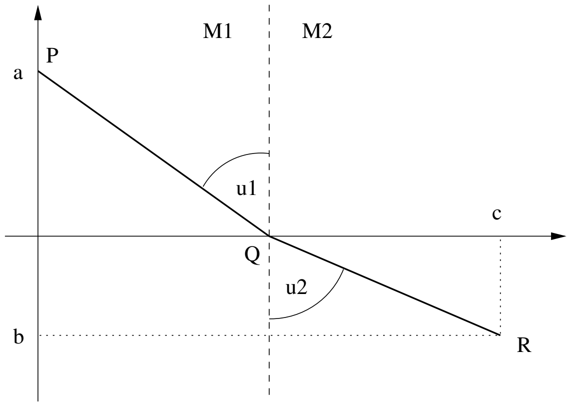
Übungszettel 4

Mathematischer Vorkurs im Sommersemester 2012

Aufgabe 1 — Brechung

Eine Masse bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v_1 bzw. v_2 im Medium $M1$ bzw. $M2$, siehe Skizze (a). Zeigen Sie: Der gesamte Weg PQR wird am schnellsten durchlaufen, wenn $\frac{v1}{v2} = \frac{\sin u1}{\sin u2}$.



(a)

Aufgabe 2 — Sportliche Extreme

Eine $400m$ Laufbahn besteht aus zwei parallelen Geraden mit angesetzten Halbkreisen.

(a) Wie lang müssen die Geraden sein, damit das durch sie begrenzte Rechteck maximale Fläche hat?

(b) Wie groß ist diese Fläche?

Aufgabe 3 — Grenzwerte mit l'Hospital

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren, mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sinh x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ für $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cot x}{\ln x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Aufgabe 4 — Taylorreihen

Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen um $x_0 = 0$, indem Sie eine Formel für alle Ableitungen erraten und eventuell per Induktion beweisen:

(a) $f(x) = e^x$ an $x_0 = 0$;

(b) $f(x) = \sin x$ an $x_0 = 0$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ an $x_0 = 0$;

(d) $f(x) = \ln(1+x)$ an $x_0 = 0$;

(e) $f(x) = \tan x$ an $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 — Reihenentwicklung von π

Zeigen Sie, dass der Arcustangens die Taylorreihe

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

hat. Überlegen Sie sich daraus die ersten Terme der Reihendarstellungen für $\pi = 4\arctan 1 = 6\arctan(1/\sqrt{3})$. Welche Reihe für π konvergiert besser?

Aufgabe 6 — Binomialreihe

Beweisen Sie die Identität

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Die Binomialkoeffizienten sind definiert als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$