

Übungszettel Komplexe Zahlen

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie sie in der Form $a + ib$ schreiben:

- a $(6 + 3i) - (2i - 1)$
- b $(\pi i + 3)(3 - \pi i)$
- c $\frac{7-4i}{2+i}$
- d $\frac{1+i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$
- e $(4 - 2i)^3$
- f $\frac{2}{3-4i} - \frac{1+i}{1-i}$
- g $|2 + 4i| - |2i + 2|$
- h $\left| \frac{1-3i}{2i-2} \right|^2$
- i $(1 + i)(1 - i)(2 + 2i)^2$
- j $i^8 + i^4 - 2(2 + i^2)$
- k $(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2 + b\omega)$ mit $\omega = \cos(\lambda) + i \sin(\lambda)$

Aufgabe 2

Bringen Sie die folgenden Ausdrücke auf die Form $re^{i\phi}$ und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Ebene.

- a $5i + 5$
- b $-1 - i$
- c $-\frac{1}{7}i$
- d $1 - \sqrt{3}i$
- e 2
- f $2i + \sqrt{5}$

g $(1 + i)^{111}$

h $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$

Aufgabe 3

Schreiben Sie von den Antworten von Aufgaben 1a-1d und 2a-2d die komplex konjugierte \bar{z} .

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgende Bereiche der komplexen Zahlenebene:

- a $\{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$
- b $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)\}$
- c $\{z = -1 + 2i + te^{i\phi} \mid t \in \mathbb{R}\}$
- d $\{z = e^{x+i\frac{\pi}{4}} \mid x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 5

Lösen Sie die Gleichungen:

- a $z^2 = -9$
- b $z^2 + z + 1 = 0$
- c $z^2(1 + i) - z(1 - i) = 0$
- d $z^5 = 1$ (Hinweis: es gibt fünf Lösungen!)

Aufgabe 6

Skizzieren Sie eine ebene Welle, $\psi(x, t) = \exp(i(\omega t - kx))$, für eine konstante Zeit in einem dreidimensionalen Raum.

Bonus Aufgabe

Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerformel:

- a $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$
- b $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(b) \sin(a)$
- c $\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{\tan(\frac{x}{2})}$
- d $\sin^6\left(\frac{x}{2}\right) - \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x) \frac{\sin^2(x) - 4}{4}$