Übungszettel 7

Aufgabe 1

Was ist der Grad des Polynoms

a $12x^6 - x^7 + 23x^3 + 1$

b $x^{123456789} + 4$

c $(x^3 + x^2 - x + 1)(6x^2 + 7x - 1)(x - 3)$

d $(\sum_{i=0}^{j} \frac{1}{i!} x^i)(\sum_{k=0}^{j} (2k) x^k)$

Aufgabe 2

Lösen Sie nach x auf:

a $x^3 = -2$

b $x^{a+45c} = -2$

c $e^{6x+1} = y$

d $\sin(x + 5) = y$

e $\sin(e^{2x} + 5) = y$

f $\ln\left((2x + 3)^4\right) = y$

g $\ln(2x + 3) - \ln(4x + 6) = y$

h $\ln(2x + 3) - \ln(4x + 5) = y$

i $\arctan(x) = \arcsin(y)$

j $\arccos(x) = \arcsin(y)$

k $\sinh(x) + \cosh(x) = y$

Aufgabe 3

Differenzieren Sie nach x:

a π^x

b x^x

c $e^{e^{e^x}}$

d $e^{56 \ln(x) + \mathrm{arsinh}(y)}$

e $\arccos(x)$

f $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

g $\sum_{i=0}^{n} x^i$

Aufgabe 4

Berechnen Sie

a $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

b $\lim_{x\to\infty} x^{658457919034} e^{-x}$

c $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

d $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$

e $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin(x) - 1$

Aufgabe 5

Betrachten Sie Integrale der Form

$$\int R\left(\cos\phi, \sin\phi\right) d\phi$$

mit R als Rationalfunktion von $\cos\phi$ und $\sin\phi$

a Für die Substitution $x = \tan(\phi/2)$, zeigen Sie $d\phi = \frac{2}{1+x^2} dx$

b Zeigen Sie das für diesen Substitution

$$\sin\phi = \frac{2}{1+x^2} \qquad \cos\phi = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

c Berechnen Sie $\int \frac{1}{\sin(\phi)\cos(\phi)} d\phi$

d Berechnen Sie $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\sin(\phi)\cos(\phi)} d\phi$

e Argumentieren Sie dass *jeden* integral $\int R\left(\cos\phi, \sin\phi\right) d\phi$ mit diesen Substitution (im Prinzip) berechnet werden kann.

f Zeigen Sie dass es für Integrale der Form

$$\int (\cos(\phi))^i \, d\phi \qquad i \in \mathbb{Z}, \text{ungerade}$$

mit einer Substitution $x = \sin\phi$ einfachere Zwischenresultate gibt.

g Berechnen Sie $\int \frac{1}{\cos(\phi)} d\phi$