Übungszettel 1

Mathematischer Vorkurs im Sommersemester 2012

Aufgabe 1 — Vollständige Induktion

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen über natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:

(a) $\sum_{s=1}^{n}(2s-1) = n^2$;

(b) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x \geq 1$ (Bernoulli-Ungleichung);

(c) $\sum_{s=0}^{n} q^s = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$;

(d) $n^2 > 2n+1$ für $n \geq 3$;

(e) $2^n > n^2$ für $n \geq 5$.

Aufgabe 2 — Eigenschaften von Folgen

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Eigenschaften beschränkt (nach oben/unten), (streng) monoton wachsend/fallend, alternierend:

(a) $a_n = \frac{2}{n}$;

(b) $a_n = \sum_{s=0}^{n} q^s$;

(c) $a_n = (-2)^{n+1}$;

(d) $a_n = \frac{2n}{3n+1}$;

(e) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2 + \frac{3}{n+4} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$.

Aufgabe 3 — Grenzwerte von Folgen 1

Existieren Grenzwerte für die Folgen in Aufgabe 2(a)–(e)? Wenn ja, welche?

(a) – (e) .

Aufgabe 4 — Konvergenzkriterium

Bestimmen Sie für $\epsilon = \frac{1}{100}$ und $\epsilon = \frac{1}{10000}$ die natürlichen Zahlen n, für die gilt:

(a) $\left| n - \sqrt{n^2+5n+4} + \frac{5}{2} \right| < \epsilon$;

(b) $\left| \frac{3n+2}{n-6} - 3 \right| < \epsilon$.

Aufgabe 5 — Grenzwerte von Folgen 2

Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Hilfe der Rechenregeln:

(a) $a_n = \frac{n-3}{n^2+2n+2}$;

(b) $a_n = \sqrt{n^2-3n+2} - n$;

(c) $a_n = \frac{2n}{3n-2} + \frac{1}{n}$;

(d) $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2+2n}}$;

(e) $a_n = n\left(\sqrt{9n^2-6n+5} - (3n-1)\right)$.

Aufgabe 6 — Folgen und Exponentialfunktion

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte unter Benutzung der Identität

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \ :$$

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n(1-2/n)^n}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{4}{n^2}\right)^n$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n-1}$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{(n-1)^n}$.