Übungszettel 8

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie sie in der Form $a + \mathrm{i}b$ schreiben:

a $(6 + 3\mathrm{i}) - (2\mathrm{i} - 1)$

b $(\pi\mathrm{i} + 3)(3 - \pi\mathrm{i})$

c $\frac{7-4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$

d $\frac{1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5}{1+\mathrm{i}}$

e $(4 - 2\mathrm{i})^3$

f $\frac{2}{3-4\mathrm{i}} - \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

g $|2 + 4\mathrm{i}| - |2\mathrm{i} + 2|$

h $\left|\frac{1-3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-2}\right|^2$

i $(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})(2 + 2\mathrm{i})^2$

j $i^8 + i^4 - 2(2 + \mathrm{i}^2)$

k $(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2 + b\omega)$ mit $\omega = \cos(\lambda) + \mathrm{i}\sin(\lambda)$

Aufgabe 2

Bringen Sie die folgenden Ausdrücke auf die Form $re^{\mathrm{i}\phi}$ und Skizzieren Sie die Zahlen.

a $5\mathrm{i} + 5$

b $-1 - \mathrm{i}$

c $-\frac{1}{7}\mathrm{i}$

d $1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$

e 2

f $2\mathrm{i} + \sqrt{5}$

g $(1 + i)^{111}$

h $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{10}$

Aufgabe 3

Schreiben Sie von die Antwörte von Aufgaben 1a-1d und 2a-2d die komplex Konjugierte $\bar{z}$.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgende Bereiche der komplexen Zahlenebene:

a $\{z \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$

b $\{z \,|\, \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)\}$

c $\{z = -1 + 2\mathrm{i} + te^{\mathrm{i}\phi} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$

d $\{z = e^{x+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

e $\{z = 2\, e^{\mathrm{i}y} \,|\, 0 \le y < 2\pi\}$

f $\{z = e^{x+\mathrm{i}y} \,|\, x \in \mathbb{R}, 0 \le y < 2\pi\}$

Aufgabe 5

Lösen Sie die Gleichungen:

a $z^2 = -9$

b $z^2 + z + 1 = 0$

c $z^2(1 + \mathrm{i}) - z(1 - \mathrm{i}) = 0$

Aufgabe 6

Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerformel:

a $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

b $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$

c $\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

d $\sin^6\left(\frac{x}{2}\right) - \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x)\frac{\sin^2(x)-4}{4}$