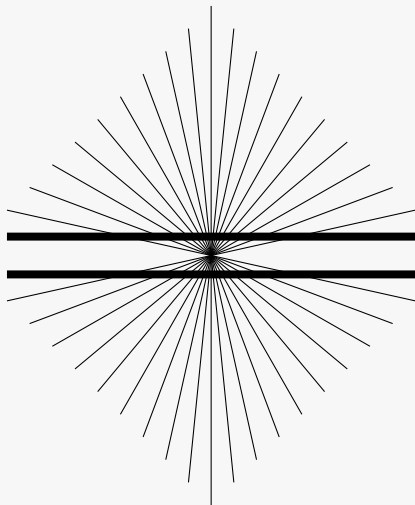


Beide sind gleich groß! Die Größe eines Objekts wird abhängig von seiner Umgebung wahrgenommen.

- Die beiden Linien sind parallel

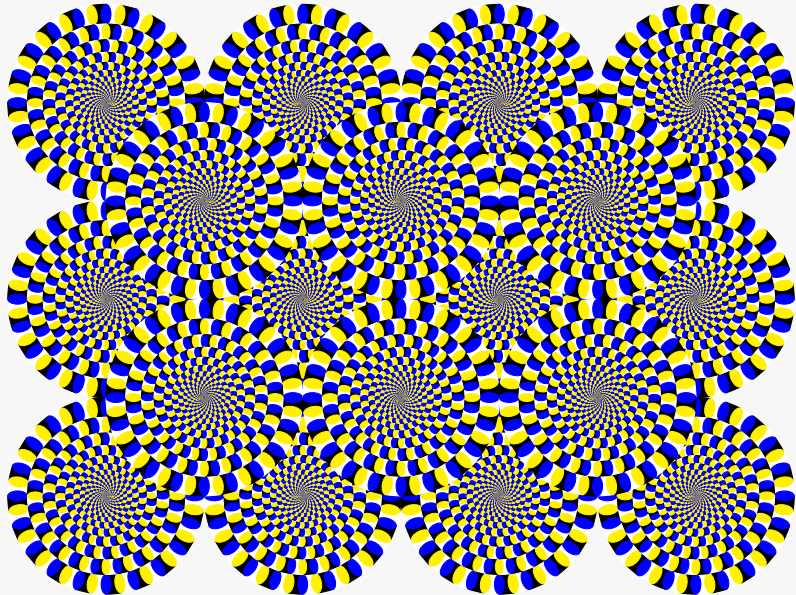


- Die beiden Linien sind parallel
- Durch das Strahlenbündel erscheinen sie gekrümmt



- Paradoxe räumliche Eindrücke
 - Auge/Gehirn ist 3D gewohnt
- ⇒ versucht 2D so zu interpretieren





Fazit: Messgeräte unabdingbar, um Beobachtungen unabhängig von Sinneseindrücken zu machen (neutrale Beobachter)

- quantifizierbar
- reproduzierbar
- unbestechlich

Um die Ergebnisse **vergleichbar und bewertbar** (Fehlerrechnung) zu machen, braucht man die Mathematik

Induktive Methode:

Beobachtung eines Vorgangs



Experiment zur qualitativen und quantitativen Untersuchung des Vorgangs



Modell zur Beschreibung des Vorgangs (und evtl. darüber hinaus)



Gesetz (Verallgemeinerung auf ähnliche Fälle)



Vorhersage neuer Phänomene

1 Einleitung

2 Mathematische Grundlagen

3 Lineare Funktionen

4 Potenzfunktionen

- Gesetze der Physik liefern Zusammenhänge zwischen **physikalischen Größen** wie Länge, Zeit, Kraft, ...
- Meist werden physikalische Größen mit Buchstaben abgekürzt, z.B. Zeit t , Länge L , Kraft F , ...
- Eine physikalische Größe G ist ein Produkt aus Zahlenwert $\{G\}$ und Einheit $[G]$:

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

z.B. Zeit:

- Gesetze der Physik liefern Zusammenhänge zwischen **physikalischen Größen** wie Länge, Zeit, Kraft, ...
- Meist werden physikalische Größen mit Buchstaben abgekürzt, z.B. Zeit t , Länge L , Kraft F , ...
- Eine physikalische Größe G ist ein Produkt aus Zahlenwert $\{G\}$ und Einheit $[G]$:

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

z.B. Zeit: $t = 3,5 \text{ s}$

Länge

- Häufig über menschl. Körper definiert
- Klafter, Elle, Fuß, Hand, Finger
- engl. Rute = $5\frac{1}{2}$ Gerten $\approx 5,03$ m

Gewicht

- Pfund, Unze
- Nürnberger Apotheker-Pfund: $357,845 \text{ g} \approx 1 \text{ lb}$
- $1 \text{ lb} = 12 \text{ Unzen} = 96 \text{ Drachmen} = 288 \text{ Skrupel} = 576 \text{ Oboloi} = 5760 \text{ Gran}$ (1 : 12 : 8 : 3 : 2 : 10)

Länge

- Häufig über menschl. Körper definiert
- Klafter, Elle, Fuß, Hand, Finger
- engl. Rute = $5\frac{1}{2}$ Gerten $\approx 5,03$ m

Gewicht

- Pfund, Unze
- Nürnberger Apotheker-Pfund: $357,845 \text{ g} \approx 1 \text{ lb}$
- $1 \text{ lb} = 12 \text{ Unzen} = 96 \text{ Drachmen} = 288 \text{ Skrupel} = 576 \text{ Oboloi} = 5760 \text{ Gran}$ (1 : 12 : 8 : 3 : 2 : 10)

Nachteile

- Sehr starke regionale oder individuelle Unterschiede
- Umständliche Umrechnung

Metrisches System – Vielfache von 10,100,1000,...

z.B.: 100 cm = 1 m

1000 g = 1 kg

Ausnahme: Zeit

			1 Sekunde
		1 Minute	60 Sekunden
	1 Stunde	60 Minuten	3600 Sekunden
1 Tag	24 Stunden	1440 Minuten	86400 Sekunden

Regionale Ausnahmen: z.B. USA

1 mile	8 furlong	80 chain	1760 yard	5280 foot	63360 inches
			1 yard	3 foot	36 inches
				1 foot	12 inches

Internationales Einheitensystem – SI-Einheiten

Basisgröße	SI-Einheit	Abkürzung
Zeit	Sekunde	s
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

- Alle anderen Einheiten können von diesen sieben **Basiseinheiten** ohne zusätzliche Faktoren abgeleitet werden
- Die Basisgrößen können *beliebig* aber möglichst zweckmäßig festgelegt werden
 - Klafter, Elle, etc. ungeeignet, da nicht leicht reproduzierbar

Meter m

Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299792458$ Sekunde zurücklegt.

Kilogramm kg

Das Kilogramm ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps.

Sekunde s

Das 9192631770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Cäsium-Isotops ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Ampere A

Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, unendlich lange, geradlinige und im Vakuum im Abstand von 1 m voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ hervorrufen würde.

Kelvin K

1 / 273,16 der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts von Wasser genau definierter isotopischer Zusammensetzung.

Mol mol

Die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso viel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 Gramm des Kohlenstoff-Isotops ^{12}C in ungebundenem Zustand enthalten sind.

Candela cd

Die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1 / 683 Watt pro Steradian beträgt.

Willkürliche Definition des Kilogramms:

- kg wird noch durch Referenzkörper definiert
- Urkilogramm: Platin-Iridium-Zylinder in Paris
- Kopien in anderen Ländern

Mögliche Neudefinition:

- Perfekte Kugel aus Silizium-28-Einkristall mit 9,38 cm Radius
- → Weniger als 30 nm Abweichung
- Erde mit kleinster Erhebung von 1,82 m

- Einheiten bzw. Größen, die sich auf SI-Einheiten bzw. Basisgrößen zurückführen lassen
- Zusammenhang folgt aus Naturgesetzen
- **Wichtig:** Einheiten sind Teil der Gleichungen
- Einheitentest als hilfreiche Kontrolle

Beispiel

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}(\text{intervall})}{\text{Zeit}(\text{intervall})}$$

$$[v] =$$

- Einheiten bzw. Größen, die sich auf SI-Einheiten bzw. Basisgrößen zurückführen lassen
- Zusammenhang folgt aus Naturgesetzen
- **Wichtig:** Einheiten sind Teil der Gleichungen
- Einheitentest als hilfreiche Kontrolle

Beispiel

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}(\text{intervall})}{\text{Zeit}(\text{intervall})}$$

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Größe	Berechnung	Einheit
Fläche	$A = \text{Länge} \times \text{Breite}$	m^2
Winkel	$\varphi = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$	$\frac{\text{m}}{\text{m}} = \text{rad}$
Raumwinkel	$\Omega = \frac{\text{Fläche des Kugelausschnitts}}{\text{Quadrat des Kugelradius}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = \text{sr}$
Frequenz	$f = \nu = \frac{1}{\text{Periodeendauer}}$	$\frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{\text{Wegintervall}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Kraft	$\vec{F} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$	$\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
Arbeit, Energie	$W = E = \text{Kraft} \times \text{Weg}$	$\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{J}$
Leistung	$P = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeitintervall}}$	$\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} = \text{W}$

Würfel mit Kantenlänge

$$l = 10 \text{ cm}$$

Volumen:

$$V = l^3$$

$$\begin{aligned} V &= 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \\ &= 1000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} \\ &= 0,001 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Geschwindigkeit v eines
Fahrrades

$$v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 5 \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}}$$

$$\begin{aligned} &\leq 5 \cdot \frac{3600}{1000} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

Würfel mit Kantenlänge

$$l = 10 \text{ cm}$$

Volumen:

$$V = l^3$$

$$V = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$$

$$= 1000 \text{ cm}^3$$

$$= 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m}$$

$$= 0,001 \text{ m}^3$$

Geschwindigkeit v eines
Fahrrades

$$\begin{aligned} v &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 5 \frac{1/1000 \text{ km}}{1/3600 \text{ h}} \\ &= 5 \frac{3600 \text{ km}}{1000 \text{ h}} \\ &= 5 \cdot 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

Auswertung eines Experiments

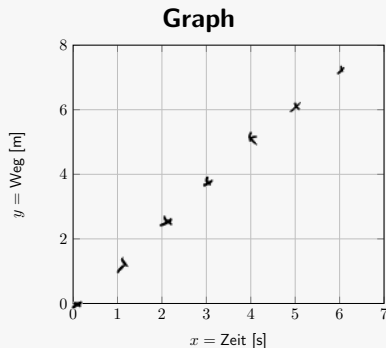
Einfachster Fall: 2 Messgrößen

- Z.B.: Zeit t und zurückgelegte Strecke s
- Häufig: experimenteller Parameter (t) und Observable (s)

Beispiel: Bewegung mit $v = 1,2 \text{ m/s}$

Darstellung:

Wertetabelle	
Zeit [s]	Weg [m]
0	0
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6,0
6	7,2



Auswertung eines Experiments

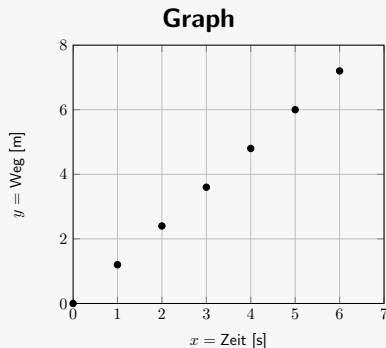
Einfachster Fall: 2 Messgrößen

- Z.B.: Zeit t und zurückgelegte Strecke s
- Häufig: experimenteller Parameter (t) und Observable (s)

Beispiel: Bewegung mit $v = 1,2 \text{ m/s}$

Darstellung:

Wertetabelle	
Zeit [s]	Weg [m]
0	0
1	1,2
2	2,4
3	3,6
4	4,8
5	6
6	7.2

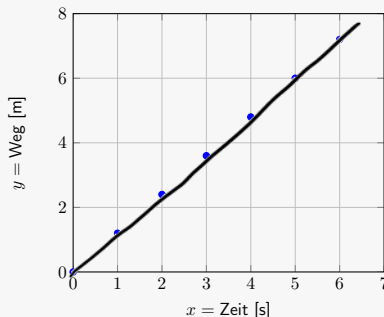


Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

$$y = f(x)$$



Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

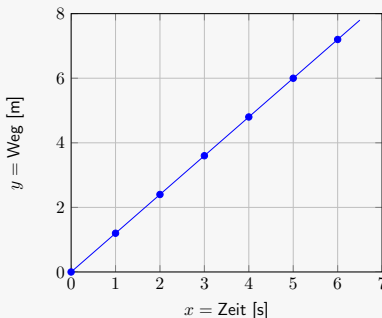
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

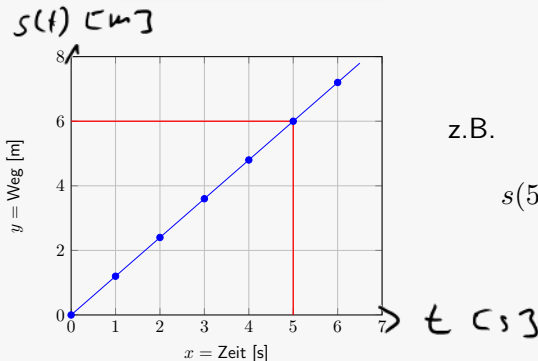
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



z.B.

$$s(5 \text{ s}) = 6 \text{ m}$$

Graphen lassen sich durch Kurven beschreiben

- Einfachster Fall: Gerade

Kurven werden durch Funktionen f beschrieben:

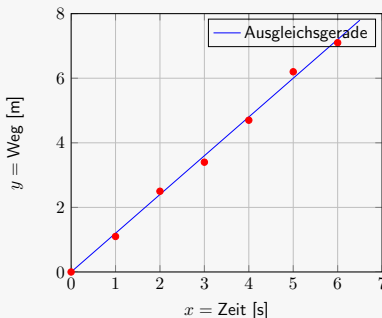
$$y = f(x)$$

Gerade:

$$f(x) = a \cdot x$$

Hier:

$$s(t) = v \cdot t$$



Bei einem Experiment
nie einfach die Punkte
des Graphens aller
Messwerte verbinden,
sondern **interpolieren**
und so die
Ausgleichsgerade
finden!

1 Einleitung

2 Mathematische Grundlagen

3 Lineare Funktionen

4 Potenzfunktionen

Definition: Eine Funktion ist eine Relation zwischen zwei Mengen D und W , in der jedem Element aus D **ein Bestimmtes** Element aus W zugeordnet ist.

- D =Definitionsmenge
- W =Wertemenge

Allgemeine Geradengleichung

$$f(x) = y = a \cdot x + b$$

b : y -Achsenabschnitt ($f(0) = b$)

$$y = a \cdot x$$

Sonderfall: $b = 0$ Proportionalität

$$y \propto x$$

a : Proportionalitätsfaktor

$$y = ax + b$$

Definition der Steigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Für eine Gerade:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Definition der Steigung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Für eine Gerade:

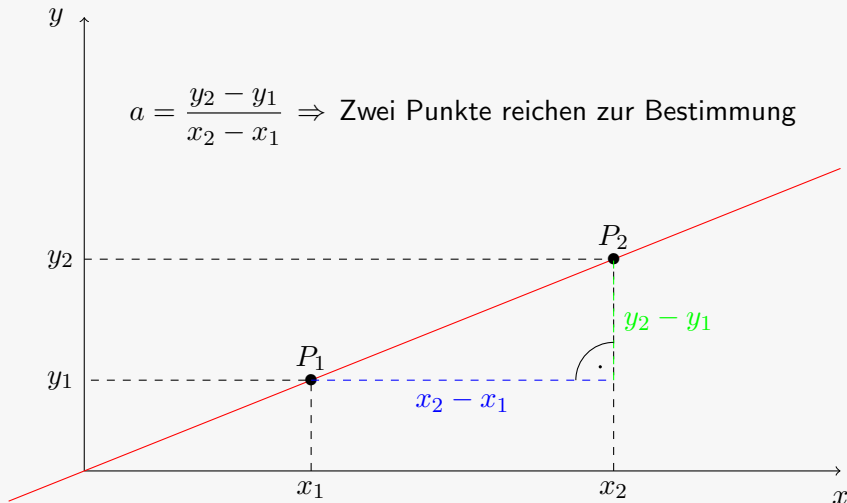
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a \end{aligned}$$

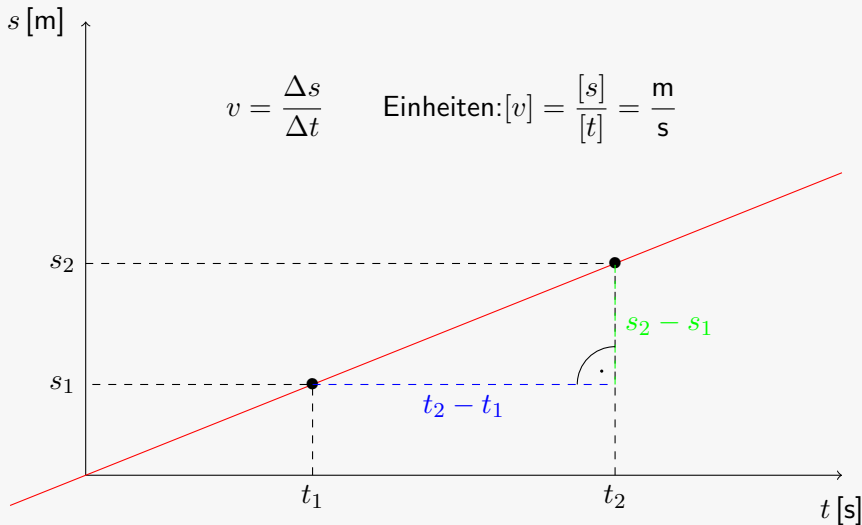
$$\text{Steigung } a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

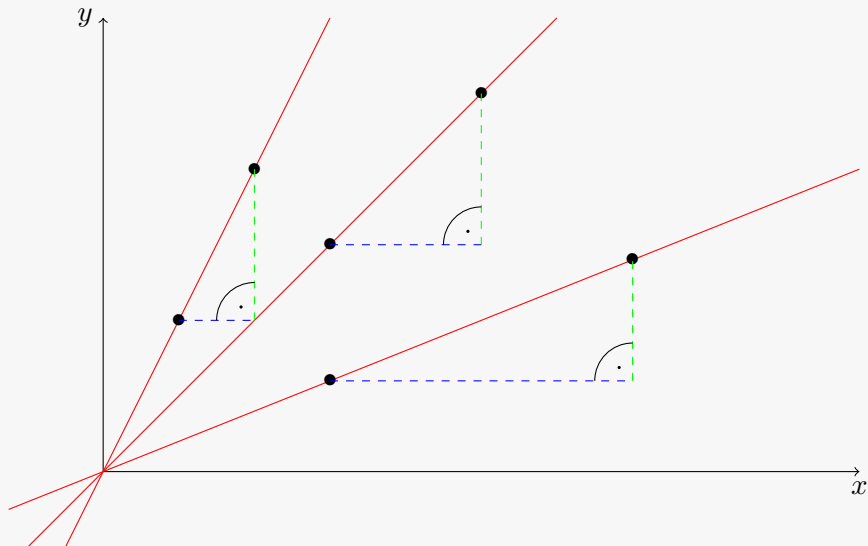
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \text{Zwei Punkte reichen zur Bestimmung}$$

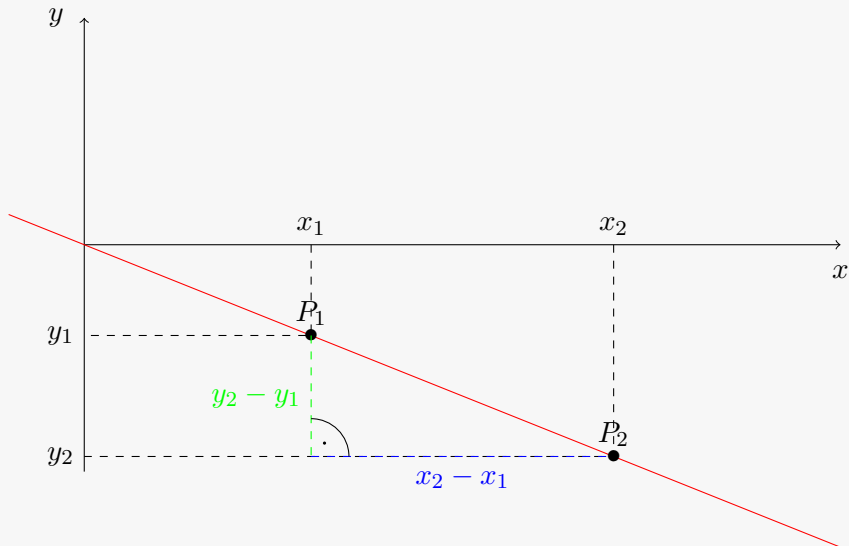


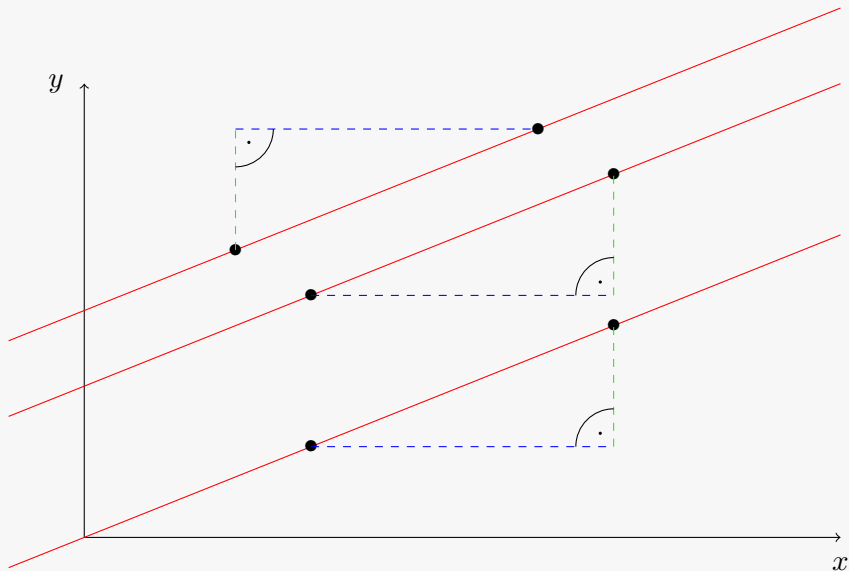
$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Zurückgelegter Weg}}{\text{Benötigte Zeit}}$$

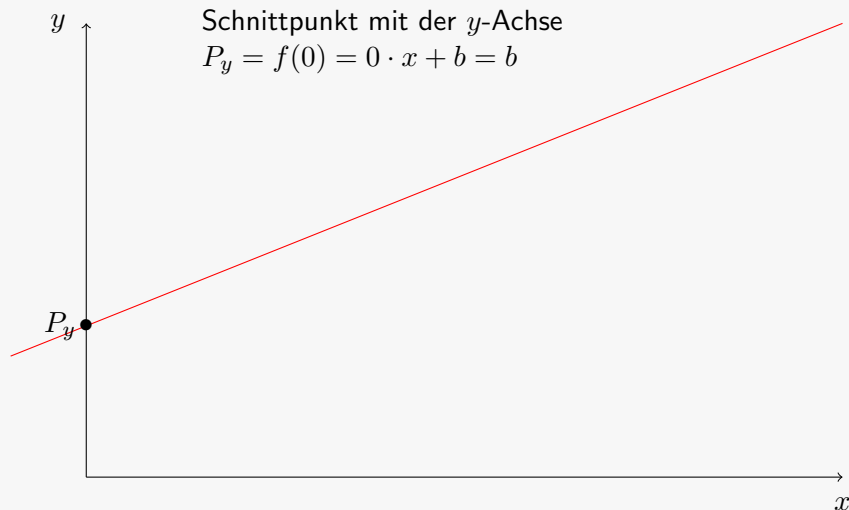
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{Einheiten: } [v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

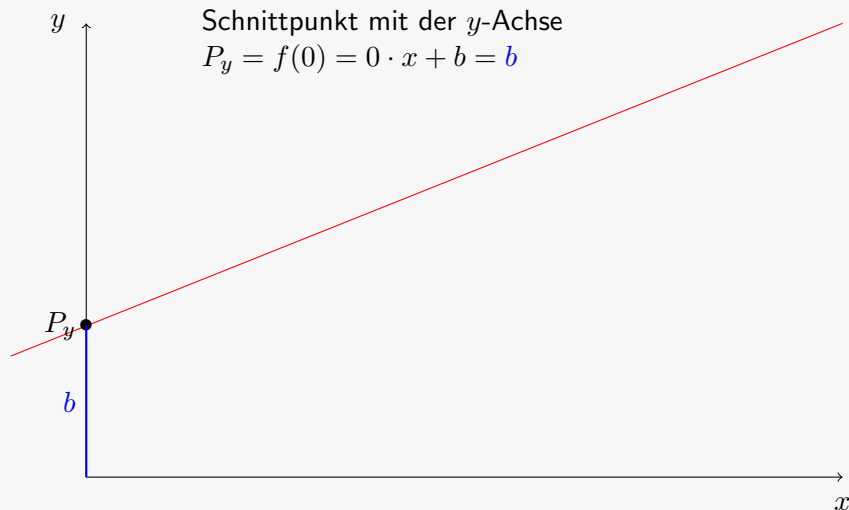




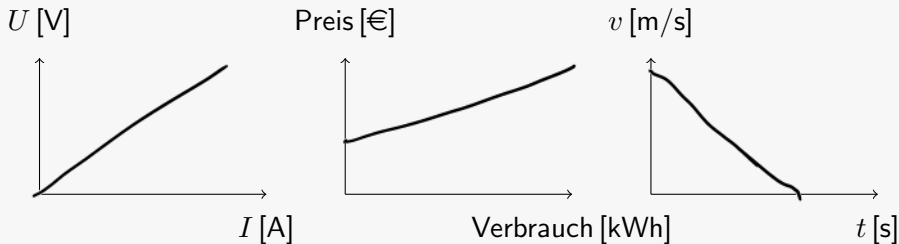




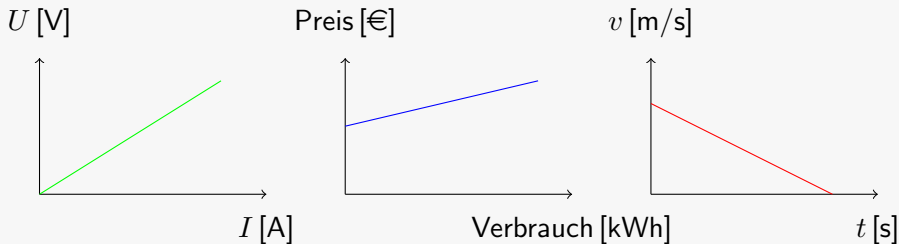




- Ohmsches Gesetz: $U = R \cdot I$
- Stromkosten: Grundgebühr + Verbrauch
- Gleichförmig verzögerte Bewegung



- Ohmsches Gesetz: $U = R \cdot I$
- Stromkosten: Grundgebühr + Verbrauch
- Gleichförmig verzögerte Bewegung



- 1 Einleitung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Lineare Funktionen
- 4 **Potenzfunktionen**

Multiplizieren einer Zahl mit sich selbst

z.B.: $x \cdot x = x^2 \rightarrow 2.$ Potenz von x

- 0. Potenz: $x^0 = 1$
- 1. Potenz: $x = x^1$
- 2. Potenz: $x \cdot x = x^2$
- 3. Potenz: $x \cdot x \cdot x = x^3$
- n. Potenz: $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n = x^n$

n nennt man **Exponent** oder Hochzahl

Überlegung

$$x^n \cdot x = x^{n+1} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{x}$$

$$x^n \cdot \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$x^n = x^{n+1} x^{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$x^0 = x^{n-n}$$

$$= x^n \cdot x^{-n}$$

$$= x^n \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{x^n}{x^n} = 1$$

Überlegung

$$x^n \cdot x = x^{n+1}$$

$$x^n \cdot x \cdot \frac{1}{x} = x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$x^n = x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Überlegung

$$\begin{aligned}x^n \cdot x &= x^{n+1} \\x^n \cdot x \cdot \frac{1}{x} &= x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \\x^n &= x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \\&\Rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^0 &= x^{n-n} \\&= x^n \cdot x^{-n} \\&= \frac{x^n}{x^n} = 1 \\&\Rightarrow x^0 = 1\end{aligned}$$

Produkt

$$x^n \cdot x^m = (\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n) \cdot (\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_m) = x^{n+m}$$

Quotient

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n \cdot \frac{1}{x^m} = x^n \cdot x^{-m} = x^{n-m}$$

Potenz

$$(x^n)^m = (\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n) \cdot \dots \cdot (\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n) = x^{n \cdot m}$$

- $-1^6 =$ $-1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 = +1 = (-1)^{2 \cdot 3} = 1^3$

- $(1/10)^4 =$

- $0,1^5 =$

- $2^3 + 2^4 - 2^5 =$

-

- $a^5 \cdot a^2 / a^4 =$

- $(a/b^2)^3 \cdot (b^2/a)^3 =$ $a \cdot b^{-2/3} \cdot (b^2 a^{-1})^3$

- $a^{-2} \cdot a^{-3} \cdot a^4 =$ $a^3 b^{-6} \cdot b^6 a^{-3}$
 $= a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$

- $(a^{-1} \cdot b^{-5})^{-2} =$

- $-1^6 = (-1^2)^3 = 1^3 = 1$
- $(1/10)^4 = (10^{-1})^4 = 10^{-4} = 1/10^4 = 0,0001$
- $0,1^5 = (1/10)^5 = 0,00001$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 = 8 + 16 - 32 = -8$
- $2^3 + 2^4 - 2^5 = 2^3 + 2^1 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot 2^3 = 2^3(1 + 2 - 2^2) = 8 \cdot (-1) = -8$
- $a^5 \cdot a^2 / a^4 = a^{(5+2-4)} = a^3$
- $(a/b^2)^3 \cdot (b^2/a)^3 = a^3 \cdot b^{-6} \cdot b^6 \cdot a^{-3} = a^0 \cdot b^0 = 1$
- $a^{-2} \cdot a^{-3} \cdot a^4 = a^{-2-3+4} = a^{-1} = 1/a$
- $(a^{-1} \cdot b^{-5})^{-2} = a^{-1 \cdot -2} \cdot b^{-5 \cdot -2} = a^2 \cdot b^{10}$

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen

Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2$
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3$
- n. Grades: $f(x) = a \cdot x^n$

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen

Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

$$f(x) = y = x^2$$

- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1 + b$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- n. Grades: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$

Funktionen, in denen nur Potenzen vorkommen

Beispiel: Potenzfunktion 2. Grades:

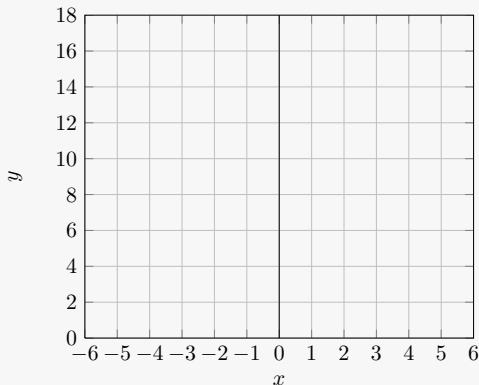
$$f(x) = y = x^2$$

- 0. Grades: $f(x) = a \cdot x^0$
- 1. Grades: $f(x) = a \cdot x^1 + b$
- 2. Grades: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Quadratische Gleichung
- 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- n. Grades: $f(x) = a_n \cdot x^n$

Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

$$f(x) = y = x^2$$

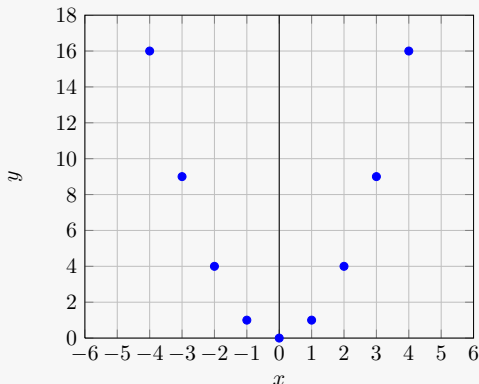
x	$f(x) = x^2$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

$$f(x) = y = x^2$$

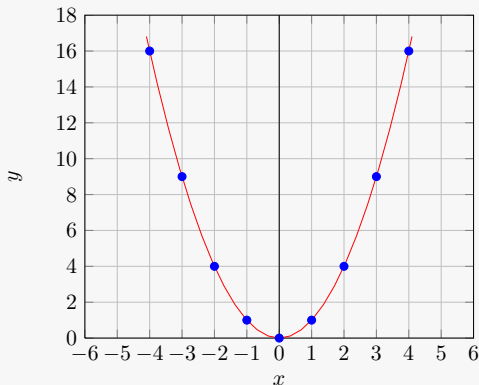
x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



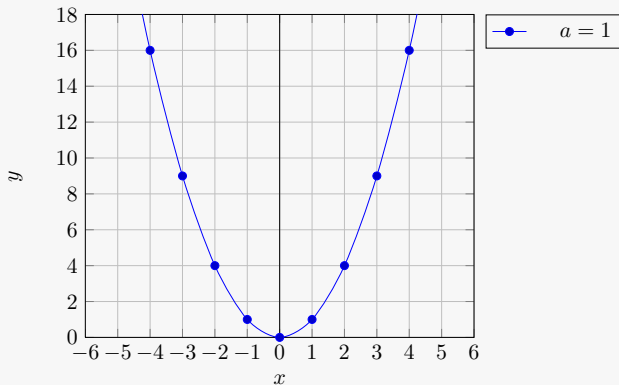
Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung mit $a = 1$ und $b = c = 0$

$$f(x) = y = x^2$$

x	$f(x) = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



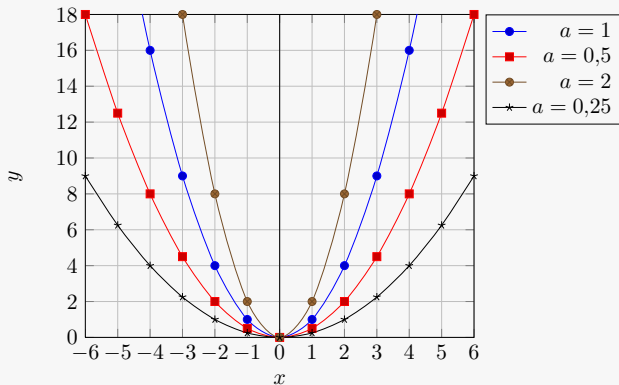
$$f(x) = a \cdot x^2$$



- $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = x^2 \rightarrow$ nur positive Werte
- $f(-x) = f(x) \rightarrow$ symmetrisch zur y -Achse
- $f(0) = 0 \rightarrow$ Scheitelpunkt im Ursprung

Parabel mit Scheitelpunkt im Ursprung

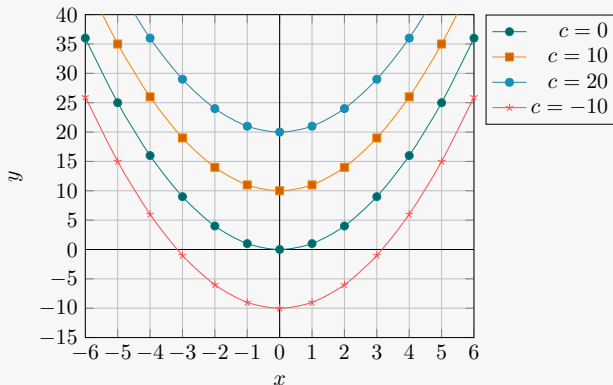
$$f(x) = a \cdot x^2$$



- $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) = x^2 \rightarrow$ nur positive Werte
- $f(-x) = f(x) \rightarrow$ symmetrisch zur y -Achse
- $f(0) = 0 \rightarrow$ Scheitelpunkt im Ursprung

$$f(x) = x^2 + c$$

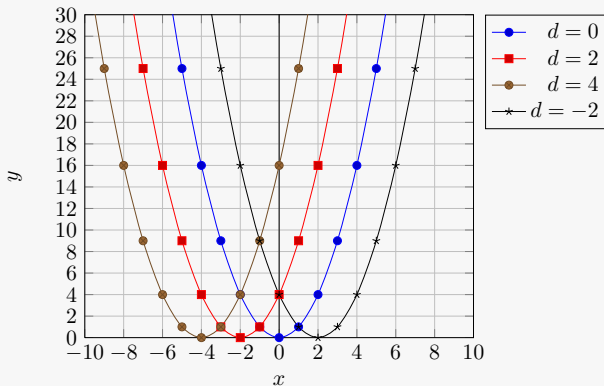
⇒ Scheitelpunkt bei $y_s = c$



$$f(x) = (x + d)^2$$

1. Binomische Formel: $(x + d)^2 = x^2 + 2d \cdot x + d^2$

Scheitelpunkt bei $x_s = -d$



Quadratische Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Wie finde ich den Scheitelpunkt S ?

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a \cdot x^2 - 2a \cdot x_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s$$

Quadratische Gleichung

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Wie finde ich den Scheitelpunkt S ?

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a \cdot x^2 - 2a \cdot x_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s$$

Koeffizientenvergleich:

$$b = -2a \cdot x_s \quad \Rightarrow \quad x_s = \frac{-b}{2a}$$

$$c = a \cdot x_s^2 + y_s \quad \Rightarrow \quad y_s = c - a \cdot x_s^2 = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Meistens ist aber gegeben: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Ausklammern des Leitkoeffizienten

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x \right) + c$$

Quadratische Ergänzung

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2}_{=0} \right) + c$$

Binomische Formel *rückwärts*

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

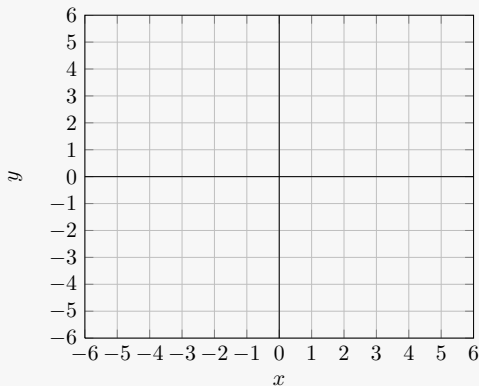
$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

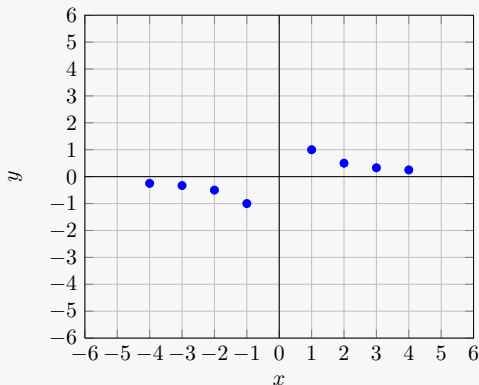


Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25

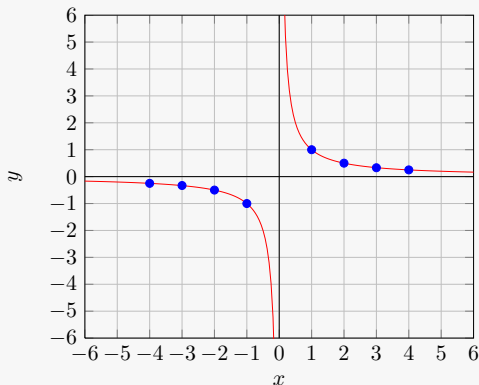


Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25

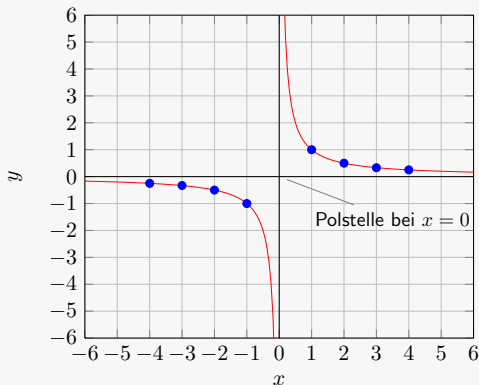


Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25

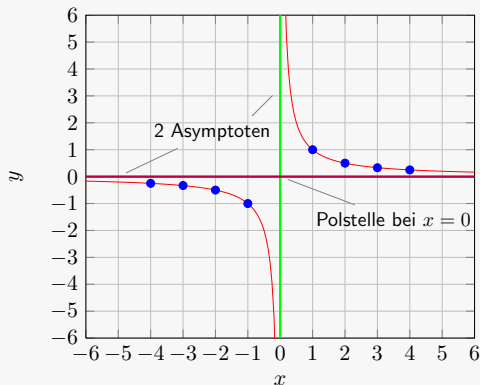


Negativen Potenz $\rightarrow$ Kehrwert

$$f(x) = y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

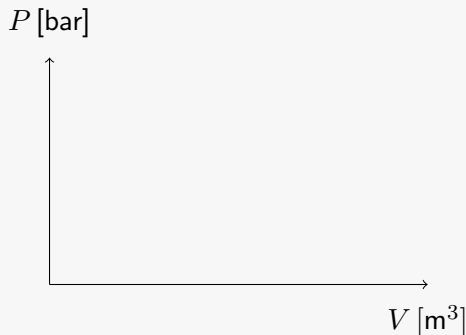
Beispiel **Hyperbel** $f(x) = x^{-1}$

x	$f(x) = x^{-1}$
-4	-0,25
-3	-0,33
-2	-0,5
-1	-1
0	undefiniert
1	1
2	0,5
3	0,33
4	0,25



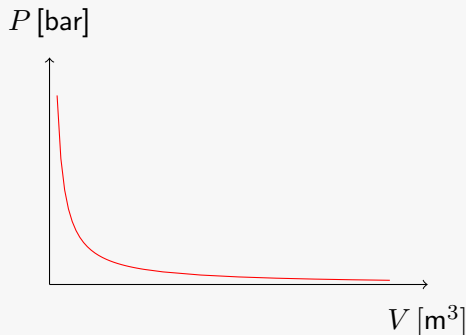
Gesetz von Boyle-Mariotte Gilt für abgeschlossene Gasmenge bei konstanter Temperatur T mit Volumen V und Druck P

$$P \propto V^{-1} \text{ oder } P = c/V \text{ mit Konstante } c$$



Gesetz von Boyle-Mariotte Gilt für abgeschlossene Gasmenge bei konstanter Temperatur T mit Volumen V und Druck P

$$P \propto V^{-1} \text{ oder } P = c/V \text{ mit Konstante } c$$



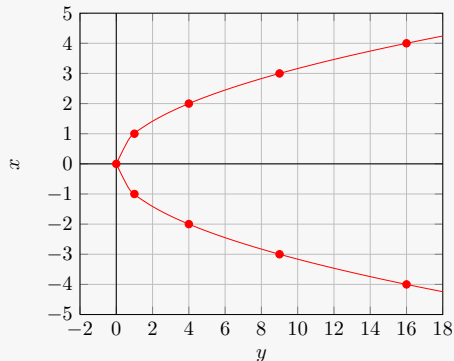
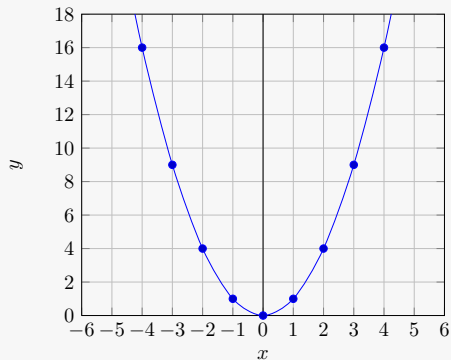
Gegeben: $y = f(x)$

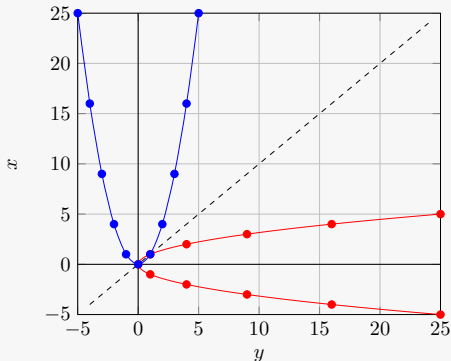
Gesucht: Funktion, die zu jedem y -Wert den zugehörigen x -Wert liefert

Definition: Diese Funktion heißt Umkehrfunktion f^{-1} : $x = f^{-1}(y)$

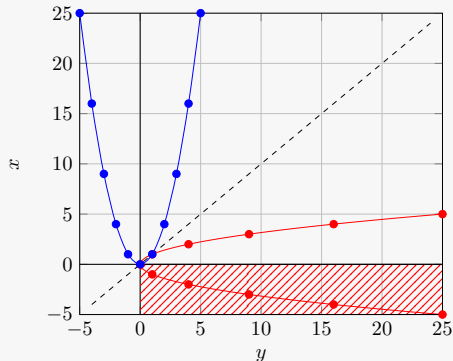
x	$f(x) = y = x^2$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

y	$x = f^{-1}(y)$
16	-4
9	-3
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4



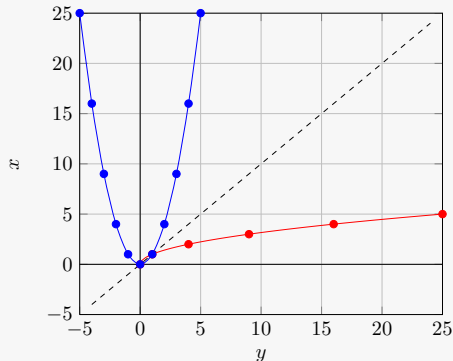


Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen



Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

Funktion muss jedem x -Wert
eindeutig einen Funktionswert y
zuordnen



Graphische Folge:
Spiegelung an der Diagonalen

Funktion muss jedem x -Wert
eindeutig einen Funktionswert y
zuordnen

Wurzel

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Umkehrfunktion zu einfachen Potenzen: $f(x) = x^m$

Rechenregeln wie bei Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n =$$

Wurzel

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

Umkehrfunktion zu einfachen Potenzen: $f(x) = x^m$

Rechenregeln wie bei Potenzen:

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{5})^4 &= \\(3 \cdot \sqrt{2})^2 &= \\a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} &= \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$

$$\left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 3^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$$

Nullstelle: $f(x) = y = 0$

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Nullstelle: $f(x) = y = 0$

$$f(x) = y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Normierte Form: Teilen durch a

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Mit $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Lösung mit p - q -Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Gegeben

- Höhe des Hügels $h_0 = 200 \text{ m}$
- Startgeschwindigkeit in vertikaler Richtung $v_0 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{mit } g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Wie lange fliegt die Kugel?

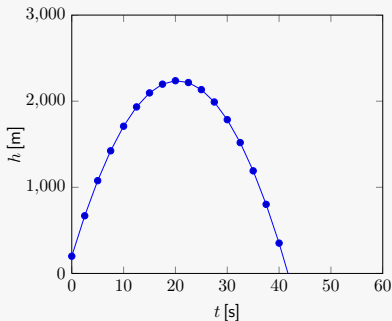
Beispiel: Kanone auf Hügel

Gegeben

- Höhe des Hügels $h_0 = 200 \text{ m}$
- Startgeschwindigkeit in vertikaler Richtung $v_0 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{mit } g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Wie lange fliegt die Kugel?



$$h_0 + v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot \frac{v_0}{g} \cdot t - 2 \cdot \frac{h_0}{g} = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2 \cdot \frac{h_0}{g}}$$

$$t_{1/2} = (20,4 \text{ s} \pm 21,4 \text{ s})$$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen (**Umkehroperationen**) auf beiden Seiten:

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen (**Umkehroperationen**) auf beiden Seiten:

① Subtraktion von c : $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen (**Umkehroperationen**) auf beiden Seiten:

- 1 Subtraktion von c : $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
- 2 Division durch a : $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen (**Umkehroperationen**) auf beiden Seiten:

- ① Subtraktion von c : $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
- ② Division durch a : $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
- ③ Potenzieren mit m : $\left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen (**Umkehroperationen**) auf beiden Seiten:

- ① Subtraktion von c : $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
- ② Division durch a : $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
- ③ Potenzieren mit m : $\left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$
- ④ Ziehen der n ten Wurzel: $\sqrt[n]{\left(\frac{y-c}{a}\right)^m} = \left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung $y = f(x)$ auf die Form $x = f^{-1}(y)$ umgeformt werden

- Auf der einen Seite der Gleichung steht nur noch x
- Auf der anderen Seite darf x nicht mehr vorkommen

$$y = a \cdot x^{\frac{n}{m}} + c$$

Gleichzeitige Rechenoperationen (**Umkehroperationen**) auf beiden Seiten:

- 1 Subtraktion von c : $y - c = a \cdot x^{\frac{n}{m}}$
- 2 Division durch a : $\frac{y-c}{a} = x^{\frac{n}{m}}$
- 3 Potenzieren mit m : $\left(\frac{y-c}{a}\right)^m = x^n$
- 4 Ziehen der n ten Wurzel: $\sqrt[n]{\left(\frac{y-c}{a}\right)^m} = \left(\frac{y-c}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = x$

$$s(t) = 0,5 \cdot a \cdot t^2$$

$$s(t) = 0,5 \cdot a \cdot t^2$$

Multiplikation mit 2:

$$2 \cdot s = a \cdot t^2$$

Division mit a :

$$2 \cdot \frac{s}{a} = t^2$$

Ziehen der Quadratwurzel:

$$t(s) = \sqrt{2 \cdot \frac{s}{a}}$$