Übungszettel Stufen, harmonische Oszillator

Aufgabe 1

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

sei das Potential eines harmonische Oszillators.

- a Welche Bedeutung hat ω für ein klassisches Federsystem? Nür dimensionell betrachtet, wie muss die Energie des Quantensystems aussehen?
- b Warum sind die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung in diese Fall entweder eine gerade oder ungerade Funktion von x?

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + u\right)$ sei der sog. Vernichtungsoperator und $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - u\right)$ sei der Erzeugungsoperator.

- c Zeigen Sie $(a^\dagger a - aa^\dagger)\psi = \psi$ für jede Funktion ψ.
- d Schreiben sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung in a und $a^\dagger$ um (Hinweis: Nutzen Sie die Substitution $u = \alpha x$ für ein passendes α)
- e Zeigen Sie $a\psi_0 = 0$ für die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit dem niedrigsten Energiewert ψ_0 (aus Schmüser)
- f Zeigen Sie das $a^\dagger\psi_0$ auch eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung ist und berechnen Sie deren Energiewert (Hinweis: Man braucht hier nur das Resultat von c) um die Operatoren a und $a^\dagger$ zu vertauschen).
- g Wiederholen Sie Aufgabe (f) für die Funktion $(a^\dagger)^n\psi_0$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Betrachten Sie jetzt das neue Potential mit $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ für $x > 0$, aber $V = \infty$ für $x \leq 0$.

- h Was ist die Randbedingung bei $x = 0$? Was ändert sich an der Schrödingergleichung bei $x > 0$?
- i Finde die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit der niedrigsten Energiewert und normieren Sie diese. (Hinweis: Das Resultat andere Aufgabe ist hierbei nützlich)
- j (Bonus) Finden Sie eine unendliche Reihe Lösungen und normieren Sie diese.

Aufgabe 2 & 3

- a Aufgabe 3.5 in Schmüser
- b Aufgabe 3.9 in Schmüser