Übungszettel 10

Mathematischer Vorkurs im Sommersemester 2012

Aufgabe 1 — Vektorprodukte

(a) Berechnen Sie die Produkte $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$ und $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c})$ für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche geometrische Aussage verbirgt sich hinter diesem Ergebnis?

(c) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für welche Zahlen x, y sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ paarweise orthogonal? Für welche liegen sie in einer Ebene?

Aufgabe 2 — Schnittpunkte

Finden Sie durch Lösen des entsprechenden Gleichungssystems die Schnittpunkte von $\vec{x}(t)$ und $\vec{y}(s)$:

(a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y}(s) = \begin{pmatrix} s-2 \\ 3s+5 \\ 1-s \end{pmatrix}$;

(b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 2t+1 \\ 1+4t \end{pmatrix}$, $\vec{y}(s) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$;

(c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y}(s) = \begin{pmatrix} s \\ 3-s \\ 1+2\sin s \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 — Ortskurven

Berechnen Sie für die folgenden Ortskurven $\vec{x}(t)$ die Geschwindigkeit $\vec{x}'(t)$ und ihren Betrag, die Beschleunigung $\vec{x}''(t)$ und ihren Betrag. Machen Sie sich ein Bild der Bewegung im Raum.

(a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t \\ \sin t \end{pmatrix}$;

(b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ t^2e^{-t^2} \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$ für $t > 0$;

(c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 2t \\ e^{-2t} \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 — Beweise

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(\vec{a}, \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$;

(b) aus (a) folgt $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$;

(c) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ und $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ impliziert $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = 0$;

(d) im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe (auf der Hypothenuse) flächengleich dem Rechteck aus den Hypothenusenabschnitten;

(e) $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c} \times \vec{a})$.