
Mathematische Ergänzungen zur Physik

Formelsammlung

Volker Blobel, Günter Poelz und Hans Dierk Rüter

Institut für Experimentalphysik – Universität Hamburg

Hamburg 2005

Man erhält so in unserem Falle die bis $d=1$ konvergente Entwicklung ^(und zur Anrechnung bequemer)
 $z = y - 0,1268 y^2 - 0,0034 y^3 - 0,0005 y^4; \dots$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein
 $\frac{z}{y} = F(y), \dots$

Somit gelten für das ungesättigte ideale Gas, d. h. zwischen $y=0$ und $y=2,615$ die Bezeichnungen

$$\frac{p}{n} = \frac{3}{2} \kappa T F(y) \dots (19c)$$

$$p v = R T \eta F(y); \dots (22c)$$

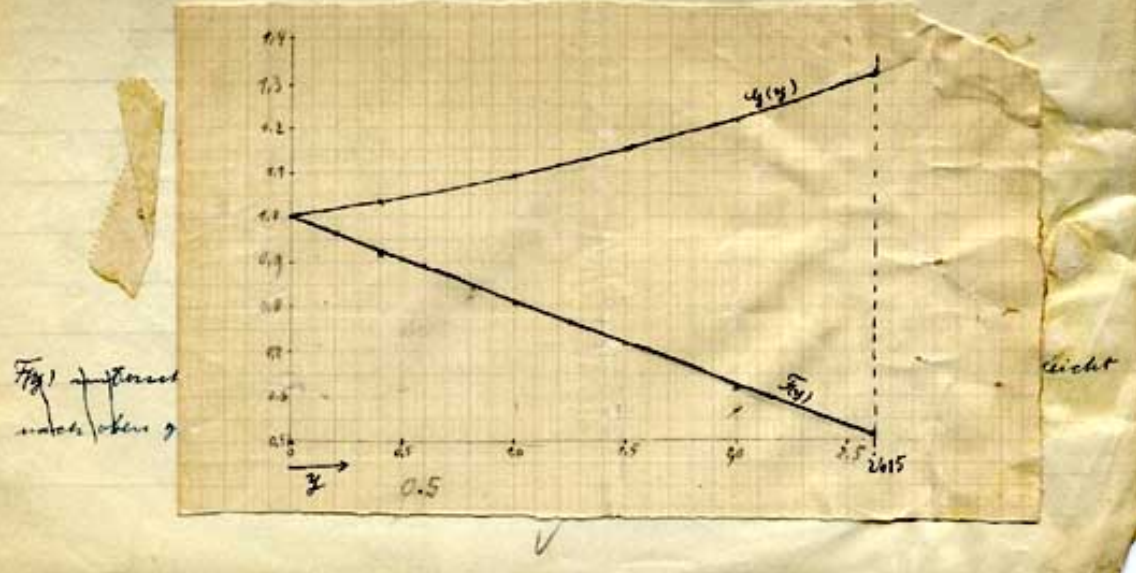
wobei gesetzt ist

$$y = \frac{h^3}{(2\pi m \kappa T)^{3/2}} \frac{n}{V} = \frac{h^3 N \eta}{(2\pi M R T)^{3/2}} \dots (18c)$$

Aus (19b) erhält man für die auf das Mol bezogene spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_v :

$$c_v = \frac{3}{2} R (F(y) - \frac{1}{2} y F'(y)) = \frac{3}{2} R G(y) \dots ()$$

Wir geben zur leichteren Übersicht eine graphische Darstellung der Funktionen $F(y)$ und $G(y)$



Seite aus dem Manuskript "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases - zweite Abhandlung" von Albert Einstein aus dem Jahr 1924. Der Artikel wurde am 9. Februar 1925 gedruckt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einheiten und Konstanten	1
1.1 Einheiten und Einheitensysteme	1
1.2 Abgeleitete Einheiten und Umrechnungsfaktoren	2
1.3 Konstanten	3
2 Zahlen und Gleichungen	5
2.1 Reelle Zahlen	5
2.2 Komplexe Zahlen	6
2.3 Gleichungen n-ten Grades	7
2.4 Determinanten und lineare Gleichungssysteme	9
2.5 Numerische Methoden zur Lösung von Gleichungen	10
3 Vektoren	11
3.1 Skalare, Vektoren, Tensoren	11
3.2 Vektoren	11
3.2.1 Vektoren in Koordinatensystemen	12
3.2.2 Ortsvektoren	12
3.3 Rechenregeln mit Vektoren	13
3.3.1 Addition von Vektoren	13
3.3.2 Multiplikation: Das Skalare Produkt	13
3.3.3 Multiplikation: Das Vektorielle Produkt	14
3.3.4 Mehrfache Produkte	15
3.3.5 Anwendungen auf geometrische Probleme	15
4 Lineare Algebra	17
4.1 Matrizen	17
4.2 Drehungen	19
5 Zahlenfolgen und unendliche Reihen	21
5.1 Folgen	21
5.2 Unendliche Reihen	22
5.3 Formeln	22

6 Funktionen	24
6.1 Der Funktionsbegriff	24
6.2 Polynome und rationale Funktionen	25
6.3 Exponential- und Logarithmusfunktion	26
6.4 Trigonometrische Funktionen	28
6.5 Hyperbelfunktionen	29
6.6 Fakultät und Gammafunktion	30
7 Differentialrechnung	31
7.1 Definitionen und Ableitungen der elementaren Funktionen	31
7.2 Differentiationsregeln	33
7.3 Grenzwert einer Funktion mit nicht definiertem Wert	34
7.4 Vektorwertige Funktionen	34
7.5 Funktionen mehrerer Veränderlicher	36
8 Integralrechnung	40
8.1 Integration von Funktionen einer Veränderlichen	40
8.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung	44
8.3 Taylorentwicklung	44
8.4 Integralfunktionen	45
8.5 Numerische Berechnung von Integralen	45
8.6 Uneigentliche Integrale	46
8.7 Integration von Funktionen mehrerer Variablen	46
8.7.1 Kurvenintegral über skalares Feld	46
8.7.2 Kurvenintegral über Vektorfeld	47
8.7.3 Gebietsintegrale	48
9 Differentialgleichungen	50
9.1 Einteilung der Differentialgleichungen	50
9.2 Differentialgleichungen 1.Ordnung	50
9.3 Lineare Differentialgleichungen	51
10 Statistik	56
10.1 Wahrscheinlichkeit	56
10.2 Zufallsvariable	57
10.3 Funktionen von Zufallsvariablen	60
10.4 Auswertung von Messungen	61
11 Vektoranalysis	64
11.1 Felder	64
11.2 Gradient und Kurvenintegral	65
11.3 Divergenz, Flächenintegral und Gaußscher Satz	67
11.4 Rotation und Stokesscher Satz	71
11.5 Regeln für Differentialoperatoren	73
11.6 Eigenschaften von Wirbel- und Gradientenfeldern	75
11.7 Krummlinige Koordinaten	76
11.8 Greensche Sätze	84
11.9 Potentiale	84

12 Schwingungen und Wellen	91
12.1 Definitionen	91
12.2 Harmonische Wellen	92
12.3 Spezielle Wellen	93
13 Systeme orthogonaler Funktionen	95
13.1 Die Fourier - Reihe	95
13.2 Konvergenz der Fourier - Reihe	96
13.3 Beispiele für Fourier-Zerlegungen	97
13.4 Das Gibbssche Phänomen	102
13.5 Die Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise	103
13.6 Die diskrete Fourier-Transformation	103
13.7 Das Fourier-Integral	104
13.7.1 Das Fourier-Integral im 3-dimensionalen Raum	105
13.7.2 Das Fourier-Integral bei Kugelsymmetrie	105
13.7.3 Die diskrete Fourier-Transformation bei Kugelsymmetrie	105
13.8 Beispiele für Fourier-Zerlegungen von Impulsen	106

Kapitel 1

Einheiten und Konstanten

1.1 Einheiten und Einheitensysteme

Meßbare Merkmale physikalischer Objekte heißen physikalische Größen. Das Messen einer Größe erfolgt durch Vergleich mit einer Größe gleicher Art. Die Vergleichsgröße heißt Einheit; die Zahl, die das Vielfache angibt, heißt Zahlenwert:

$$\begin{aligned} \text{Größe} &= \text{Zahlenwert} \times \text{Einheit} \\ G &= \{G\} [G] \end{aligned}$$

Wird eine Größe einmal in der Einheit $[G]_1$, und einmal in der Einheit $[G]_2$ gemessen, dann ist

$$G = \{G\}_1 [G]_1 = \{G\}_2 [G]_2 \quad \text{und} \quad \frac{\{G\}_1}{\{G\}_2} = \frac{[G]_2}{[G]_1}.$$

In Größengleichungen werden verschiedene Größen miteinander verknüpft, entweder aus experimenteller Erfahrung oder durch willkürliche Definition. Größengleichungen haben die Form von Potenzprodukten

$$G = k A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots$$

mit einem Zahlenfaktor k . Ersetzt man die Größen durch ihre Produkte aus Zahlenwert und Einheit, so erhält man eine Einheitengleichung

$$[G] = \xi [A]^\alpha [B]^\beta [C]^\gamma \dots$$

und eine Zahlenwertgleichung

$$\{G\} = \frac{k}{\xi} \{A\}^\alpha \{B\}^\beta \{C\}^\gamma \dots$$

Der Einheitenkoeffizient ξ verknüpft die Einheiten der linken und rechten Seiten der Gleichung; ein Einheitensystem, bei dem der Einheitenkoeffizient gleich 1 ist, heißt kohärentes System. Zu unterscheiden sind Definitionen, die willkürlich sind und keine neue Naturerkenntnis darstellen, und gefundene gesetzmäßige Abhängigkeiten, die ein Naturgesetz darstellen. In der Vergangenheit wurden viele verschiedene Einheitensysteme benutzt, sie entwickelten sich parallel zur physikalischen Erkenntnis. Liegen in einem abgeschlossenen Gebiet n unabhängige Naturgesetze vor, und enthalten diese m voneinander unabhängige Größen, dann müssen $g = m - n$ Größen zu Grundgrößen erklärt werden, wobei g der Grad des Maßsystems ist. Das System Internationaler Einheiten (SI) ist ein kohärentes Siebenersystem. Es ist heute allgemein gesetzlich verankert.

Größe Name	Symbol	Einheit Name	Symbol
Länge	l	Meter	m
Zeit	t	Sekunde	s
Masse	m	Kilogramm	kg
elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

Für dezimale Vielfache oder Teile der SI-Einheiten sind Vorsätze zu den Einheiten festgelegt. Die Dekadenzeichen bilden mit den Einheitenzeichen eine neue Einheit, so ist z.B. $5\text{hm}^3 = 5(10^2\text{m})^3 = 5 \cdot 10^6\text{m}^3$.

Vorsilbe	Zeichen	Zehnerpotenz	Vorsilbe	Zeichen	Zehnerpotenz
Deka	da	10^1	Dezi	d	10^{-1}
Hekto	h	10^2	Zenti	c	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Milli	m	10^{-3}
Mega	M	10^6	Mikro	μ	10^{-6}
Giga	G	10^9	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Piko	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto	a	10^{-18}

1.2 Abgeleitete Einheiten und Umrechnungsfaktoren

Im System Internationaler Einheiten (SI) gibt eine große Zahl aus den Basiseinheiten abgeleiteter Einheiten. Einige der abgeleiteten Einheiten haben eigene Namen erhalten.

Grösse		Einheit		
Name	Symbol	Name	Symbol	
Flächeninhalt	A	-	-	m^2
Volumen	V	-	-	m^3
ebener Winkel	φ	Radian	rad	
Raumwinkel	Ω	Steradian	sr	
Geschwindigkeit	v	-	-	m s^{-1}
Winkelgeschw., Kreisfrequenz	ω	-	-	s^{-1}
Beschleunigung	a	-	-	m s^{-2}
Winkelbeschl.	α	-	-	s^{-2}
Frequenz	ν, f	Hertz	Hz	s^{-1}
Kraft, Gewicht	F	Newton	N	kg m s^{-2}
Dichte	ρ	-	-	kg m^{-3}
Impuls	p	-	-	kg m s^{-1}
Drehimpuls	L	-	-	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$
Trägheitsmoment	J	-	-	kg m^2
Drehmoment	M, τ	-	-	N m
Druck	p	Pascal	Pa	N m^{-2}
dynam. Viskosität	η	-	-	Pa s
kinem. Viskosität	ν	-	-	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
Energie, Arbeit	E, W	Joule	J	N m
Leistung, Strahlungsfluß	P	Watt	W	J s^{-1}
Wärmemenge	Q	Joule	J	
Wärmekapazität	C	-	-	J K^{-1}
Entropie	S	-	-	J K^{-1}

Bemerkung: Das Normgewicht eines Körpers ist definiert als Produkt aus seiner Masse und der Normfallbeschleunigung g_n , die als $g_n = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$ definiert ist.

Grösse Name	Symbol	Einheit Name	Symbol	
elektr. Ladung	q, Q	Coulomb	C	A s
Potentialdifferenz	U, V	Volt	V	J C ⁻¹
elektr. Widerstand	R	Ohm	Ω	V A ⁻¹
elektr. Leitwert	G	Siemens	S	V ⁻¹ A
Kapazität	C	Farad	F	C V ⁻¹
elektr. Feldstärke	E	-	-	V m ⁻¹
elektr. Flußdichte	D	-	-	C m ⁻²
Permittivität	ϵ	-	-	N ⁻¹ m ⁻² C ²
elektr. Leistung	P	Watt	W	V A
magnet. Fluß	Φ	Weber	Wb	V s
magnet. Flußdichte	B	Tesla	T	Wb m ⁻²
magnet. Erregung	H	-	-	A m ⁻¹
Permeabilität	μ	-	-	m kg C ⁻²
Induktivität	L	Henry	H	Wb A ⁻¹
Lichtstrom	Φ	Lumen	lm	cd sr
Beleuchtungsstärke	E	Lux	lx	lm m ⁻²

Bemerkung: Die magnetische Flußdichte hat den Charakter einer Feldstärke. Die magnetische Flußdichte B (auch Induktion genannt) und die magnetische Erregung H sind (im Vakuum) verknüpft durch die Beziehung $B = \mu_0 H$, wobei μ_0 die Permeabilität des Vakuums ist, mit

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2} = 12.566 \cdot 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2}$$

Die elektrische Feldstärke E und die elektrische Flußdichte D sind (im Vakuum) verknüpft durch die Beziehung $D = \epsilon_0 E$, wobei ϵ_0 die Permittivität des Vakuums ist, mit

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c_{m/s}^2} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$$

Damit ist $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2$. Die elektrische Feldkonstante ist

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 10^{-7} c_{m/s}^2 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} = 8.9876 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

In der Physik sind neben den SI-Einheiten zusätzlich eine Reihe anderer Einheiten in Gebrauch. Die folgende Tabelle gibt Umrechnungsfaktoren.

1 Fermi	= $10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$	1 Torr	= $1.333\,224 \cdot 10^2 \text{ Pa}$
1 Ångström (Å)	= 10^{-10} m	1 bar	= 10^5 Pa
1 Lichtjahr	= $9.46 \cdot 10^{12} \text{ km} = 0.3066 \text{ pc}$	1 at (techn)	= $9.806\,65 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
1 parsec (pc)	= $3.086 \cdot 10^{13} \text{ km}$	1 atm (phys)	= $1.013\,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
1 radian (rad)	= $57.295\,779\,51^\circ = (180/\pi)^\circ$	1 kWh	= $3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$
1 Tonne	= 1000 kg	1 Gauß	= 10^{-4} T
1 Jahr (sider.)	= $3.1558 \cdot 10^7 \text{ s}$	1 Maxwell	= 10^{-8} Wb
1 cal	= $4.186\,8 \text{ J}$	1 (Ersted)	= $1/4\pi \cdot 10^3 \text{ A m}^{-1}$
1 °C	= 1 K	1 km/h	= 0.2778 m s^{-1}

Nullpunkt der absoluten Temperaturskala: 0 K entspricht $-273,15^\circ \text{ C}$.

1.3 Konstanten

Naturkonstanten:

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2.997\,924\,58 \cdot 10^8$	m s^{-1}
Elementarladung	e	$1.602\,177\,3 \cdot 10^{-19}$	C
Plancksche Konstante	h	$6.626\,075\,5 \cdot 10^{-34}$	J s
Plancksche Konstante/ 2π	\hbar	$1.054\,572\,66 \cdot 10^{-34}$	J s
Gravitationskonstante	γ	$6.672\,60 \cdot 10^{-11}$	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$
Boltzmannkonstante	k	$1.380\,658 \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}
Avogadrosche Zahl	N_A	$6.022\,136\,7 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Molare Gaskonstante	$R = N_A k$	8.314 510	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
Bohrscher Radius	a_0	$5.291\,772\,49 \cdot 10^{-10}$	m
Bohrsches Magneton	μ_B	$9.274\,015\,4 \cdot 10^{-24}$	J T^{-1}

Konstanten, ausgedrückt durch die Einheit eV:

Elektronenvolt	eV	$1.602\,177\,33 \cdot 10^{-19}$	J
Plancksche Konstante	h	$4.135\,669\,2 \cdot 10^{-15}$	eV s
Plancksche Konstante/ 2π	\hbar	$6.582\,122\,0 \cdot 10^{-16}$	eV s
	$\hbar c$	$197.327\,05 \cdot 10^{-9}$	eV m
Boltzmannkonstante	k	$8,617\,386 \cdot 10^{-5}$	eV K^{-1}

Massen. Teilchenmassen werden in der atomaren Masseneinheit u, in der das Isotop ^{12}C definitionsgemäß die Masse 12 u hat, und als Ruheenergien ($E = m c^2$) in MeV angegeben:

Teilchen	kg	u	MeV
Einheit u	$1.660\,540\,2 \cdot 10^{-27}$	1.0	931.494
Elektron	$9.109\,389\,7 \cdot 10^{-31}$	$5.485\,799\,03 \cdot 10^{-4}$	0.510 999 06
Proton	$1.672\,623\,1 \cdot 10^{-27}$	1.007 276 470	938.272 31
Neutron	$1.674\,928\,6 \cdot 10^{-27}$	1.008 664 904	939.565 63
Deuteron	$3.343\,586\,0 \cdot 10^{-27}$	2.013 553 214	1875.613 40

Numerische Konstanten:

$\pi = 3.141\,593$	$180/\pi = 57.295\,780$	$\sqrt{\pi} = 1.772\,454$
$e = 2.718\,282$	$1/e = 0.367\,879$	$\sqrt{2} = 1.414\,214$
$\ln 2 = 0.693\,147$	$\ln 10 = 2.302\,585$	$\sqrt{3} = 1.732\,051$
$\log 2 = 0.301\,030$	$\log e = 0.434\,294$	$\sqrt{10} = 3.162\,278$

Kapitel 2

Zahlen und Gleichungen

2.1 Reelle Zahlen

Die Menge \mathbf{R} der reellen Zahlen setzt sich zusammen aus den rationalen und den irrationalen Zahlen. Die Mengen der natürlichen Zahlen \mathbf{N} , der ganzen Zahlen \mathbf{Z} und der rationalen Zahlen \mathbf{Q} ,

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{Natürliche Zahlen} \\ \mathbf{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} && \text{Ganze Zahlen} \\ \mathbf{Q} &= \{p/q; p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\} && \text{Rationale Zahlen}\end{aligned}$$

sind jeweils Untermengen gemäß

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Grundlegende Regeln der Algebra:

$$\begin{array}{llll} a + b = b + a & & a \cdot b = b \cdot a & \text{Kommutativgesetz} \\ a + (b + c) = (a + b) + c & & a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & \text{Assoziativgesetz} \\ & & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c & \text{Distributivgesetz} \\ a + 0 = a & & a \cdot 1 = a & \end{array}$$

Jede der vier Grundrechnungsarten kann in \mathbf{Q} unbeschränkt ausgeführt werden (Ausnahme: Division durch Null), keine führt aus dem Bereich der rationalen Zahlen heraus. Jede rationale Zahl kann auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Umgekehrt kann jedoch nicht jede Strecke auf der Zahlengeraden durch eine rationale Zahl dargestellt werden, z.B. ist $\sqrt{2}$ (= Diagonale im Quadrat der Seitenlänge 1) keine rationale Zahl. Um jede Strecke auf der Zahlengeraden durch eine Zahl darstellen zu können, muß die Menge der rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen zur Menge der reellen Zahlen erweitert werden.

Die reellen Zahlen können mit den Punkten auf der unendlichen Zahlengeraden identifiziert werden. Die grundlegenden Regeln der Algebra gelten auch für die reellen Zahlen. Jede nicht leere und nach oben (unten) beschränkte Teilmenge S von \mathbf{R} besitzt in \mathbf{R} eine kleinste obere (größte untere) Schranke.

Schranken. M heißt obere Schranke für eine beliebige Zahlenmenge S , wenn kein Element aus S größer ist als M . Existiert eine solche Schranke, heißt die Menge S nach oben beschränkt (analog: untere Schranke, nach unten beschränkt). Für eine nach oben (unten) beschränkte Menge von rationalen Zahlen gibt es nicht immer eine rationale Zahl als kleinste obere (größte untere) Schranke. Beispiel ist die Menge aller rationalen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 2 ist. Jede irrationale Zahl kann jedoch beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden, z.B. durch Dezimalzahlen.

Anordnungspostulate für reelle Zahlen:

1. Für jedes x gilt eine der folgenden Aussagen: $x < 0$ oder $x > 0$ oder $x = 0$.
2. Für x, y gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $y - x \geq 0$ ist.
3. Für x, y gilt: ist $x \geq 0$ und $y \geq 0$, so ist auch $x + y \geq 0$ und $x \cdot y \geq 0$.

2.2 Komplexe Zahlen

Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ haben in der Menge \mathbf{R} der reellen Zahlen keine Lösung. Formal läßt sich durch Einführung der Größe i ($i =$ imaginäre Einheit) mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

eine Lösung für die obige Gleichung und analoge Gleichungen definieren.

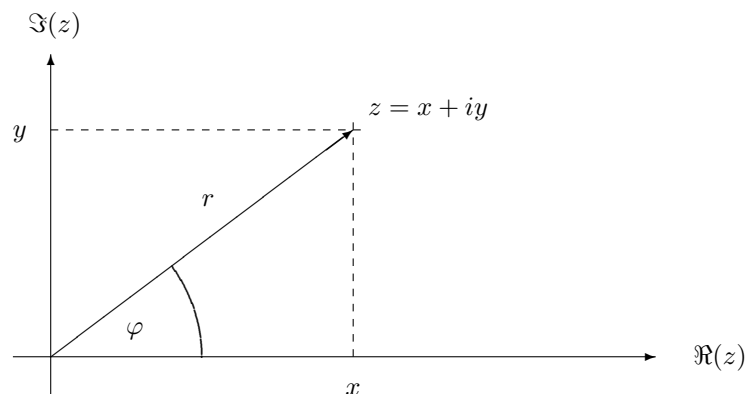
Definition der komplexen Zahlen:

$$z = x + iy = (x, y) \quad \mathbf{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbf{R}\}.$$

$x = \Re(z)$ heißt Realteil von z , und $y = \Im(z)$ heißt Imaginärteil von z . Komplexe Zahlen z lassen sich durch ein reelles Zahlenpaar festlegen und in der Gaußschen Zahlenebene mit einer reellen Achse und einer dazu senkrechten imaginären Achse veranschaulichen. Komplexe Zahlen z mit $\Re(z) = 0$ heißen rein imaginär. Zwei komplexe Zahlen heißen zueinander konjugiert komplex, wenn ihre Realteile gleich und ihre Imaginärteile dem Betrage nach gleich sind, jedoch verschiedene Vorzeichen haben. Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl $x - iy$ wird mit z^* bezeichnet. Der Betrag einer komplexen Zahl ist

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z^*z}$$

und ist in der komplexen Zahlenebene ein Maß für die Länge der Strecke vom Nullpunkt zum Punkt z .



Neben der Darstellung durch Real- und Imaginärteil in der algebraischen Schreibweise $z = x + iy$ wird auch die trigonometrische Schreibweise

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

mit dem Betrag $|z| = r$ und dem Argument φ benutzt:

$$\begin{aligned} \text{Betrag von } z &= |z| = r \\ \text{Argument von } z &= \varphi = \arg z = \arcsin y/r = \arccos x/r = \arctan y/x \end{aligned}$$

Für $z = 0$ ist das Argument $\arg z$ unbestimmt. Für den Hauptwert des Arguments gilt: $-\pi < \varphi \leq \pi$. Ungleichungen wie $z_1 < z_2$ haben für komplexe Zahlen z_1 und z_2 keinen Sinn, verglichen werden können jedoch Beträge komplexer Zahlen. Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Addition und Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1r_2[(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned}$$

Inverse komplexe Zahlen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{1 + i0}{x_2 + iy_2} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{1}{r_2}(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) \\ \left| \frac{1}{z_2} \right| &= \frac{1}{|z_2|} \quad \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = -\arg z_2 \end{aligned}$$

Division:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \end{aligned}$$

Komplexe Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \\ e^{iy} &= \cos y + i \sin y \quad \text{Eulersche Formel} \\ |e^z| &= e^x = e^{\Re(z)} \quad \arg e^z = y = \Im(z) \end{aligned}$$

Aus der Eulerschen Formel folgt die Moivre-Formel:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der Periode $i2\pi$ und kann zur Darstellung der reellen Cosinus- und Sinus-Funktionen benutzt werden:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y & e^{-iy} &= \cos y - i \sin y \\ \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} & \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{aligned}$$

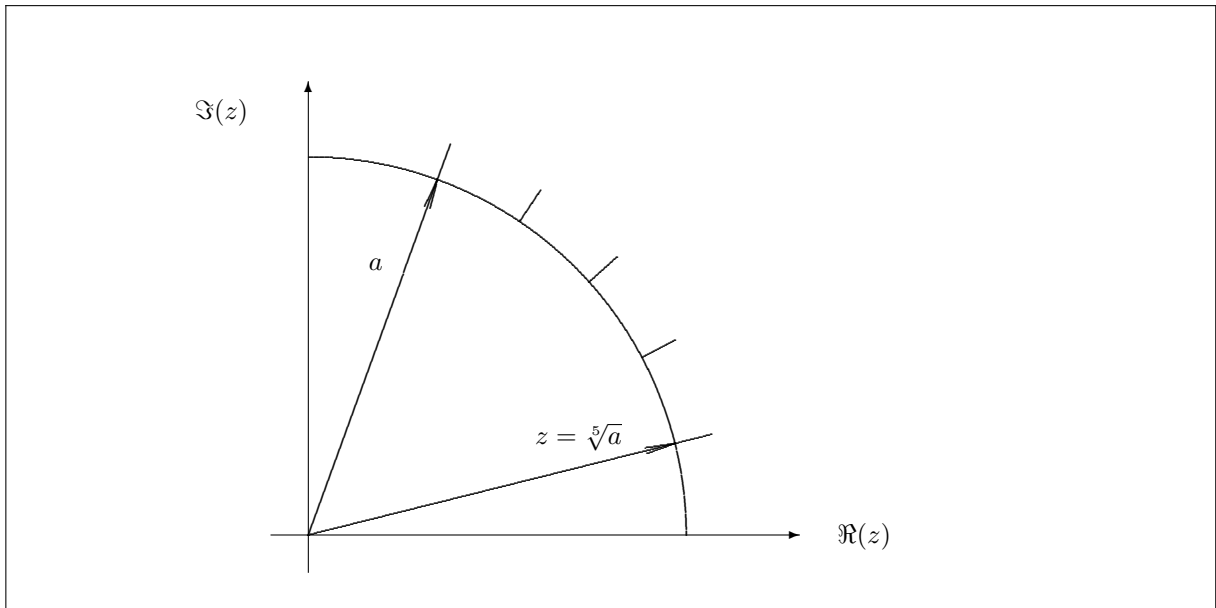
2.3 Gleichungen n-ten Grades

Gleichungen der Form

$$z^n = a$$

können für komplexe und reelle Werte a gelöst werden. Es gibt genau n Lösungen; diese heißen n -te Wurzeln von a , geschrieben $\sqrt[n]{a}$. Die Lösungen basieren auf der Moivre-Formel (siehe oben). Wird a dargestellt in der trigonometrischen Schreibweise mit Betrag r und Argument φ , also $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, so ist

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \right] \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$



Quadratische Gleichungen

Die Anzahl reeller Lösungen (Wurzeln) einer quadratischen Gleichung

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

hängt vom Wert der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ab:

$$D \begin{cases} > 0 & \text{zwei reelle Lösungen} \\ = 0 & \text{eine reelle Lösung (Doppelwurzel)} \\ < 0 & \text{keine reelle Lösung} \end{cases}$$

Lösungsformel für $D \geq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{D}}$$

Die Eigenschaften

$$x_1 + x_2 = -b/a \qquad x_1 \cdot x_2 = c/a$$

folgen aus dem Vergleich mit der Darstellung $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Für negative Werte von D erhält man zwei komplexe Lösungen, indem man in der Lösungsformel \sqrt{D} durch $i\sqrt{-D}$ ersetzt.

Gleichungen höheren Grades

Gleichungen n -ten Grades der Form

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

haben allgemein genau n reelle oder komplexe Lösungen, wobei k -fache Lösungen k -fach gezählt werden. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Wurzeln und k, l, m, \dots die Vielfachheiten, so ist

$$P(x) = a_n (x - \alpha)^k (x - \beta)^l (x - \gamma)^m \dots$$

Für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ gibt es noch Formeln für die Berechnung der Wurzeln, die jedoch recht kompliziert sind. Allgemein können numerische Verfahren angewendet werden (s. Kap. 2.5).

2.4 Determinanten und lineare Gleichungssysteme

Determinanten

Die Determinante n -ter Ordnung ist eine Zahl D , die sich aus den n^2 Zahlen einer Anordnung aus n Zeilen und n Spalten ergibt.

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Eigenschaften der Determinante:

1. Die Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man in ihr die Zeilen mit den Spalten vertauscht (die folgenden Eigenschaften gelten daher auch für Spalten).
2. Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen vertauscht, und hat den Wert 0, wenn zwei Zeilen gleich oder einander proportional sind, oder wenn eine Zeile die Linearkombination anderer Zeilen ist. Addiert man zu einer Zeile die Elemente einer anderen Zeile, bleibt der Wert der Determinante ungeändert.
3. Ein allen Elementen einer Zeile gemeinsamer Faktor kann vor die Determinante gezogen werden.

Berechnung der Determinante:

$$D = |a_{ij}| = \sum_{\text{Perm}} (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

wobei sich die Summe über alle $n!$ Permutationen $j_1, j_2 \dots j_n$ der Zahlen $1, 2 \dots n$ erstreckt; das Vorzeichen $(-1)^k$ ergibt sich aus der Anzahl k der Inversionen in der Permutation. Speziell gilt:

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminante des Elements a_{ij} ist die Determinante $(n-1)$ -ter Ordnung, die sich durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte ergibt. Das algebraische Komplement A_{ij} des Elements a_{ij} ist die mit dem Faktor $(-1)^{i+j}$ multiplizierte Unterdeterminante des Elements a_{ij} . Allgemein kann eine Determinante n -ter Ordnung durch Determinanten $(n-1)$ ter Ordnung ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} & i &= 1, \dots, n \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} & j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen für n Unbekannte x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

kann mit Hilfe von Determinanten bestimmt werden. Der Rechenaufwand wird für größere n ($n > 3$) sehr groß und es sollten dann andere Verfahren benutzt werden. $D = |a_{ij}|$ heißt Koeffizientendeterminante des Systems, D_j ist die Determinante, die sich ergibt, wenn die Spalte j der Koeffizienten a_{ij} durch die Spalte der b_i ersetzt wird, z.B.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wenn wenigstens ein b_i von 0 verschieden ist, heißt das System inhomogen. Wenn die Koeffizientendeterminante des Systems ungleich 0 ist, hat das System genau eine Lösung. Die Werte x_i ergeben sich nach der Formel (Kramersche Regel)

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Ist D gleich 0 und sind nicht alle D_i gleich 0, so ist das System unlösbar (Widerspruch in den Gleichungen). Wenn alle $b_i = 0$ sind, heißt das System homogen. Damit ein homogenes System außer der trivialen Lösung $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ noch weitere Lösungen besitzt, muß gelten: $D = 0$. Auch alle Linearkombinationen sind Lösungen des Systems.

2.5 Numerische Methoden zur Lösung von Gleichungen

Nullstellen von Funktionen $f(x)$, d.h. Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ können allgemein mit numerischen Methoden bestimmt werden. Angenäherte Lösungen lassen sich graphisch oder durch Probieren ermitteln.

Regula falsi

Ist die Funktion $f(x)$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so liegt zwischen a und b mindestens eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Mit der Regula falsi genannten Methode der linearen Interpolation

$$\tilde{x} = a - f(a) \frac{a - b}{f(a) - f(b)}$$

läßt sich ein Näherungswert \tilde{x} berechnen. Dieser kann je nach Vorzeichen von $f(\tilde{x})$ einen der beiden Werte a oder b ersetzen und bei erneuter Anwendung der Formel einen besseren Schätzwert liefern. Die Werte a und b stellen Schranken für die Lösung dar, die beliebig eng gemacht werden können.

Iterationsverfahren

Es sei x_0 ein Näherungswert für eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Nach Umstellen der Gleichung auf die Form $x = g(x)$ lassen sich durch mehrfache Anwendung der Formel

$$x_{j+1} = g(x_j) \quad j = 0, 1, \dots$$

aus einem Näherungswert x_0 iterativ genauere Näherungswerte gewinnen; das Verfahren führt zur Lösung (konvergiert gegen die Wurzel), wenn zwischen der Wurzel und dem ersten Näherungswert x_0 die Bedingung $|g'(x)| < 1$ gilt. Oft läßt sich diese Bedingung durch Umstellen erreichen.

Newton-Verfahren

Ein allgemeines Iterationsverfahren für differenzierbare Funktionen ist das Newton-Verfahren:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x)|_{x_j}}{f'(x)|_{x_j}} \quad j = 0, 1, \dots$$

Die Formel beruht auf der Näherung der Funktion durch eine Gerade durch den Punkt $(x_j, f(x_j))$ mit der Steigung der Tangente. Das Verfahren konvergiert bei einfachen Wurzeln, wenn der erste Näherungswert x_0 nahe bei der Wurzel liegt.

Kapitel 3

Vektoren

3.1 Skalare, Vektoren, Tensoren

Viele physikalische Größen lassen sich bei bekannter Maßeinheit durch Angabe ihres Betrages als reelle Zahl vollständig angeben. Solche Größen nennt man Skalare, Beispiele sind Masse und Temperatur. Andere physikalischen Größen erfordern zur vollständigen Festlegung drei Zahlenangaben, z.B. die geradlinige Verschiebung eines Punktes aus einer Anfangslage. Diese Verschiebung kann angegeben werden durch den Betrag und die Richtung (zwei Winkel), oder durch die drei Komponenten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (drei einfach indizierte Komponenten). Physikalische Größen, die wie die Verschiebung durch Angabe von Betrag und Richtung im Raume festgelegt sind, und demselben Additionsgesetz wie die Verschiebung gehorchen, nennt man Vektoren. Physikalische Formeln verbinden einzelne Größen miteinander. Durch die Vektorschreibweise können viele Zusammenhänge auf eine kurze, prägnante Form gebracht werden. Dabei ist die Formulierung eines Gesetzes unabhängig von der Wahl eines speziellen Koordinatensystems; erst bei der numerischen Auswertung muß ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde gelegt werden.

Neben den skalaren Größen und den Vektoren gibt es in der Physik noch Tensoren. Sie werden durch Matrizen dargestellt (s. Kap. 4.1), die durch ein lineares Gleichungssystem einen bestimmten Vektor in einen anderen transformieren. Das Urbild des Tensors ist der Spannungszustand in einem festen Körper. Ein solcher 2-dimensionaler Tensor (genauer: Tensor 2. Stufe) kann durch zweifach indizierte Komponenten (insgesamt 9 Komponenten) angegeben werden. In der Physik treten auch Tensoren dritter und noch höherer Stufe auf, mit entsprechend vielfach indizierten Komponenten. Vektoren können als Tensoren 1. Stufe aufgefaßt werden.

3.2 Vektoren

In der Physik werden Vektoren vorwiegend für die Darstellung gerichteter Größen, z.B. für eine Verschiebung verwendet. Im Gegensatz zum Skalar bestimmen mehrere Skalare einen Vektor. Diese können, wie unten aufgeführt wird, Koordinaten, oder wie bei einer Verschiebung räumliche Richtung und Länge des Vektors sein.

Hier verwendete Nomenklatur

Vektor a : \vec{a}

Betrag von \vec{a} : $|\vec{a}| \equiv a$. Dies ist die Länge des Vektors.

Einheitsvektor: \vec{u} . $|\vec{u}| = 1$.

Der Nullvektor hat den Betrag 0, seine Richtung ist unbestimmt.

Wie bei einer Verschiebung ist die Lage eines Vektors im Raum beliebig. Nur Richtung und Länge charakterisieren ihn (Ausnahme: Ortsvektoren; s. Abschnitt 3.2.2).

3.2.1 Vektoren in Koordinatensystemen

Führt man durch Achsen, die sich im Ursprung schneiden, ein Koordinatensystem ein, so kann man Vektoren durch ihre Komponenten angeben. Beispielsweise im dreidimensionalen Raum (x_1, x_2, x_3) :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) && \text{mit} \\ a_1 &= a_{1e} - a_{1a} \\ a_2 &= a_{2e} - a_{2a} \\ a_3 &= a_{3e} - a_{3a}\end{aligned}$$

Die Indices a und e stehen für Anfang (Fußpunkt) und Ende (Spitze) des Vektors.

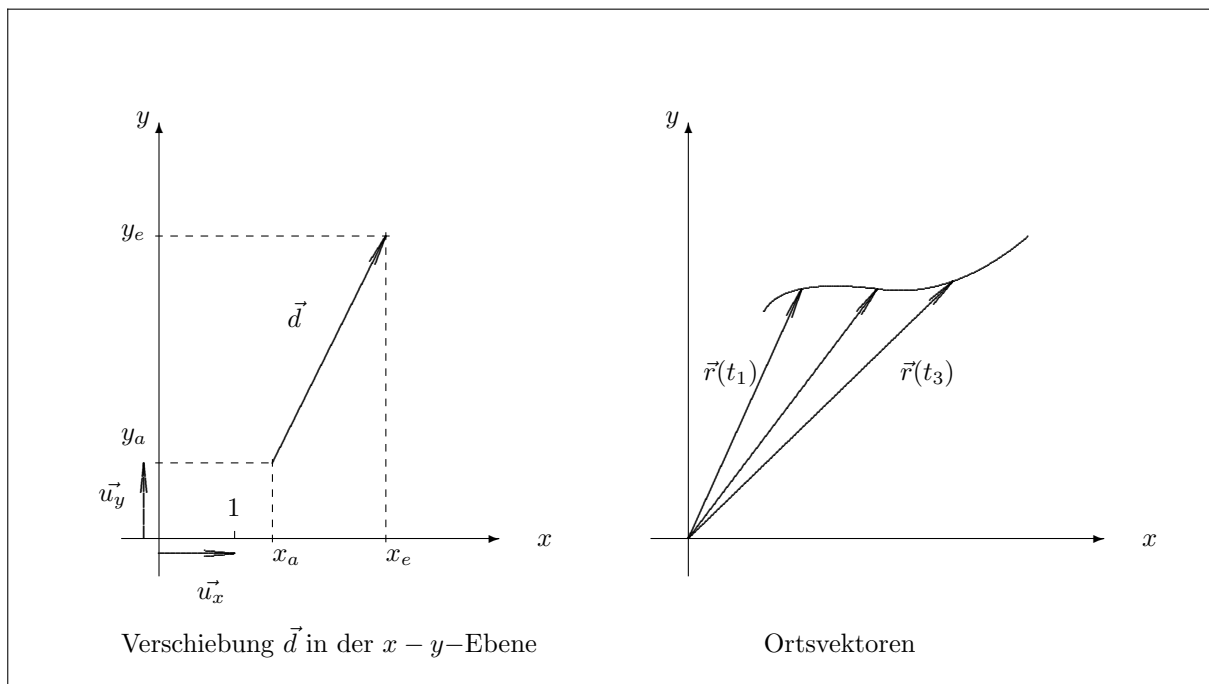
Die Einheitsvektoren \vec{u}_1 bis \vec{u}_3 in Richtung der Achsen bilden die Basis des Koordinatensystems.

Im **kartesischen Koordinatensystem** stehen die Koordinatenachsen paarweise senkrecht aufeinander. Man bezeichnet die Koordinatenachsen häufig durch x , y und z und beschreibt den Vektor \vec{a} durch $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Der **Betrag** dieses Vektors errechnet sich durch

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Üblicherweise definiert man das kartesische Koordinatensystem als Rechtssystem. D.h. wird die 1. Achse (x -Achse) um 90° in die 2. Achse (y -Achse) gedreht, so würde sich eine auf der 3. Achse (z -Achse) liegende, mitdrehende Rechtsschraube in positive z -Richtung fortbewegen.

Die Darstellung von Vektoren in Polar-, Kugel- bzw. Zylinderkoordinaten wird im 2. Teil dieser Formelsammlung beschrieben.



3.2.2 Ortsvektoren

Ortsvektoren sind spezielle Vektoren, deren Fußpunkte alle im Koordinatenursprung liegen. Die Spitze von $\vec{r} = (x, y, z)$ gibt die Position des Punktes $P = (x, y, z)$ an. Ändert sich der Ortsvektor mit der Zeit, so beschreibt $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eine Bahnkurve.

3.3 Rechenregeln mit Vektoren

3.3.1 Addition von Vektoren

Zwei Verschiebungen \vec{a} und \vec{b} nacheinander ausgeführt entsprechen einer einzigen Verschiebung \vec{c} . Man beschreibt dies durch die Vektoraddition

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

und in Komponenten z.B. im kartesischen Koordinatensystem

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Die Vektoraddition ist kommutativ:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Der Vektor $-\vec{a}$ hat den gleichen Betrag wie \vec{a} , jedoch entgegengesetzte Richtung; es gilt $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$. Die mehrfache Addition des selben Vektors führt zu der Multiplikation mit einem Skalar:

$$\vec{c} = h\vec{a} = (h \cdot a_x, h \cdot a_y, h \cdot a_z).$$

Der Vektor \vec{c} hat die gleiche Richtung wie der Vektor \vec{a} . Die Länge ist um den Faktor h gedehnt: $c = ha$.

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} heißen kollinear (oder linear abhängig), wenn es zwei Zahlen h_1 und h_2 gibt, mit denen $h_1\vec{a} + h_2\vec{b} = 0$ erreicht werden kann.

Drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} heißen koplanar (oder linear abhängig), wenn es drei Zahlen h_1 , h_2 und h_3 gibt, mit denen $h_1\vec{a} + h_2\vec{b} + h_3\vec{c} = 0$ erreicht werden kann.

Drei nichtkoplanare Vektoren heißen linear unabhängig. Jeder Vektor im dreidimensionalen Raum kann durch eine Linearkombination von drei linear unabhängigen Vektoren dargestellt werden. Z.B. sind die Einheitsvektoren parallel zu den Achsen in einem kartesischen Bezugssystem \vec{u}_x , \vec{u}_y und \vec{u}_z linear unabhängig.

Jeder Vektor \vec{a} kann als Linearkombination der Einheitsvektoren dargestellt werden:

$$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z.$$

3.3.2 Multiplikation: Das Skalare Produkt

Das skalare Produkt $\vec{a}\vec{b}$ (auch inneres Produkt genannt) der Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist ein Skalar, der definiert ist durch

$$\vec{a}\vec{b} = ab \cos \varphi,$$

wobei φ der von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ist.

Übliche Schreibweisen sind auch

$$\vec{a}\vec{b} \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

Für die Einheitsvektoren $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gilt:

$$\vec{u}_x\vec{u}_x = \vec{u}_y\vec{u}_y = \vec{u}_z\vec{u}_z = 1 \quad \vec{u}_x\vec{u}_y = \vec{u}_y\vec{u}_z = \vec{u}_z\vec{u}_x = 0.$$

Es gilt das Distributivgesetz

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Daraus erhält man die Berechnung des Skalarprodukts über die Komponenten

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= (a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z)(b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z) \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \end{aligned}$$

Es bedeutet anschaulich, $a \cdot (b \cos \varphi)$, daß a mit der Projektion von \vec{b} auf die \vec{a} -Richtung multipliziert wird. Analoges gilt für den gleichwertigen Ausdruck $(a \cos \varphi) \cdot b$. Weil die Komponenten eines Vektors die Projektionen auf die Achsen sind, kann man sie durch Skalarprodukte berechnen:

$$\begin{aligned} a_x &= \vec{a}\vec{u}_x; \\ a_y &= \vec{a}\vec{u}_y; \\ a_z &= \vec{a}\vec{u}_z; \end{aligned}$$

d.h.

$$\vec{a} = (\vec{a}\vec{u}_x)\vec{u}_x + (\vec{a}\vec{u}_y)\vec{u}_y + (\vec{a}\vec{u}_z)\vec{u}_z.$$

Weitere Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= \vec{b}\vec{a} & |\vec{a}\vec{b}| &\leq |\vec{a}||\vec{b}| \\ \vec{a}\vec{a} &= a^2 \geq 0 & \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) &\neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} &= 0 \text{ wenn } \vec{a} \perp \vec{b} \end{aligned}$$

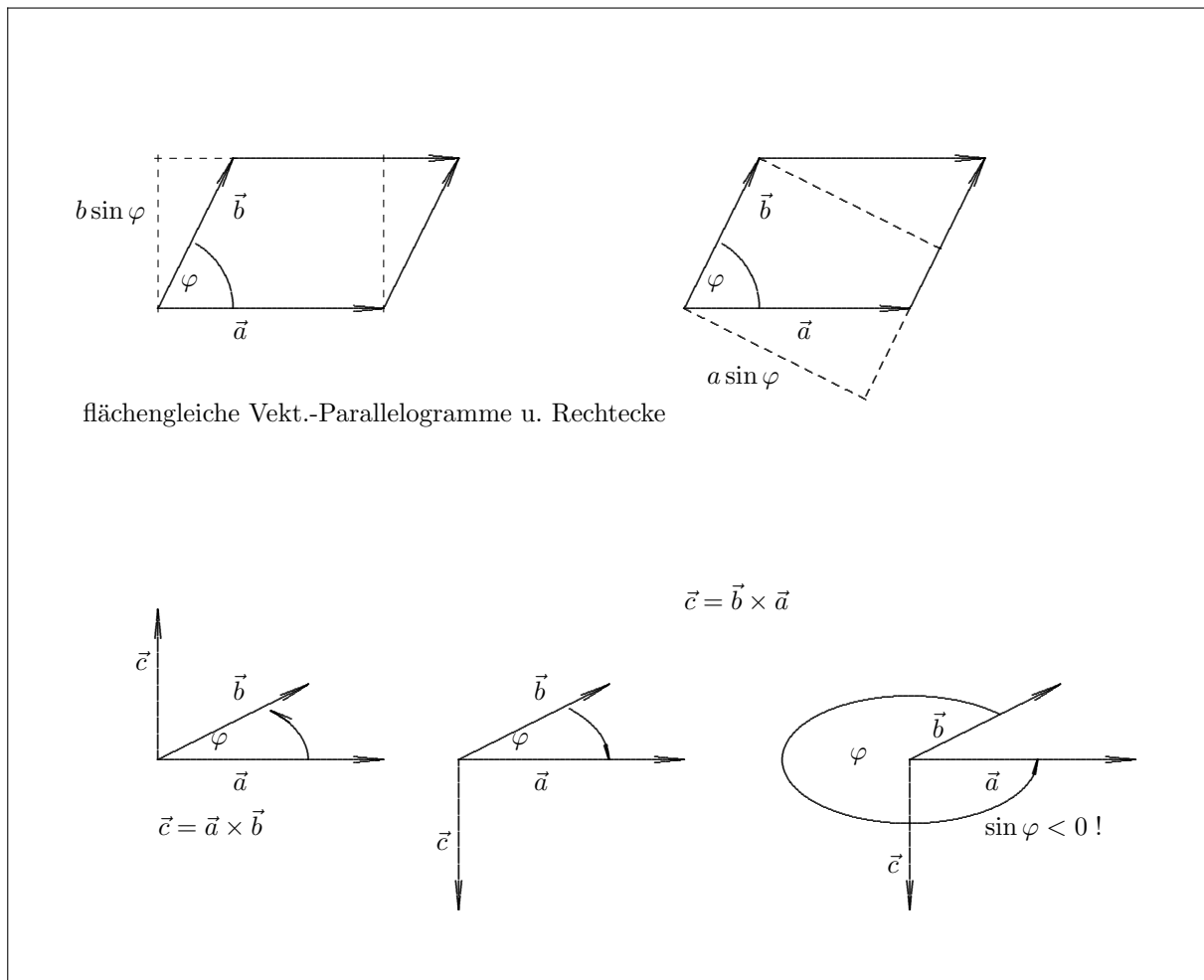
3.3.3 Multiplikation: Das Vektorielle Produkt

Das vektorielle Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ (auch äußeres Produkt genannt) der Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist ein Vektor \vec{c} , der den Betrag

$$ab \sin \varphi$$

hat (wobei φ der von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ist) und senkrecht auf den Vektoren \vec{a} und \vec{b} steht; der Vektor \vec{c} ist so gerichtet, daß die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem bilden.

Anschaulich gibt der Betrag von \vec{c} die Größe der von dem Vektor-Parallelogramm (\vec{a}, \vec{b}) gebildeten Fläche wieder.



Für die Einheitsvektoren $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gilt (Rechtssystem):

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \quad \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \quad \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y.$$

Es gilt auch hier das Distributivgesetz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Mit der Darstellung der Vektoren mit den Einheitsvektoren erhält man das Vektorielle Produkt in Komponentendarstellung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= 0 \quad \text{wenn } \vec{a} \parallel \vec{b} \end{aligned} \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Bei bestimmten Problemen muß unterschieden werden zwischen polaren Vektoren \vec{a} (gewöhnlichen Vektoren) und axialen Vektoren \vec{b} , die durch das Vektorprodukt von zwei gewöhnlichen Vektoren definiert sind: ändert man das Vorzeichen aller Koordinaten (Spiegelung im Raum), so geht \vec{a} in $-\vec{a}$, über, dagegen ändert sich das Vorzeichen von \vec{b} nicht. Das skalare Produkt eines polaren und eines axialen Vektors nennt man Pseudoskalar; bei einer Raumspiegelung ändert sich das Vorzeichen eines Pseudoskalars. Axiale Vektoren entsprechen antisymmetrischen Tensoren (2. Stufe).

3.3.4 Mehrfache Produkte

Das **gemischte Produkt (Spatprodukt)**

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ist eine Zahl, deren Betrag gleich ist dem Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (d. h. eines Spats) und deren Vorzeichen positiv (negativ) ist, wenn die drei Vektoren ein Rechtssystem (Linkssystem) bilden. Zyklische Vertauschung der drei Vektoren ändert das Vorzeichen nicht:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \vec{a}.$$

$$\text{oder} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \quad \text{usw.}$$

Das **doppelte Vektorprodukt**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

liefert einen Vektor. Es gelten die Identitäten (**Entwicklungssatz**):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

3.3.5 Anwendungen auf geometrische Probleme

- Wie im Abschnitt 3.3.3 gezeigt, liefert das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ die Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Vektor-Parallelogramms und zeigt als Vektor in die Richtung der Flächennormalen:

$$\vec{A} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Der Fluß des Stromes \vec{v} durch diese, beliebig orientierte Fläche ist dann gegeben durch

$$j = \vec{v} \cdot \vec{A}.$$

Das Skalarprodukt erzeugt durch Projektion die benötigte, senkrecht zum Strom liegende Fläche.

- Der Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} kann sowohl über das Skalarprodukt, als auch über das Vektorprodukt berechnet werden. Das Skalarprodukt liefert höhere Genauigkeit in der Nähe von $\varphi = 90^\circ$, während das Vektorprodukt für $\varphi \approx 0$ besser geeignet ist.

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} \qquad \varphi = \arcsin \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{ab}.$$

- Zerlegung eines Vektors \vec{a} in den zum Einheitsvektor \vec{u} parallelen und den zu \vec{u} senkrechten Vektor:

$$\vec{a}_{\parallel} = \vec{u}(\vec{u}\vec{a}) \qquad \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{u}(\vec{u}\vec{a}).$$

Kapitel 4

Lineare Algebra

4.1 Matrizen

Eine $m \cdot n$ Matrix A hat $m \times n$ Elemente a_{ij} in m Zeilen und n Spalten:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Addition zweier Matrizen A und B mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl erfolgt durch elementweises Addieren:

$$C = A + B \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Bei der Multiplikation einer Matrix A mit einer Zahl λ wird jedes Element a_{ij} mit der Zahl multipliziert:

$$C = \lambda A \qquad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Das Produkt zweier Matrizen A und B ist definiert, wenn die Spaltenzahl n von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt:

$$C = AB \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Die Produktmatrix C hat die gleiche Zeilenzahl wie A und die gleiche Spaltenzahl wie B . Ein Element c_{ij} der Produktmatrix entsteht durch Multiplikation der i -ten Zeile von A mit der j -ten Spalte von B . Im allgemeinen ist $AB \neq BA$.

Die Matrix A^T heißt die zur Matrix A transponierte Matrix und entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten von A . Es gilt:

$$B = A^T \qquad b_{ij} = a_{ji} \quad \text{mit} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

Eine Matrix heißt quadratisch, wenn Zeilen- und Spaltenzahl übereinstimmen. Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, wenn gilt:

$$A = A^T \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn die Elemente außerhalb der Diagonalen verschwinden:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$$

Eine Einheitsmatrix E ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente gleich 1 sind:

$$e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \delta = \text{Kronecker-Symbol}$$

Vektoren können als Spezialfälle der Matrizen aufgefaßt werden. Spaltenvektoren oder kurz Vektoren im \mathbf{R}^n sind Matrizen mit n Zeilen und einer Spalte. Sie werden in diesem Abschnitt, wie in diesem Kontext üblich, nicht durch einen Vektorpfeil gekennzeichnet. Zwischen zwei Vektoren x und y im \mathbf{R}^n ,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

ist als skalares Produkt definiert:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

(diese Definition entspricht der vorher für Vektoren im dreidimensionalen Raum eingeführten). Werden x und y als einspaltige Matrizen aufgefaßt, so ist $\langle x, y \rangle = x^T y$. (T = Transposition, erzeugt Zeilenvektor)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad \text{Betrag von } x.$$

Das skalare Produkt kann wie früher mit

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi$$

durch die Längen $\|x\|$ und $\|y\|$ und den Winkel φ zwischen den Vektoren ausgedrückt werden.

Wenn C eine symmetrische $n \cdot n$ Matrix ist, so heißt $\langle x, Cx \rangle$ eine quadratische Form. Die Definition

$$\langle x, Cx \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j$$

entspricht dem Matrixprodukt $x^T Cx$. Die symmetrische Matrix C heißt positiv definit, wenn für alle x (mit $\|x\| \neq 0$)

$$\langle x, Cx \rangle > 0$$

gilt. Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn für $k = 1, \dots, n$ gilt:

$$\det \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & & \dots \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

Mit einer $m \cdot n$ Matrix A wird durch die Matrixgleichung

$$y = Ax$$

ein n -Vektor x auf einen m -Vektor y linear abgebildet oder in diesen transformiert.

Inverse Matrix. Die Determinante einer quadratischen Matrix A ist $\det A = |a_{ij}|$. Für $\det A \neq 0$ heißt die Matrix nichtsingulär. Für eine nichtsinguläre Matrix wird eine inverse Matrix A^{-1} definiert durch

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Die Elemente der inversen Matrix $B = A^{-1}$ sind:

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

Dabei ist A_{ji} das algebraische Komplement zu dem Element a_{ji} . Es gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Lineare Gleichungssysteme. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \dots & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & a_{nn}x_n & = & y_n \end{array}$$

mit den Unbekannten x_i , läßt sich als Matrixgleichung

$$Ax = y$$

schreiben mit der quadratischen Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ und den Vektoren x und y . Wenn die Matrix A nichtsingulär ist, ergibt sich die Lösung durch

$$x = A^{-1}y$$

mit der zu A inversen Matrix A^{-1} .

Anders gedeutet, beschreibt das Gleichungssystem eine lineare Transformation des Vektors x in den Vektor y .

4.2 Drehungen

Drehungen sind spezielle lineare Transformationen. In diesem Kapitel werden Vektoren in einem dreidimensionalen Raum mit den zueinander orthogonalen Einheitsvektoren \vec{u}_i ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$) betrachtet. Für einen Vektor \vec{x} gilt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$$

Die Einheitsvektoren sollen ein Rechtssystem bilden, d.h.

$$\vec{u}_1(\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) = 1.$$

Eine Drehung des Koordinatensystems kann beschrieben werden durch Angabe der neuen orthogonalen Einheitsvektoren \vec{u}'_i in dem nichtgedrehten System:

$$\begin{aligned} \vec{u}'_1 &= a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2 + a_{13}\vec{u}_3 \\ \vec{u}'_2 &= a_{21}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + a_{23}\vec{u}_3, \\ \vec{u}'_3 &= a_{31}\vec{u}_1 + a_{32}\vec{u}_2 + a_{33}\vec{u}_3 \end{aligned}$$

allgemein:

$$\vec{u}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\vec{u}_j \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \vec{u}'_i \vec{u}_j = \cos \theta_{ij}.$$

Die Elemente a_{ij} bilden eine Drehmatrix A . Ein allgemeiner Vektor \vec{x} mit $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ hat im gedrehten System die neuen Komponenten x'_i :

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j \quad i = 1, 2, 3.$$

Diese Drehung läßt sich durch die Matrixgleichung

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

darstellen mit der Drehmatrix A .

Ein Zahlentripel stellt genau dann einen Vektor dar, wenn es sich bei Koordinatendrehungen gemäß der Formel

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

mit einer Drehmatrix A transformiert.

Eigenschaften der Drehmatrix. Aus der Orthogonalität der neuen Einheitsvektoren \vec{u}'_i

$$\vec{u}'_i \vec{u}'_j = \delta_{ij}$$

folgt:

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \qquad \sum_{k=1}^3 a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}.$$

Diese Beziehungen entsprechen in der Matrixschreibweise

$$A^T A = A A^T = E$$

und daraus folgt $A^{-1} = A^T$ für eine Drehmatrix. Matrizen mit dieser Eigenschaft haben die Determinante

$$\det A = \pm 1.$$

Für $\det A = +1$ entspricht die Transformation durch die Matrix A einer reinen Drehung (Übergang von einem Rechtssystem zu einem Rechtssystem), wie aus

$$\vec{u}'_1 (\vec{u}'_2 \times \vec{u}'_3) = 1.$$

für ein Rechtssystem folgt. Bei $\det A = -1$ bilden die neuen Einheitsvektoren ein Linkssystem.

Mehrfache Drehungen. Wenn zwei Drehungen mit den Matrizen A und B nacheinander ausgeführt werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A\vec{x} \\ \vec{x}'' &= B\vec{x}' = BA\vec{x}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist identisch mit einer Drehung mit einer Matrix $C = BA$ (beachte: $BA \neq AB$). Durch die Drehung mit der Matrix A^{-1} wird die Drehung mit der Matrix A wieder rückgängig gemacht:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A\vec{x} \\ \vec{x}'' &= A^{-1}\vec{x}' = A^{-1}A\vec{x} = \vec{x} \end{aligned}$$

Kapitel 5

Zahlenfolgen und unendliche Reihen

5.1 Folgen

Eine Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \dots = \{a_n\}$ ist definiert durch eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $n \in \mathbf{N}$ eine reelle Zahl a_n zuordnet. Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$ heißt konvergent, wenn eine Zahl $a \in \mathbf{R}$ existiert mit der Eigenschaft: zu jeder reellen Zahl $\epsilon > 0$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbf{N}$, sodaß

$$|a_n - a| \leq \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Man schreibt dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und nennt a den Grenzwert der Folge $\{a_n\}$. Die Zahl $n_0 = n_0(\epsilon)$ hängt von ϵ ab. Diese Definition des Grenzwertes bedeutet, daß in jeder noch so kleinen Umgebung von a alle Glieder der Folge liegen bis auf endlich viele Anfangsglieder. Eine Zahlenfolge hat höchstens einen Grenzwert. Nichtkonvergente Folgen heißen divergent. Eine Folge mit dem Grenzwert 0 heißt Nullfolge. Durch die Operationen $+$ $-$ \cdot $/$ erhält man aus konvergenten Folgen wieder konvergente Folgen; aus $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$ folgt:

$$\begin{aligned} a_n \pm b_n &\rightarrow a \pm b \\ a_n \cdot b_n &\rightarrow a \cdot b \\ a_n/b_n &\rightarrow a/b \quad \text{falls } b_n \neq 0 \text{ und } b \neq 0 \end{aligned}$$

Die Folge $\{a_n\}$ heißt monoton wachsend (fallend), wenn aus $n < m$ stets $a_n \leq a_m$ ($a_n \geq a_m$) folgt; sie heißt beschränkt, wenn eine Zahl M existiert mit $|a_n| \leq M$ für alle n . Jede konvergente Folge ist beschränkt. Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent. Zwei Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ bestimmen eine Intervallschachtelung, wenn $\{a_n\}$ monoton wachsend, $\{b_n\}$ monoton fallend und die Differenzfolge $\{a_n - b_n\}$ eine Nullfolge ist.

Konvergenzkriterium (Cauchy) Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbf{N}$ gibt mit

$$|a_n - a_m| \leq \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ ($-\infty$), wenn es zu jedem $K \in \mathbf{R}$ ein $n_0 \in \mathbf{N}$ gibt, sodaß

$$a_n > K \quad (a_n < K) \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad (-\infty).$$

5.2 Unendliche Reihen

Die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen s_n einer Folge $\{a_n\}$, definiert durch

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad n \in \mathbf{N},$$

heißt unendliche Reihe und wird bezeichnet mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

So wird auch der Grenzwert bezeichnet, wenn die Folge $\{s_n\}$ konvergiert.

Konvergenzkriterium. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbf{N}$ existiert, sodaß

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \epsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq n_0.$$

Eine notwendige (nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Majorantenkriterium. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern und $\{a_n\}$ eine Folge mit $|a_n| < c_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Quotientenkriterium. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Wenn es eine Zahl ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ gibt, sodaß

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \vartheta \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann konvergiert die Reihe absolut.

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen sind, dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent. Für das Produkt von Reihen gilt: Bei der Multiplikation der absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ darf gliedweise ausmultipliziert werden (Cauchy-Produkt):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{n=0}^k a_n \cdot b_{k-n}$$

Die entstehende Produktreihe ist wieder konvergent und hat den Grenzwert $a \cdot b$.

5.3 Formeln

Endliche Reihen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Arithmetische Reihe ($a_{k+1} - a_k = d = \text{konstant}$):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$$

Geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n &= \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \\ &= n+1 \quad \text{für } x = 1 \end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bernoullische Ungleichung:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für } x \geq -1$$

Unendliche Reihen

Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad -1 < x < +1$$

Harmonische Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \text{divergent, jedoch } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \text{konvergent für } \alpha > 1$$

Alternierende harmonische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$$

Weitere Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2.718\,282\dots$$

Kapitel 6

Funktionen

6.1 Der Funktionsbegriff

Eine Funktion $f(x)$ ist durch eine Vorschrift f definiert, die jedem Element $x \in \mathbf{D}$ (Definitionsbereich) ein Element $f(x) \in \mathbf{W}$ (Wertebereich) zuordnet. Für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen sind \mathbf{D} und \mathbf{W} Teilmengen von \mathbf{R} , d.h. $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ und $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}$. Aus zwei reellen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ lassen sich durch die Operationen $+ - \cdot /$ neue Funktionen definieren (soweit die Definitionsbereiche übereinstimmen):

$$\begin{array}{ll} f(x) + g(x) & f(x) \cdot g(x) \\ f(x) - g(x) & f(x)/g(x) \quad \text{bei } g(x) \neq 0 \end{array}$$

Funktionen können 'verkettet' oder ineinander eingesetzt werden, z.B.

$$h(x) = f(g(x)) \quad x \in \mathbf{D}(g) \quad \mathbf{W}(g) \subset \mathbf{D}(f)$$

Man schreibt hierfür auch $h = f \circ g$.

Grenzwert von Funktionen

Wenn für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in \mathbf{D}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ die Folge $\{f(x_n)\}$ gegen einen festen Wert A konvergiert, dann heißt A der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow a$ und man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Bei Folgen $\{x_n\}$, die sich dem Wert a von kleineren Werten (bzw. größeren Werten) her nähern, spricht man vom linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert.

Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig im Punkt a , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Eine Funktion heißt stetig im Intervall \mathbf{I} , wenn sie für jedes $a \in \mathbf{I}$ stetig ist.

Umkehrbare Funktionen

Eine Funktion $f(x)$, bei der es zu jedem $y \in \mathbf{W}$ genau ein $x \in \mathbf{D}$ mit der Eigenschaft $y = f(x)$ gibt, heißt umkehrbar eindeutige Funktion. Für umkehrbar eindeutige Funktionen $y = f(x)$ lassen sich Umkehrfunktionen f^{-1} definieren durch

$$f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Die Umkehrfunktion f^{-1} darf nicht mit der reziproken Funktion $1/f$ verwechselt werden. Für nicht eindeutig umkehrbare Funktionen werden oft Umkehrfunktionen in einem eingeschränkten Definitionsbereich definiert.

Vektorwertige Funktionen

Wenn durch eine Funktionsvorschrift einer (skalaren) Variablen t ein Vektor \vec{r} zugeordnet wird, nennt man $\vec{r} = \vec{r}(t)$ eine vektorwertige Funktion: der Wertebereich \mathbf{W} ist die Menge der Vektoren (z.B. mit drei Komponenten). Die skalare Variable t wird auch Parameter genannt. Durch eine Zuordnung

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t) \cdot \vec{u}_x + y(t) \cdot \vec{u}_y + z(t) \cdot \vec{u}_z$$

kann eine Raumkurve definiert werden.

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Eine Funktion mehrerer Veränderlicher ist durch eine Vorschrift f definiert, die n -tupeln x_1, x_2, \dots, x_n einen Wert $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zuordnet.

6.2 Polynome und rationale Funktionen

Polynome

Ein Polynom (ganzrationale Funktion) ist eine Funktion $p(x)$, deren Wert mit endlich vielen der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation zu berechnen ist. Ein Ausdruck

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j$$

heißt Polynom n -ten Grades. Die Berechnung von Funktionswerten erfolgt rationell gemäß dem Horner-Schema

$$p(x) = ((\dots((a_n \cdot x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0.$$

Durch die Funktionswerte an $(n+1)$ verschiedenen Punkten $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ ist ein Polynom n -ter Ordnung eindeutig festgelegt. Summe und Produkt zweier Polynome sind wieder Polynome.

Divisionsalgorithmus

Der Grad des Polynoms $p(x)$ sei n , und der Grad des Polynoms $q(x)$ sei m mit $m < n$. Dann gibt es für die Polynome $p(x)$ und $q(x)$ die Darstellung

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$$

mit Polynomen $s(x)$, $r(x)$, wobei der Grad von $r(x)$ kleiner als der Grad von $s(x)$ ist. Diese Darstellung entspricht einer Division des Polynoms $p(x)$ durch das Polynom $q(x)$ mit Rest. Die Bestimmung des Polynoms $s(x)$ erfolgt, indem jeweils die Summanden von $p(x)$ (bzw. des Restes) und von $q(x)$ mit der höchsten Potenz verglichen werden. Ist α eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$ vom Grad n , so verbleibt bei Division von $p(x)$ durch $(x - \alpha)$ kein Rest: $p(x) = (x - \alpha)q(x)$, wobei $q(x)$ ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades ist. Sind alle Nullstellen $\alpha, \beta \dots$ bekannt, läßt sich das Polynom in die Form

$$p(x) = a_n(x - \alpha)(x - \beta) \cdots (x - \delta)$$

bringen. Die Nullstellen sind im allgemeinen komplex (siehe Kapitel 2.3) und können ganz oder teilweise zusammenfallen; eine k -fache Nullstelle α führt auf den Faktor $(x - \alpha)^k$.

Rationale Funktionen

Die rationalen Funktionen (gebrochen rationalen Funktionen) sind Quotienten von Polynomen $p(x)$ und $q(x)$:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad q(x) \neq 0.$$

Ist der Grad n des Zählerpolynoms $p(x)$ größer als der Grad m des Nennerpolynoms $q(x)$, so ist nach dem Divisionsalgorithmus die Darstellung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{s(x)q(x) + r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

möglich, wobei der Grad des Polynoms $r(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist. Die echte rationale Funktion $r(x)/q(x)$ kann in Teilbrüche zerlegt werden, deren Zählerpolynom konstant ist. Dies ist unter anderem erforderlich bei der Integration rationaler Funktionen.

Teilbruchzerlegung (Partialbruchzerlegung)

Der einfachste Fall der Teilbruchzerlegung des Ausdrucks $r(x)/q(x)$ liegt vor, wenn alle Nullstellen $\alpha, \beta, \dots, \delta$ des Nennerpolynoms einfache Nullstellen sind. Dann gilt: $q(x) = b_m(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\delta)$ und die Entwicklung in Teilbrüche hat die Form

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{x-\beta} + \dots + \frac{A_m}{x-\delta}.$$

Für die Koeffizienten A_1, A_2, \dots, A_m erhält man ein lineares Gleichungssystem, indem man die Koeffizienten der Glieder gleicher Potenzen von x in $r(x)$ und (nach Ausmultiplizieren) in

$$q(x) \left(\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{x-\beta} + \dots + \frac{A_m}{x-\delta} \right)$$

vergleicht. Treten mehrfache Wurzeln auf, z.B. sei α eine k -fache Nullstelle, dann treten in der Entwicklung in Teilbrüche die Terme

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

auf. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt wie bei einfachen Nullstellen.

Um insgesamt reelle Koeffizienten zu erhalten, kann man die komplexen Nullstellen analog durch die Glieder

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_lx + C_l}{(x^2 + px + q)^l}$$

behandeln.

6.3 Exponential- und Logarithmusfunktion

Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist durch die unendliche Reihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

definiert mit

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718282.$$

Die unendliche Reihe konvergiert für beliebige x . Mit Hilfe des Cauchy-Produkts läßt sich zeigen, daß für die Funktion $\exp(x)$ die Funktionalgleichung

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y)$$

gilt. Die Funktion $\exp(x)$ ist eine monoton wachsende Funktion mit $\exp(x) > 0$.

Natürlicher Logarithmus

Die Umkehrfunktion der Funktion $\exp(x)$ heißt natürlicher Logarithmus:

$$y = \exp(x) = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad \ln y = x \quad y > 0$$

Aus der Definition folgt unmittelbar:

$$y = \exp(\ln y) = e^{\ln y} \quad x = \ln(\exp(x)) = \ln e^x$$

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus siehe unten (allgemeine Logarithmusfunktion).

Allgemeine Potenzfunktion

Die speziellen Polynome x^n mit $n = 0, 1, 2 \dots$ heißen Potenzen. Für negative Potenzen gilt: $x^{-n} = 1/x^n$. Bei Beschränkung des Definitionsbereiches auf $x > 0$ sind die positiven Potenzen umkehrbar eindeutig, die Umkehrfunktion wird Wurzelfunktion genannt:

$$y = x^n \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}.$$

Damit hat der Ausdruck x^a mit einer rationalen Zahl $a = m/n$, $m, n \in \mathbf{Z}$ die Definition

$$x^a = x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (x^m)^{1/n}.$$

Der Ausdruck x^a kann für beliebige reelle Zahlen a definiert werden (für $x > 0$) durch

$$x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}.$$

Es gelten die Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} x^a x^b &= x^{a+b} & (x^a)^b &= x^{a \cdot b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} & \sqrt[b]{x^a} &= x^{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Funktion

$$a^x = e^{x \ln a} \quad a > 0$$

heißt allgemeine Exponentialfunktion, und ihre Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a :

$$y = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a y.$$

Der Logarithmus zur Basis 10 heißt dekadischer Logarithmus: $\lg y = \log_{10} y$. Zur Umrechnung von einer Basis zu einer anderen ist die folgende Formel nützlich:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \frac{1}{\ln 10} = \lg e = 0.43429 = \frac{1}{2.30259}$$

Die Funktion $\log_a x$ ist bei positivem $a \neq 1$ für alle positiven x definiert und hat die Eigenschaften:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x_1^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

6.4 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen (oder Winkelfunktionen) sind Funktionen von Winkeln. Das natürliche Maß für Winkel ist das Bogenmaß

$$\alpha = \frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Radius}}$$

mit der Einheit Radian (rad). Der volle Kreis entspricht 2π . Andere Einheiten sind Grad und Neugrad:

$$\begin{aligned} \text{Grad} : 360^\circ &\equiv 2\pi & 1 \text{ rad} &= 57.2957795^\circ & 1^\circ &= 0.017453 \text{ rad} \\ \text{Neugrad} : 400^\circ &\equiv 2\pi \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen können im Einheitskreis (Radius = 1) und (für spitze Winkel) am rechtwinkligen Dreieck definiert werden:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} & \tan \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} & \cot \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 \end{aligned}$$

In der englischsprachigen Literatur werden auch Sekans und Kosekans definiert durch

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Einige Funktionswerte:

α	$= 0$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
$\sin \alpha$	$= 0$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0
$\cos \alpha$	$= 1$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	1
$\tan \alpha$	$= 0$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	0
$\cot \alpha$	$= \mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$\mp\infty$	$\mp\infty$
α	$= 0^\circ$	30°	45°	60°	90°	180°	360°

Die Funktionen $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ sind periodisch mit der Periode 2π :

$$\begin{aligned} \sin(n \cdot 2\pi \pm \alpha) &= \pm \sin \alpha & \cos(n \cdot 2\pi \pm \alpha) &= \cos \alpha & n &= \dots - 1, 0, 1, 2, \dots \\ \sin(\pi/2 \pm \alpha) &= \cos \alpha & \cos(\pi/2 \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha \\ \sin(\pi \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha & \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(3\pi/2 \pm \alpha) &= -\cos \alpha & \cos(3\pi/2 \pm \alpha) &= \pm \sin \alpha \end{aligned}$$

Die Funktionen $\tan \alpha$ und $\cot \alpha$ sind periodisch mit der Periode π :

$$\tan(n \cdot \pi \pm \alpha) = \pm \tan \alpha \quad \cot(n \cdot \pi \pm \alpha) = \pm \cot \alpha \quad n = \dots - 1, 0, 1, 2, \dots$$

Im folgenden werden die Argumente der trigonometrischen Funktionen mit x und y bezeichnet. Beziehungen der trigonometrischen Funktionen untereinander:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} &= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} &= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x & \frac{\tan x / \sqrt{1 + \tan^2 x}}{1 / \sqrt{1 + \tan^2 x}} &= \tan x \\ \frac{\sin x / \sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sqrt{1 - \sin^2 x} / \sin x} &= \frac{\sin x / \cos x}{\cos x / \sin x} = \frac{\tan x}{1 / \tan x} = \tan^2 x & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x} / \cos x}{\cos x / \sqrt{1 - \cos^2 x}} &= \frac{\sin x / \cos x}{\cos x / \sin x} = \tan^2 x & \frac{1 / \sqrt{1 + \cot^2 x}}{\cot x / \sqrt{1 + \cot^2 x}} &= 1 / \cot x \\ \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x} / \sin x}{\cos x / \sqrt{1 - \cos^2 x}} &= \frac{\cos x / \sin x}{\cos x / \sin x} = 1 & \frac{1 / \tan x}{\cot x} &= 1 & \frac{1 / \cot x}{\tan x} &= 1 \end{aligned}$$

Weitere Formeln:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} & \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} & \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} & \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) & \sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) & \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) & \cos^2 x &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \end{aligned}$$

Superposition der sin- und cos-Funktion (z.B. $x = \omega t$):

$$a_1 \sin x + a_2 \cos x = A \sin(x + \varphi) \quad \text{mit} \quad A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = a_2/a_1$$

$$a_1 \sin(x + \varphi_1) + a_2 \cos(x + \varphi_2) = A \sin(x + \varphi)$$

$$\text{mit} \quad A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

Arcusfunktionen. Die Funktionen $\sin x$ und $\tan x$ sind streng monoton im Intervall $(-\pi/2, +\pi/2)$; die Funktionen $\cos x$ und $\cot x$ sind streng monoton im Intervall $(0, +\pi)$. Bei Einschränkung auf diese Intervalle sind die trigonometrischen Funktionen daher umkehrbar; die inversen trigonometrischen Funktionen heißen Arcus-Funktionen.

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x &\iff x &= \sin y & \quad (-1 \leq x \leq +1) \\ y &= \arccos x &\iff x &= \cos y & \quad (-1 \leq x \leq +1) \\ y &= \arctan x &\iff x &= \tan y & \quad (-\infty \leq x \leq +\infty) \\ y &= \operatorname{arccot} x &\iff x &= \cot y & \quad (-\infty \leq x \leq +\infty) \end{aligned}$$

Ihre Werte in den oben angegebenen Intervallen heißen Hauptwerte. Weitere Werte ergeben sich aus den Eigenschaften der entsprechenden trigonometrischen Funktionen (siehe oben), z.B.

$$\sin y = \sin(\pi - y) = \sin(n \cdot 2\pi + y) = \sin(n \cdot 2\pi + \pi - y)$$

Die **Eulersche Formel**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

verknüpft die Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen (s. Abschnitt 2.2).

6.5 Hyperbelfunktionen

Bestimmte Kombinationen der Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} mit reellem x kommen häufig in Anwendungen vor und werden als Hyperbelfunktionen bezeichnet.

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad x \neq 0 \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 & \tanh x \cdot \coth x &= 1 \end{aligned}$$

Beziehungen der Hyperbelfunktionen untereinander:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x & \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} &= \frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}} \\ \frac{\sinh x / \sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sqrt{\sinh^2 x + 1} / \sinh x} &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x & \frac{1/\sqrt{1 - \tanh^2 x}}{\coth x / \sqrt{\coth^2 x - 1}} &= \coth x \\ \frac{\sinh x / \sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sqrt{\sinh^2 x + 1} / \sinh x} &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x & \frac{\tanh x}{\coth x} &= \frac{1}{\coth x} \\ \frac{\sinh x / \sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sqrt{\sinh^2 x + 1} / \sinh x} &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x & \frac{1/\sqrt{1 - \tanh^2 x}}{\coth x} &= \coth x \end{aligned}$$

Weitere Formeln:

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y & \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y & \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} & \tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \\ \\ \sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} & \cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\ \sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} & \cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

Areafunktionen Die Funktionen $\sinh x$ und $\tanh x$ sind streng monoton wachsend und daher umkehrbar; die Funktion $\cosh x$ ist streng monoton wachsend für $x \geq 0$. Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen Area-Funktionen.

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arsinh} x &\iff x &= \sinh y \\ y &= \operatorname{arcosh} x &\iff x &= \cosh y & x \geq 1; y \geq 0 \\ y &= \operatorname{artanh} x &\iff x &= \tanh y & |x| < 1 \\ y &= \operatorname{arcoth} x &\iff x &= \coth y & |x| > 1; y \neq 0 \end{aligned}$$

Die Area-Funktionen lassen sich durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & |x| < 1 \\ \operatorname{arcosh} x &= \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & x \geq 1 & \operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} & |x| > 1 \end{aligned}$$

6.6 Fakultät und Gammafunktion

Fakultät

Unter der Fakultät $n!$ einer positiven ganzen Zahl n versteht man das Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! \quad \text{mit den Eigenschaften:} \quad n! = n \cdot (n-1)! \quad 0! = 1.$$

Näherung für große n (Stirlingsche Formel):

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right) \quad \ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Gammafunktion

Der Begriff der Fakultät läßt sich auf beliebige (auch komplexe) Zahlen x zur Gammafunktion $\Gamma(x)$ verallgemeinern. Bei ganzzahligen positiven n gilt:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Allgemeine Definition der Gammafunktion:

$$\Gamma(x) \begin{cases} = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt & x > 0 \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)} & x \neq 0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

Eigenschaften:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Spezielle Werte:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \Gamma(2) = 1$$

Kapitel 7

Differentialrechnung

7.1 Definitionen und Ableitungen der elementaren Funktionen

Die Funktion $f(x)$ sei definiert für $a < x < b$. Die Funktion $f = f(x)$ ist in einem Punkt x des Intervalls differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

existiert; der Grenzwert $f'(x)$ des Differenzenquotienten heißt **Differentialquotient** oder **Ableitung** von f im Punkt x .

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante, die beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ zur Tangente wird, deren **Steigung** durch den Differentialquotienten gegeben ist. Wenn die Funktion $f(x)$ in einem Punkt x differenzierbar ist, so ist sie auch stetig. Für die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ schreibt man auch df/dx . Das Differential dy der Funktion $y = f(x)$ ist $dy = f'(x) dx$. Zur Kontrolle der Berechnung einer analytischen Ableitung $f'(x)$ durch eine numerische Rechnung ist die Näherung

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x}$$

nützlich.

Die Differenzierbarkeit an einem Punkt x_0 ist gleichbedeutend mit der Approximierbarkeit der Funktion $f(x)$ durch einen linearen Ausdruck

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

wobei $f'(x_0)$ die Ableitung von $f(x)$ bei $x = x_0$ bedeuten soll. Genauer schreibt man:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|);$$

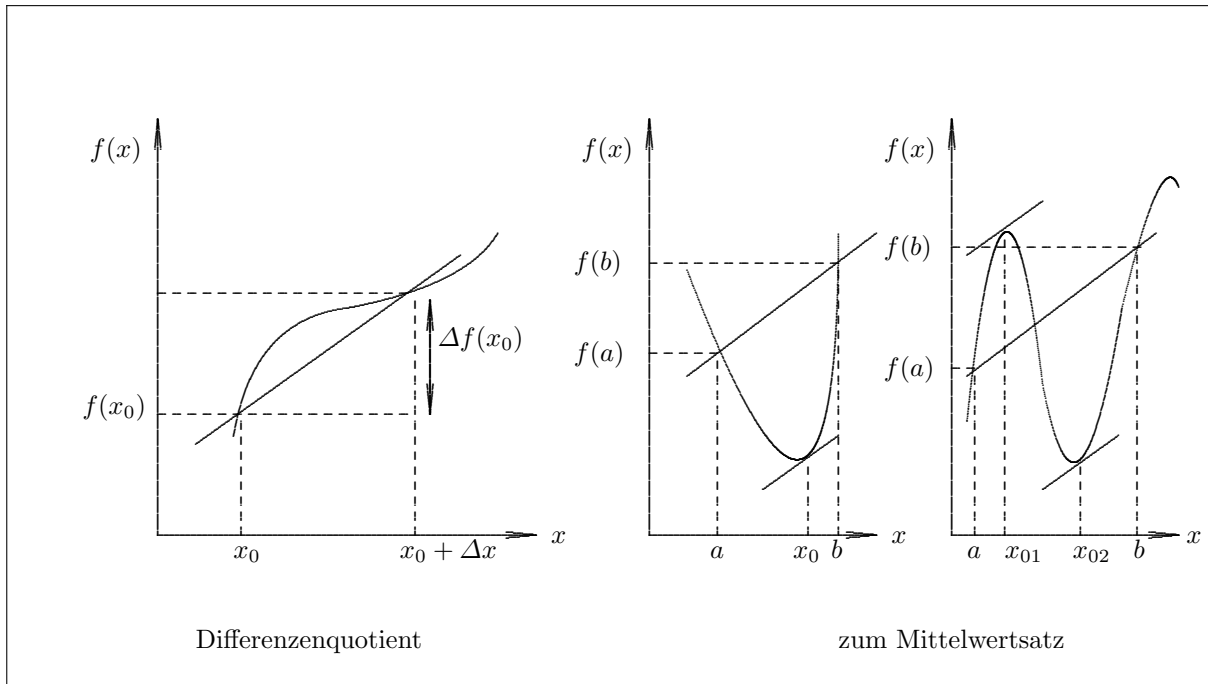
dabei ist $o(|\Delta x|)$ ein Ausdruck, der mit $|\Delta x|$ gegen Null geht (s. a. Taylorsche Formel, Abschn. 8.3). Der Ausdruck $o(|\Delta x|)$ steht für eine Funktion $\varphi(\Delta x)$ mit der Eigenschaft:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x)}{|\Delta x|} = 0.$$

Höhere Ableitungen: Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist definiert als die Ableitung der ersten Ableitung von $f(x)$, für höhere Ableitungen ist entsprechend zu verfahren. Als Bezeichnungen sind üblich, wenn $y \equiv y(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \dots, \frac{d^{(n)} y}{dx^n} \quad \text{oder} \quad y'', y''', \dots, y^{(n)} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y, \left(\frac{d}{dx}\right)^3 y, \dots, \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)} y.$$

Aus formalen Gründen wird gelegentlich die nullte Ableitung eingeführt: $y^{(0)} = y$.



Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist eine Funktion $f(x)$ für $a \leq x \leq b$ stetig und existiert die Ableitung in diesem Intervall, so gibt es wenigstens ein x_0 mit $a < x_0 < b$, für das gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Extrema: Notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion $f(x)$, die an der Stelle x_0 als differenzierbar vorausgesetzt wird, ist $f'(x_0) = 0$. Für $f''(x_0) < 0$ liegt ein Maximum vor, für $f''(x_0) > 0$ ein Minimum. Bei $f''(x_0) = 0$ müssen die höheren Ableitungen untersucht werden; bei $f'''(x_0) \neq 0$ ist x_0 ein Wendepunkt.

Erste Ableitungen elementarer Funktionen

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
x	1	$1/x$	$-1/x^2$
x^2	$2x$	$1/x^2$	$-2/x^3$
x^n	nx^{n-1}	$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$
e^x	e^x	$\ln x$	$1/x$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$	$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x$	$\text{arccot } x$	$-1/(1+x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\text{arsinh } x$	$1/\sqrt{1+x^2}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\text{arcosh } x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$	$\text{artanh } x$	$1/(1-x^2)$
$\text{coth } x$	$-1/\sinh^2 x$	$\text{arcoth } x$	$-1/(x^2-1)$

7.2 Differentiationsregeln

Produkte und Quotienten

Die Funktionen $u = f(x)$ und $v = g(x)$ seien für $a < x < b$ definiert. Dann gilt für jedes x aus dem Intervall, für das u' und v' existiert:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= uv' + vu' && \text{Produktregel} \\ \left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2} && \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad v \neq 0 && \text{Quotientenregel} \end{aligned}$$

Formeln für höhere Ableitungen erhält man durch mehrfache Anwendungen der Formeln, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ (u \cdot v)'' &= u''v + 2u'v' + uv'' \\ (u \cdot v)''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\ &\dots \\ (u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \dots + \binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r)} + \dots + uv^{(n)} \end{aligned}$$

Für die Ableitung des Quotienten zweier Produkte folgt aus der Quotienten- und Produktregel die Formel:

$$\left(\frac{u \cdot v}{w \cdot z}\right)' = \left(\frac{u \cdot v}{w \cdot z}\right) \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} - \frac{w'}{w} - \frac{z'}{z}\right).$$

Kettenregel

Die Funktion $h(x) = f(g(x))$ ist aus den Funktionen $y = g(x)$ und $f(y)$ zusammengesetzt: $h = f \circ g$. Wenn bei einem gegebenen x die Ableitung $dy/dx = dg/dx = g'(x)$ existiert und bei dem entsprechenden y die Ableitung $df/dy = f'(y)$ existiert, dann gilt für die Ableitung von h nach x :

$$\frac{dh}{dx} = f'(y)g'(x) = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Das Differential von h , ausgedrückt durch y , ist $dh = f'(y)dy$ und das Differential von g , ausgedrückt durch x , ist $dy = dg = g'(x)dx$. Aus der Kettenregel folgt:

$$dh = f'(y)dy = f'(y)g'(x)dx$$

für das Differential dh , ausgedrückt durch x .

In Differentialen können unabhängige und abhängige Variable gleich behandelt werden. So folgt zum Beispiel für $y = f(x)$ aus $dy = f'(x)dx$ die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von f :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \quad f'(x) \neq 0.$$

Für parametrische Gleichungen $x = f(t)$, $y = g(t)$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad f'(t) \neq 0.$$

Logarithmische Ableitung. Aus der Kettenregel folgt speziell für $w = h(u) = \ln u$ und $u = u(x)$:

$$\frac{d \ln u}{dx} = \frac{d \ln u}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad \text{oder kurz:} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Ableitung einer impliziten Funktion. Die Funktion $y = f(x)$ sei durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

definiert. Dann ergibt sich aus der partiellen Differentiation nach x und y :

$$F_x + F_y y' = 0 \quad y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

7.3 Grenzwert einer Funktion mit nicht definiertem Wert

Führt die Bildung des Grenzwerts einer Funktion $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ zu einem nicht definierten Ausdruck der Form

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{oder zu}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\infty}{\infty},$$

so erhält man den Grenzwert über

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \quad (\text{Regel von Bernoulli - de l'Hospital})$$

Falls andere nicht definierte Ausdrücke auftreten, kann durch geeignete Substitution diese Form immer erreicht werden:

Funktion	undef. Grenzw.	Substitution
$\varphi(x) \cdot \kappa(x)$	$0 \cdot \infty$	$\kappa(x) = 1/\psi(x)$
$\kappa(x) - \lambda(x)$	$\infty - \infty$	$\kappa(x) = 1/\psi(x); \lambda(x) = 1/\varphi(x)$
$\lambda(x)^{\psi(x)}; \lambda > 0$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$\lambda(x) = \exp(\varphi(x))$

7.4 Vektorwertige Funktionen

Die Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\vec{r} = \vec{r}(t)$ eines skalaren Parameters t ist definiert durch

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

wenn der Grenzwert unabhängig von der Folge $\Delta t \rightarrow 0$ existiert. Die Ableitung, die auch in der Form

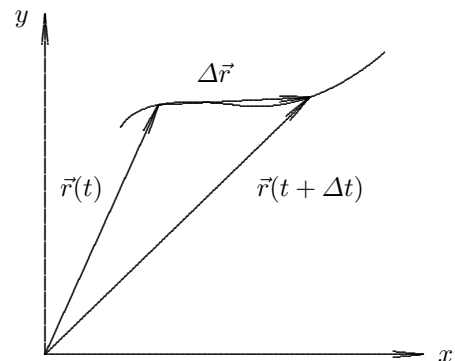
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

geschrieben werden kann, ist selbst wieder ein Vektor und ist tangential zur Kurve gerichtet, die durch $\vec{r}(t)$ beschrieben wird. Höhere Ableitungen sind entsprechend definiert. Wenn eine Bahnkurve durch eine vektorwertige Funktion $\vec{r}(t)$ beschrieben wird und der Parameter t die Zeit bedeutet, so sind die ersten beiden Ableitungen (Ableitungen nach der Zeit werden gelegentlich durch Punkte bezeichnet):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) && \text{Geschwindigkeitsvektor} \\ \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) && \text{Beschleunigungsvektor} \end{aligned}$$

Regeln für die Ableitung vektorwertiger Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) &= \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} && \text{Produktregeln} \\ \frac{d}{dt} (f(t)\vec{a}(t)) &= f'(t)\vec{a} + f(t)\frac{d\vec{a}}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{a}(t)}{f(t)} \right) &= \frac{1}{f} \frac{d\vec{a}}{dt} - \frac{f'}{f^2} \vec{a} && \text{Quotientenregel} \quad (f(t) \neq 0) \end{aligned}$$

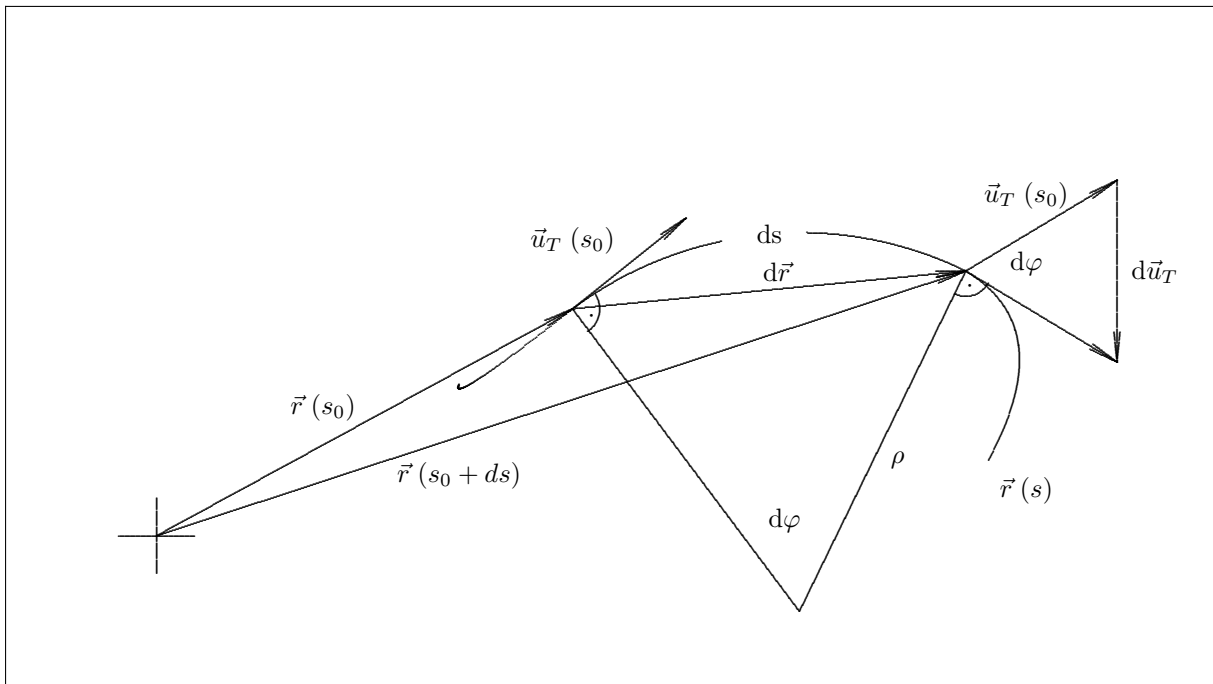
Folgerung: die Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\vec{a}(t)$ mit konstantem Betrag ($\vec{a} \cdot \vec{a} = \text{const}$) steht senkrecht zu \vec{a} (oder verschwindet):

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{a}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$$

Raumkurven

Eine glatte Raumkurve wird durch eine stetige und stetig differenzierbare vektorwertige Funktion $\vec{r}(t)$ beschrieben. Die Ableitung $d\vec{r}/dt$ zeigt jeweils in die tangentielle Richtung. Für geometrische Betrachtungen ist der Begriff der Bogenlänge geeignet. Für die Ableitung einer Raumkurve $\vec{r}(s)$ nach dem Parameter Bogenlänge s gilt:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_T \quad \vec{u}_T = \text{Einheitsvektor in tangentialer Richtung}$$



Aus der Kettenregel folgt:

$$\frac{d\vec{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{u}_T \cdot \frac{ds}{dt}$$

Für die differentielle Änderung von \vec{u}_T gilt:

$$|d\vec{u}_T| = d\varphi \cdot |\vec{u}_T|,$$

Für infinitesimale Winkel $d\varphi$ steht $d\vec{u}_T$ senkrecht auf \vec{u}_T .

Wegen $\rho d\varphi = ds$ wird die Ableitung des Einheitsvektors \vec{u}_T nach s :

$$\frac{d\vec{u}_T}{ds} = \frac{d\vec{u}_T}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} \vec{u}_N = \kappa \cdot \vec{u}_N \quad \text{mit} \quad \vec{u}_N = \frac{d\vec{u}_T}{d\varphi}.$$

Darin ist \vec{u}_N ein Einheitsvektor in der Kurvenebene senkrecht zu \vec{u}_T in Krümmungsrichtung und $\rho = 1/\kappa$ der Krümmungsradius der Raumkurve ($\kappa = \text{Krümmung}$). Durch $\vec{u}_B = \vec{u}_T \times \vec{u}_N$ kann ein weiterer Einheitsvektor \vec{u}_B definiert werden, der mit den beiden anderen Einheitsvektoren ein orthogonales Rechtssystem bildet, das 'begleitendes' Dreibein genannt wird. Es gilt:

$$\frac{d\vec{u}_B}{ds} = \frac{d\vec{u}_T}{ds} \times \vec{u}_N + \vec{u}_T \times \frac{d\vec{u}_N}{ds} = \vec{u}_T \times \frac{d\vec{u}_N}{ds} = -\tau \cdot \vec{u}_N.$$

Die Größe τ heißt Torsion und $1/\tau$ Windungsradius der Raumkurve. Die Torsion einer Kurve im Punkt P gibt an, in welchem Maß die Kurve in der Umgebung von P von einer ebenen Kurve abweicht.

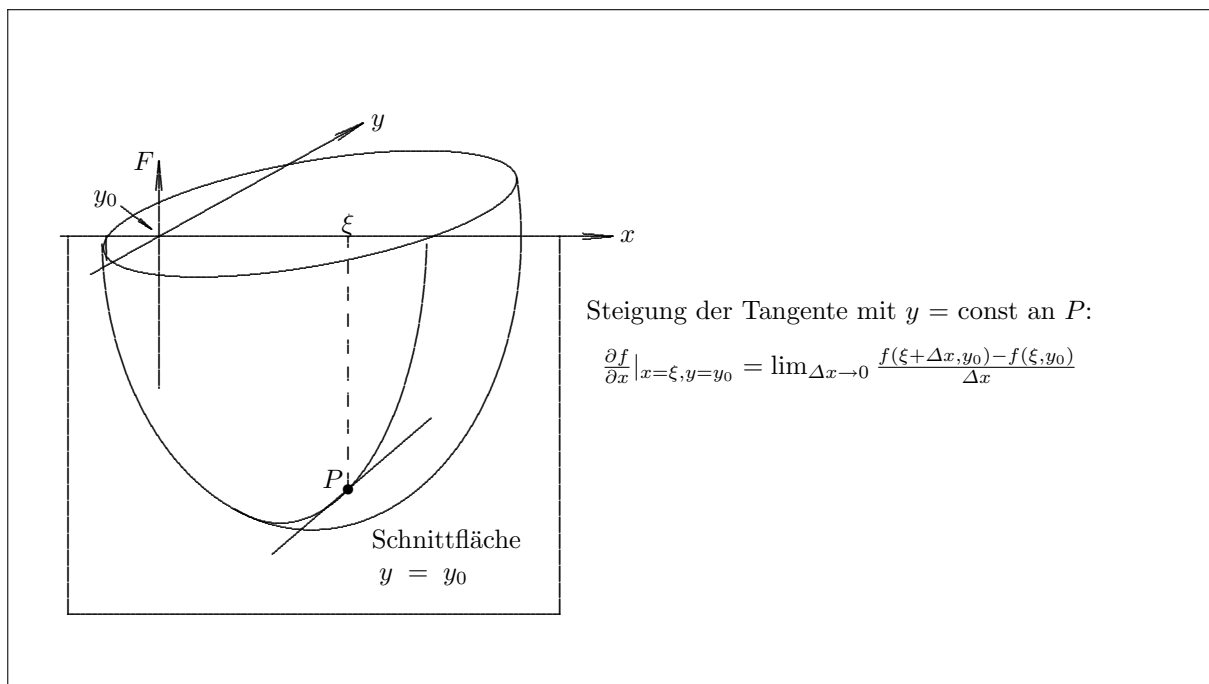
7.5 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Skalare Funktionen von zwei Veränderlichen

Eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen x und y wird betrachtet. Die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ nach den Veränderlichen x und y sind definiert durch:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$



Die partielle Ableitung nach einer Veränderlichen ist also nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung nach der einen Veränderlichen bei Festhalten der anderen. Es gelten Rechenregeln wie für die gewöhnlichen Ableitungen. Höhere partielle Ableitungen sind (entsprechend der gewöhnlichen Ableitungen) durch wiederholte Bildung der partiellen Ableitung zu erzeugen. Höhere Ableitungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Ableitungen nach verschiedenen Variablen unterscheiden, sind bei Stetigkeit gleich, zum Beispiel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Partielle Ableitungen werden auch wie folgt geschrieben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \text{etc.}$$

Totale Ableitung und totales Differential. Gegeben sei eine Funktion $f(x, y)$, bei der $x = x(t)$ und $y = y(t)$ Funktionen eines Parameters t sind. Zur Bildung der Ableitung von f nach t wird der Differenzenquotient betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{aligned}$$

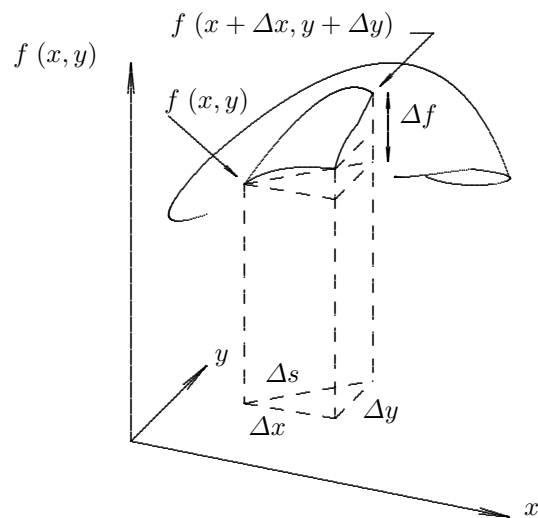
Im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ gehen auch $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta y \rightarrow 0$, und man erhält die totale Ableitung von f nach t :

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Den Ausdruck

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

nennt man totales Differential. Anschaulich bedeutet df die Änderung von f bei Änderung von x um dx und von y um dy .



Funktionen von n Veränderlichen

Betrachtet wird eine (skalare) Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von n Veränderlichen.

Ist ein beliebiger Weg \vec{s} im Raum x_1, x_2, \dots, x_n gegeben, so beschreibt $d\vec{s} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ ein Element auf diesem Weg.

Das totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

liefert dann die Änderung von f längs des Wegelements an einer gegebenen Stelle.

Mit der Definition des Gradienten, durch die vektorwertige Funktion

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

ergibt sich das totale Differential als Skalarprodukt

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{s}.$$

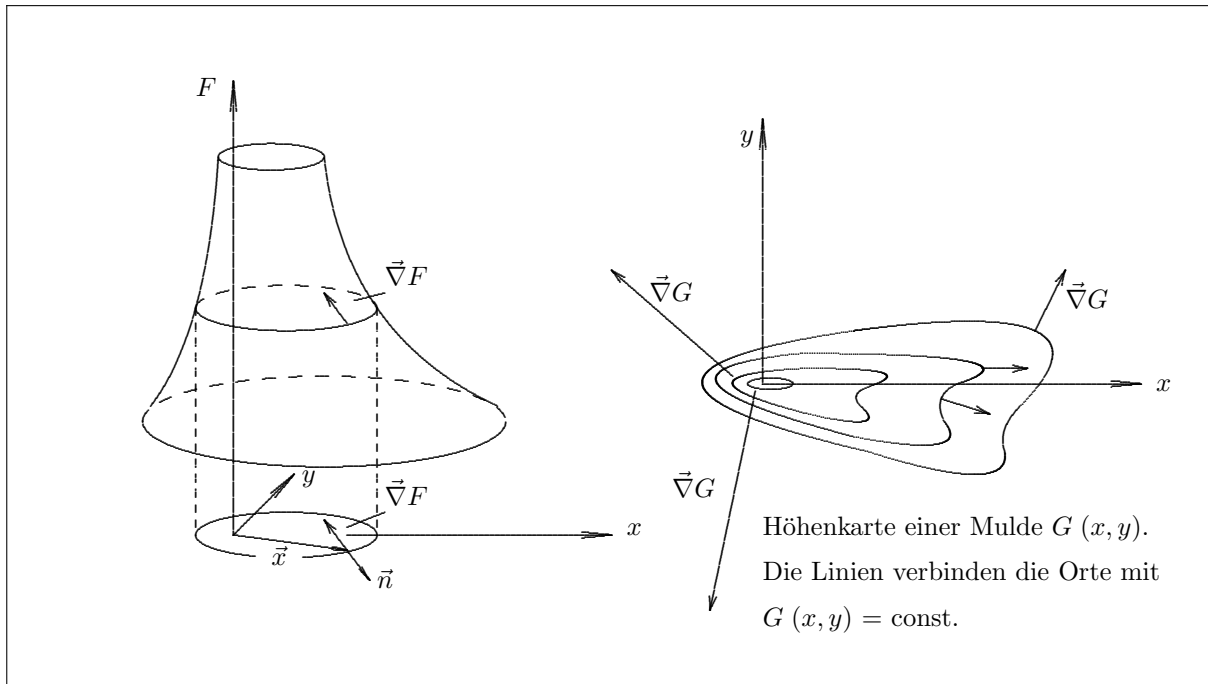
Die Einführung des Differentialoperators $\vec{\nabla}$ (Nabla)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

gestattet die Schreibweise

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f.$$

In manchen Lehrbüchern findet man auch die symbolische Schreibweise $df/d\vec{s}$ anstelle von $\vec{\nabla} f$.



Funktionalmatrix

Betrachtet werden nun Funktionen $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})$, die zu einem Vektor $\vec{f}(\vec{x})$ zusammengefaßt werden können. Ist die (vektorwertige) Funktion \vec{f} durch einen linearen Ausdruck approximierbar, erhält man:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + J_f \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|)$$

mit einer $m \cdot n$ Matrix J_f . Voraussetzung ist, daß \vec{f} im Punkt \vec{x}_0 stetig ist und daß alle Komponenten f_i von \vec{f} nach den x_j partiell differenzierbar sind mit

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = (J_f)_{ij}.$$

Man nennt die Matrix J_f ,

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

die **Funktionalmatrix** oder **Jacobi-Matrix** von \vec{f} im Punkt \vec{x}_0 .

Kettenregel. Die Funktion \vec{h} sei aus der Funktion $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$ und der Funktion $\vec{f}(\vec{y})$ zusammengesetzt, und liefere eine Abbildung $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$:

$$\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g} \qquad \vec{h}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})).$$

Dann gilt für die Funktionalmatrix J_h der Funktion $\vec{h}(\vec{x})$ und die Spalten- und Zeilenzahlen der Funktionalmatrizen:

$$\underbrace{J_h}_{k \cdot n} = \underbrace{J_f}_{k \cdot m} \cdot \underbrace{J_g}_{m \cdot n}.$$

Umkehrabbildung. Die Funktion $\vec{f}(\vec{y})$ sei die Umkehrfunktion der Funktion $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$: $\vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) = \vec{x}$ mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$. Dann folgt aus der Kettenregel:

$$J_f \cdot J_g = E \qquad J_f = (J_g)^{-1}$$

($E =$ Einheitsmatrix).

Kapitel 8

Integralrechnung

8.1 Integration von Funktionen einer Veränderlichen

Die Funktion $f(x)$ sei eine für $x \in (a, b)$, $a < b$ stetige (oder stückweise stetige Funktion). Das Intervall (a, b) wird durch eine Intervalleinteilung Z in n Teilintervalle eingeteilt, mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

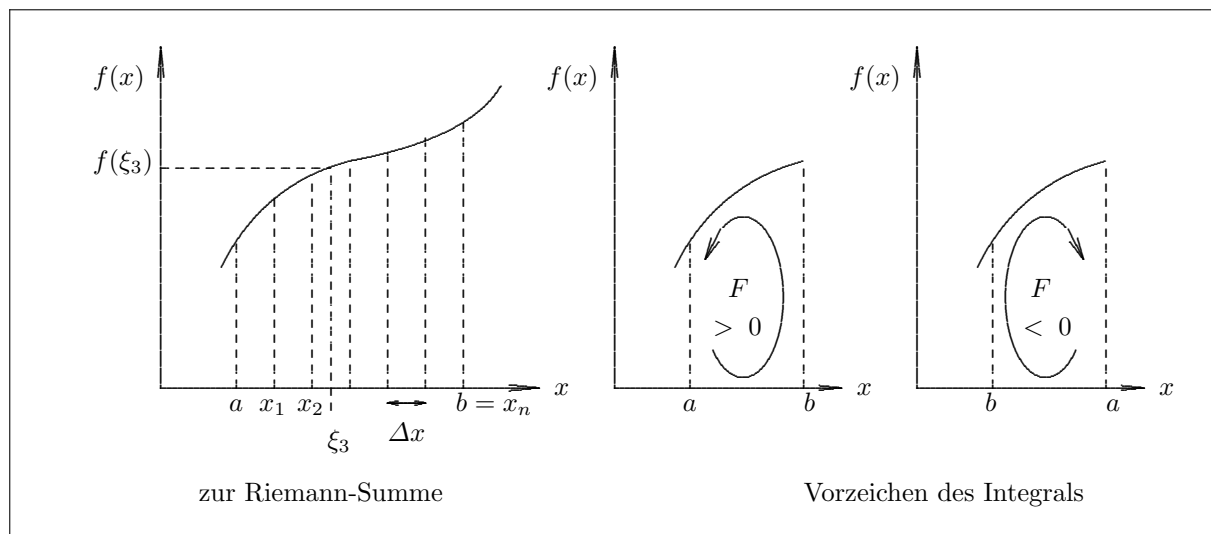
mit der Breite der Teilintervalle $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Man nennt

$$\sum_{i \in (Z)} f(\xi_i) \Delta x_i$$

mit Funktionswerten $f(\xi_i)$ an Zwischenstellen $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ die Riemann-Summe. Die Größe

$$F = \int_a^b f(x) dx = \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_{i \in (Z)} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt bestimmtes Integral, wenn der Limes existiert und von der Wahl der Z -Folge unabhängig ist. Im Integral heißt $f(x)$ der Integrand und x die Integrationsvariable. Wenn $f(x) > 0$ für $x \in (a, b)$ ist, entspricht das bestimmte Integral der Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ und der x -Achse zwischen den Grenzen a und b . Das bestimmte Integral hat folgende Eigenschaften:



$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \qquad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx \qquad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung. Ist $f(x)$ eine in (a, b) stetige Funktion, so ist bei jeder Wahl von c und $x \in (a, b)$

$$F(x) = \int_c^x f(u) du$$

eine differenzierbare Funktion der oberen Grenze x und es gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Die Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion der Funktion $f(x)$. Das unbestimmte Integral ist

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(u) du + c$$

wobei die Größe c eine willkürliche Konstante ist. Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion ist, also

$$F(x) = \int_a^x f(u) du + c,$$

so gilt für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a)$$

Tabelle von Integralen (die Integrationskonstante ist weggelassen):

$$\begin{aligned}
 \int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} & n \neq -1 \\
 \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| \\
 \int (x+a)^n dx &= \frac{1}{n+1} (x+a)^{n+1} \\
 \int \frac{1}{x+a} dx &= \ln |x+a| \\
 \int \frac{a}{x^2+a^2} dx &= \arctan \frac{x}{a} \\
 \int \frac{a}{a^2-x^2} dx &= \operatorname{artanh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & |x| < a \\
 &= \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a} & |x| > a > 0 \\
 \int \sqrt{x^2+a^2} dx &= +\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} \\
 \int \sqrt{x^2-a^2} dx &= -\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} \\
 \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= -\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arccos} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx &= \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} = \pm \ln \left(\pm \frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) \\
 \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx &= \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} = \pm \ln \left(\frac{x}{a} \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) \\
 \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} \\
 \int \sin x dx &= -\cos x \\
 \int \cos x dx &= +\sin x \\
 \int \tan x dx &= -\ln |\cos x| \\
 \int \cot x dx &= +\ln |\sin x| \\
 \int \sin^2 ax dx &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
 \int \cos^2 ax dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
 \int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} \sin^2 ax \\
 \int \frac{1}{\sin^2 ax} dx &= -\frac{1}{a} \cot ax \\
 \int \frac{1}{\cos^2 ax} dx &= +\frac{1}{a} \tan ax \\
 \int \tan^2 ax dx &= +\frac{\tan ax}{a} - x \\
 \int \cot^2 ax dx &= -\frac{\cot ax}{a} - x \\
 \int \arcsin \frac{x}{a} dx &= x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} \\
 \int \arccos \frac{x}{a} dx &= x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} \\
 \int \arctan \frac{x}{a} dx &= x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2+x^2) \\
 \int \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx &= x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2+x^2) \\
 \int e^x dx &= e^x \\
 \int x e^x dx &= e^x (x-1) \\
 \int x^2 e^x dx &= e^x (x^2-2x+2) \\
 \int \sinh x dx &= \cosh x \\
 \int \cosh x dx &= \sinh x
 \end{aligned}$$

Integrationsregeln. Regeln für die Integration folgen durch Umkehrung aus den Differentiationsregeln. Wich-

tige Regeln sind die Regeln für die partielle Integration und die Substitution von Veränderlichen.

Partielle Integration: Aus der Produktregel $(u \cdot v)' = uv' + u'v$ der Differentialrechnung für Funktionen $u = f(x)$ und $v = g(x)$ ergibt sich die Regel der partiellen Integration:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Diese Regel läßt sich anwenden, wenn der Integrand auf die Form des linken Integrals gebracht werden kann. Eventuell muß die Formel wiederholt angewendet werden.

Substitutionsregel: Ausgehend von der Transformation der Veränderlichen

$$x = g(u) \quad dx = g'(u) du$$

ergibt sich die Regel

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) g'(u) du$$

Beim bestimmten Integral sind die Grenzen der Umkehrfunktion $u = g^{-1}(x) = h(x)$ einzusetzen:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(g(u)) g'(u) du$$

Eine andere Form der Regel ergibt sich durch Vertauschen von x und u :

$$h'(x) dx = \frac{dh}{dx} dx = dh$$

$$\int f(h(x)) h'(x) dx = \int f(h) dh$$

Diese Form wird angewendet, wenn sich der Integrand (Funktion von x) in der Form des linken Integrals ausdrücken läßt. Das bestimmte Integral ist:

$$\int_a^b f(h(x)) h'(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(h) dh$$

Tabelle von Substitutionen:

Tabelle von Substitutionen

Funktion	h	dx
$f(a + bx)$	$a + bx$	dh/b
$f(e^x + e^{-x})$	e^x	dh/h
$f(\ln x)$	$\ln x$	$e^h dh$
$R(x, \sqrt[n]{ax + b})$ *)	$\sqrt[n]{ax + b}$	$n h^{n-1} dh / h$
$R(\sin x, \cos x)$	$\tan x/2$	$2 dh/(1 + h^2)$
$R(\sin x, \cos x)$ für ungerade Funktion von $\sin x$	$\cos x$	$-dh/\sqrt{1 - h^2}$
$R(\sin x, \cos x)$ für ungerade Funktion von $\cos x$	$\sin x$	$dh/\sqrt{1 - h^2}$
$R(\sin x, \cos x)$ für ungerade Funktion von $\sin x$ und $\cos x$	$\tan x$	$dh/(1 + h^2)$

*) Rationale Funktion R

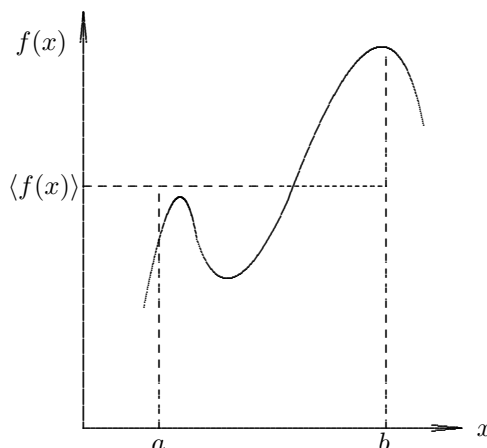
8.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar und stetig, so gibt es einen Mittelwert $\langle f(x) \rangle$, für den gilt:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}.$$

Allgemeiner erhält man das gewichtete Mittel über das Intervall $[a, b]$ mit der stetigen Gewichtsfunktion $g(x)$

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$



8.3 Taylorentwicklung

Die Umformung des Integrals in der Identität

$$f(x) = f(\xi) + \int_{\xi}^x f'(t) dt$$

durch partielle Integration führt auf:

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \int_{\xi}^x (x - t)f''(t) dt.$$

Die wiederholte Umformung des Integrals liefert die Taylorformel

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{1}{2}(x - \xi)^2 f''(\xi) + \frac{1}{2 \cdot 3}(x - \xi)^3 f'''(\xi) + \dots + \frac{1}{n!}(x - \xi)^n f^{(n)}(\xi) + R_n(x),$$

wobei das Restglied $R_n(x)$ die Form

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{\xi}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

hat. Eine andere Form des Restgliedes (Lagrange-Form) ist

$$R_n(x) = \frac{(x - \xi)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\vartheta)$$

mit ϑ zwischen ξ und x .

Wenn die Funktion $f(x)$ unendlich oft differenzierbar ist, führt die Taylorformel mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - \xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

auf die Darstellung der Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe (Taylor-Reihe); Voraussetzung ist, daß das Restglied R_n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Einige Reihenentwicklungen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq +1\end{aligned}$$

8.4 Integralfunktionen

Die normalen Integrationsmethoden führen nicht immer zum Ziel. Es gibt schon relativ einfache Funktionen, für die die Stammfunktion nicht mehr in geschlossener Form angegeben werden kann. Wenn eine solche Funktion bei vielen Problemen auftritt, so wird durch das Integral über die Funktion eine neue Funktion (Integralfunktion) definiert, die man in Tabellenwerken tabelliert finden kann:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Beispiele für Integralfunktionen sind:

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt && \text{Fehlerfunktion} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots \right) && \text{für } x \ll 1 \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2} + \dots && \text{für } x \gg 1 \\ F(k; x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} && \text{elliptisches Integral (erster Gattung)} \\ \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt && \text{Gamma-Funktion}\end{aligned}$$

Die Fehlerfunktion tritt in der Statistik auf, das elliptische Integral bei der mathematischen Behandlung von Pendelschwingungen.

8.5 Numerische Berechnung von Integralen

Die allgemeine Form der Integrationsformeln für die numerische Berechnung von Integralen ist

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_k w_k f(x_k)$$

Dabei sind x_k Abszissenwerte des Intervalls $[a, b]$ und w_k zugeordnete Gewichte.

Sehnentrapezregel. Das Intervall $[a, b]$ wird in n Teilabschnitte eingeteilt:

$$\begin{aligned}a &= x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b \\ h &= \frac{b-a}{n} \quad x_k = a + kh \quad k = 0, 1, \dots, n\end{aligned}$$

In einem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ wird das Integral durch das Sehnentrapez $[f(x_k) + f(x_{k+1})]h/2$ angenähert; für das gesamte Integral ist die Näherung

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

Die Formel ist exakt, wenn $f(x)$ eine lineare Funktion ist.

Keplersche Faßregel. Durch drei Punkte $x = a$, $(a + b)/2$ und b wird eine Parabel gelegt und diese Parabel wird integriert; das Ergebnis ist eine Näherung des Integrals:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Die Formel ist exakt nicht nur für quadratische Funktionen, sondern auch für Polynome 3. Ordnung.

Simpson-Regel. Diese Regel ergibt sich aus der Keplerschen Faßregel durch Anwendung auf $2m$ gleichlange Teilabschnitte des Intervalls $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{2m-1}) + f(b)]$$

$$x_k = a + k \frac{b-a}{2m} \quad k = 0, 1, \dots, 2m$$

Bei gleicher Zahl von Teilpunkten liefert die Simpson-Regel im allgemeinen genauere Werte als die Sehnentrapezregel.

8.6 Uneigentliche Integrale

Integrale, bei denen eine (oder beide) Grenzen $-\infty$ oder $+\infty$ sind oder bei denen der Integrand an einer Grenze undefiniert ist, nennt man uneigentliche Integrale. Das Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

heißt konvergent, wenn der Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx$$

existiert und endlich ist. Entsprechend gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Formeln ($n \geq 0$ und $a > 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \\ \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^{n+1/2}} \sqrt{\pi} \\ \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx &= \frac{n!}{2a^{n+1}} \end{aligned}$$

8.7 Integration von Funktionen mehrerer Variablen

8.7.1 Kurvenintegral über skalares Feld

Gegeben sei das skalare Feld $F(x, y, z)$, das jedem Punkt (x, y, z) die skalare Größe F zuordnet. Ebenfalls gegeben sei eine Kurve C zwischen den Punkten A und B . Das Kurvenintegral (oder Linienintegral) über

$F(x, y, z)$ längs der Kurve C ist definiert als Grenzwert der Riemann-Summe über die Wegelemente ds von C , multipliziert mit den zugehörigen Feldwerten. Der Ort längs des Weges wird durch die Variable s beschrieben.

$$\int_{A,C}^B F(s) ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C F(s_i) \Delta s_i$$

Der Wert des Kurvenintegrals hängt bei vorgegebenem Feld F im allgemeinen vom Anfangspunkt A , vom Endpunkt B und von der Form der Kurve C zwischen A und B ab. Es gilt

$$\int_{A,C}^B F(s) ds = - \int_{B,C}^A F(s) ds$$

Geschlossene Wege werden durch das Zeichen Kurvenintegral \oint_C dargestellt.

Zur Berechnung wird das Kurvenintegral auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt. Wird der Weg C eindeutig durch die Variable x beschrieben, ergibt sich

$$\int_{A,C}^B F(s(x, y, z)) ds = \int_{A(x),C}^{B(x)} F(s(x, y(x), z(x))) \frac{ds}{dx} dx$$

mit

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \text{ d. h.}$$

$$\int_{A,C}^B F(s(x, y, z)) ds = \int_{x_A,C}^{x_B} F(s(x, y(x), z(x))) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

8.7.2 Kurvenintegral über Vektorfeld

Das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ längs der Kurve C zwischen den Orten \vec{r}_a und \vec{r}_b ist definiert durch

$$\int_{\vec{r}_a,C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \lim_{\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0} \sum_C \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta \vec{r}_i$$

Bei geschlossener Kurve ($\vec{r}_a = \vec{r}_b$) liefert das Kurvenintegral

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}$$

die **Zirkulation** von \vec{A} entlang der Kurve C .

Die Berechnung geschieht durch Umwandlung in gewöhnliche Integrale, z. B.:

a) $\vec{r} = \vec{r}(s)$ längs C mit $ds = |d\vec{r}|$ ergibt

$$\int \vec{A}(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \int \vec{A}(\vec{r}(s)) \vec{u}_T ds = \int A_T ds$$

Der Tangenteneinheitsvektor ist durch \vec{u}_T und die Tangentialkomponente von \vec{A} durch A_T gegeben.

b) Mit $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ folgt

$$\int \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \int A_x(\vec{r}) dx + \int A_y(\vec{r}) dy + \int A_z(\vec{r}) dz$$

Die Variablen x, y, z hängen über den Weg C voneinander ab. Die Parameterdarstellung des Weges

$$\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= z(s) \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{s_a}^{s_b} A_x(\vec{r}(s)) dx + \int_{s_a}^{s_b} A_y(\vec{r}(s)) dy + \int_{s_a}^{s_b} A_z(\vec{r}(s)) dz \\ &= \int_{s_a}^{s_b} A_x(\vec{r}(s)) \frac{dx}{ds} ds + \int_{s_a}^{s_b} A_y(\vec{r}(s)) \frac{dy}{ds} ds + \int_{s_a}^{s_b} A_z(\vec{r}(s)) \frac{dz}{ds} ds \end{aligned}$$

Ist x selbst die unabhängige Variable, so erhält man

$$\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} A_x(x, y(x), z(x)) dx + \int_{x_a}^{x_b} A_y(x, y(x), z(x)) \frac{dy}{dx} dx + \int_{x_a}^{x_b} A_z(x, y(x), z(x)) \frac{dz}{dx} dx$$

Für eine bestimmte Klasse von Vektorfeldern, die Gradientenfelder, hängt der Wert des Kurvenintegrals nur vom Anfangspunkt \vec{r}_a und vom Endpunkt \vec{r}_b ab und nicht von der Form der Kurve C zwischen den Punkten (siehe Vektoranalysis).

8.7.3 Gebietsintegrale

Integrale einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen x und y über ein zweidimensionales Gebiet der xy -Ebene sind definiert durch den Grenzwert von Riemann-Summen:

$$\int \int_G f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta x_i, \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_Z f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

Dabei ist Z eine Intervalleinteilung des Gebiets G in kleine Gebiete (Rechtecke) mit den Seitenlängen Δx_i und Δy_i , die beim Grenzübergang gegen 0 gehen.

Für ein rechteckiges Gebiet G mit

$$G: \quad a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d$$

läßt sich das Gebietsintegral leicht auf zwei gewöhnliche Integrale zurückführen.

Das Integral von $f(x, y)$ über x zwischen a und b stellt eine Funktion von y dar, über die von c bis d über y integriert werden kann (oder umgekehrte Reihenfolge):

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Das Integral in der ersten eckigen Klammern ist eine Funktion von y , das in der zweiten eine Funktion von x . Bei krummliniger Begrenzung des Integrationsgebietes G sind die Grenzen selbst wieder Funktionen von x bzw. y .

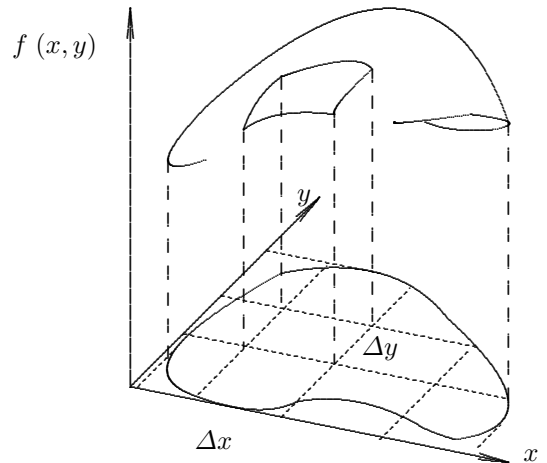
Entsprechendes gilt für Integrale in drei und mehr Dimensionen.

Transformationen. Durch Transformation der Veränderlichen ist es oft möglich, das Integrationsgebiet in ein rechteckiges Gebiet in den neuen Veränderlichen zu transformieren und damit die Integration zu vereinfachen. Dabei ist das Flächenelement $dx dy$ bzw. das Volumenelement $dx dy dz$ unter Berücksichtigung der Determinante $|J|$ der Funktionalmatrix der Transformation durch das transformierte Element $du dv$ bzw. $du dv dw$ zu ersetzen. Die Funktionaldeterminanten für die Koordinaten $x y$ einerseits und $u v$ andererseits lautet:

$$|J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{vmatrix}^{-1}$$

Allgemeine Formel für die Transformation von Koordinaten x und y in allgemeine Koordinaten u und v und für die entsprechenden Flächenelemente:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \quad |J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix} \quad dx dy = |J| du dv$$



Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad |J| = r \quad dx dy = r dr d\varphi$$

Entsprechend gilt die allgemeine Formel für die Transformation von Koordinaten x , y , und z in allgemeine Koordinaten u , v und w und für die entsprechenden Volumenelemente:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \quad |J| = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v & \partial x / \partial w \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v & \partial y / \partial w \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v & \partial z / \partial w \end{vmatrix} \quad dx dy dz = |J| du dv dw$$

Beispiele:

Räumliche Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad |J| = r^2 \sin \vartheta \quad \begin{aligned} dx dy dz &= r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= -r^2 dr d \cos \vartheta d\varphi \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad |J| = \rho \quad dx dy dz = \rho dz d\rho d\varphi$$

Kapitel 9

Differentialgleichungen

9.1 Einteilung der Differentialgleichungen

In einer Differentialgleichung (DGL) treten Differentialquotienten von einer oder mehreren Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen auf. Die Lösung der DGL besteht in der Bestimmung der in der DGL auftretenden Funktionen. Bei *gewöhnlichen* Differentialgleichungen ist eine Funktion $y(x)$ einer unabhängigen Veränderlichen x zu bestimmen. Wenn die gesuchte Funktion von *mehreren* Veränderlichen abhängt, heißt die DGL *partielle* Differentialgleichung.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist von der Form

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Als Ordnung der Differentialgleichung wird die Ordnung des höchsten auftretenden Differentialquotienten (n) bezeichnet. Ist die Differentialgleichung darstellbar als Polynom in der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen, so wird als Grad der Differentialgleichung die höchste Summe der Exponenten der abhängigen Veränderlichen (y) und ihrer Ableitungen in einem Glied des Polynoms bezeichnet. In Differentialgleichungen 1. Grades (lineare Differentialgleichungen) treten die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen nur in der 1. Potenz, also nicht miteinander multipliziert auf.

Zur Bestimmung der Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung sind alle n -mal stetig differenzierbaren Funktionen zu finden, die die Differentialgleichung erfüllen. Es sind n verschiedene Funktionen. Die allgemeine Lösung enthält n freie Integrationskonstanten, die bei Festlegung eine spezielle Lösung definieren.

9.2 Differentialgleichungen 1.Ordnung

Trennung der Veränderlichen. Differentialgleichungen der Form

$$g(y) y' = f(x)$$

lassen sich durch die Methode der Trennung der Veränderlichen lösen: Integriert man beide Seiten über dx , so erhält man

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx.$$

Abgekürzt schreibt man dies, indem man dadurch die Differentiale dx und dy definiert:

$$g(y) dy = f(x) dx.$$

Wegen $y' = \frac{dy}{dx}$ nennt man das formal die ‘Trennung der Variablen’.

Bei Bezeichnung der Stammfunktionen mit

$$G(y) = \int g(y) dy \quad F(x) = \int f(x) dx$$

ergibt sich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$G(y) = F(x) + c$$

mit der frei wählbaren Integrationskonstanten c .

Lineare Differentialgleichungen. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung haben die Form

$$y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$$

oder können auf diese Form gebracht werden. Bei der homogenen Differentialgleichung ($r(x) \equiv 0$)

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0$$

ist Trennung der Veränderlichen möglich:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx$$

Bei Bezeichnung der Stammfunktion der rechten Seite mit $P(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} \ln |y| &= -P(x) + c_1 \\ y &= ce^{-P(x)} \end{aligned}$$

mit der frei wählbaren Konstanten c .

Variation der Konstanten: Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ($r(x) \not\equiv 0$) zu erhalten, verwendet man häufig die Methode der Variation der Konstanten. Man verwendet als Lösungsansatz die Lösung der homogenen Differentialgleichung, wobei jedoch die Konstante durch eine zu bestimmende Funktion ersetzt wird:

$$y = C(x) e^{-P(x)}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$C'(x) = r(x) e^{P(x)}$$

und durch Integration erhält man die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_{x_0}^x r(t) e^{P(t)} dt \\ y(x) &= e^{-P(x)} \int_{x_0}^x r(t) e^{P(t)} dt \end{aligned}$$

9.3 Lineare Differentialgleichungen

Die allgemeine Form der linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n für eine Funktion $x = x(t)$ lautet:

$$a_n \frac{d^{(n)}x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Für lineare Differentialgleichungen (Ableitungen treten nur linear auf) gelten Superpositionssätze:

Sei $x_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($f(t) \equiv 0$), und $x_i(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ($f(t) \not\equiv 0$), so ist $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Wenn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen zu $f(t) = f_1(t)$ bzw. $f(t) = f_2(t)$ sind, so ist $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ eine Lösung zu $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

Für die homogene Differentialgleichung führt der Ansatz

$$x(t) = Ae^{\mu t}$$

auf die "charakteristische Gleichung"

$$a_n \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + a_1 \mu + a_0 = 0.$$

Sind die n im allgemeinen komplexen Lösungen dieser Gleichung $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$ verschieden, so erhält man die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung mit

$$x(t) = A_1 e^{\mu_1 t} + A_2 e^{\mu_2 t} + \dots + A_{n-1} e^{\mu_{n-1} t} + A_n e^{\mu_n t}.$$

Die n Integrationskonstanten $A_1, A_2 \dots A_{n-1}, A_n$ werden durch spezielle Bedingungen, z.B. die Werte von $x(t)$ und der $n - 1$ Ableitungen bei $t = 0$ (Anfangsbedingungen), festgelegt.

Mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung: Wenn μ_1 und μ_2 zwei verschiedene Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind, dann sind zwei zugehörige spezielle Lösungen der Differentialgleichung

$$x_1(t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \quad \text{und}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t}$$

und damit auch die Linearkombination

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} - \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \\ &= \frac{e^{\mu_1 t} - e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2}. \end{aligned}$$

Für $\mu_1 \rightarrow \mu_2 = \mu$ erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} x(t) &= \lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} \frac{e^{\mu_1 t} - e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} \\ &= \frac{d}{d\mu} e^{\mu t} \\ &= t e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Für r -fache Wurzeln sind entsprechend die r Lösungen

$$e^{\mu t}, t e^{\mu t}, \dots, t^{r-1} e^{\mu t}.$$

Homogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

mit positiven Konstanten m, λ und k beschreibt die freie Bewegung eines schwingungsfähigen Systems. Der Ansatz

$$x(t) = Ae^{\mu t}$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$m\mu^2 + \lambda\mu + k = 0,$$

für die Variable μ mit den Wurzeln

$$\mu_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{D}}{2m} \quad D = \lambda^2 - 4mk$$

Je nach dem Vorzeichen von D bzw. dem Wert von λ ergeben sich Lösungen mit unterschiedlichen Eigenschaften:

1) Keine Dämpfung ($\lambda = 0$). Beide Wurzeln sind rein imaginär:

$$\mu_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4mk}}{2m} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Die Lösung

$$x(t) = A_1 e^{+i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

stellt eine harmonische Schwingung mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpft schwingenden Systems dar. Die beiden Integrationskonstanten A_1 und A_2 können bestimmt werden, wenn die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ gegeben sind. Aus der Lösung und ihrer Ableitung für $t = 0$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= x_0 \\ i\omega_0 A_1 - i\omega_0 A_2 &= \dot{x}_0, \end{aligned}$$

das gelöst wird durch:

$$A_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{\dot{x}_0}{2i\omega_0} \quad A_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{\dot{x}_0}{2i\omega_0}$$

Damit ergibt sich zu den gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{\dot{x}_0}{2i\omega_0}\right) e^{+i\omega_0 t} + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{\dot{x}_0}{2i\omega_0}\right) e^{-i\omega_0 t} = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

2) Schwache Dämpfung (λ klein). Bei kleinem Wert von λ ist $D < 0$ und beide Wurzeln sind komplex:

$$\mu_{1,2} = \frac{-\lambda}{2m} \pm i\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right) - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega$$

$$\text{mit} \quad \gamma = \frac{\lambda}{2m} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Die Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

stellt eine gedämpfte harmonische Schwingung dar; die Schwingungen erfolgen mit der Frequenz $\omega < \omega_0$, wobei die Amplitude exponentiell abnimmt.

3) Starke Dämpfung (λ groß). Bei großem Wert von λ ist $D > 0$ und beide Wurzeln sind reell und zwar negativ:

$$\mu_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Die Lösung

$$x(t) = A_1 e^{\mu_1 t} + A_2 e^{\mu_2 t}$$

stellt einen aperiodisch abklingenden Vorgang dar, bei dem keine Oszillationen um 0 auftreten.

Für $D = 0$ wird $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ und man erhält die Lösungen $e^{\mu t}$ und $te^{\mu t}$, und damit als allgemeine Lösung

$$x(t) = A_1 e^{\mu t} + A_2 t e^{\mu t}$$

In allen Fällen ist die Lösung eindeutig durch die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ bestimmt. Gäbe es nämlich eine zweite Lösung $y(t)$, die der Differentialgleichung genügt mit den gleichen Anfangsbedingungen, dann wäre auch $z(t) = x(t) - y(t)$ eine Lösung und zwar mit den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = 0$. Durch Multiplikation der Differentialgleichung für z ,

$$m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = 0$$

mit $2\dot{z}$ erhält man

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}^2) + 2\lambda\dot{z}^2 + \frac{d}{dt}(kz^2) = 0$$

Integration dieser Gleichung zwischen $t = 0$ und $t = \tau$ bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen liefert

$$m\dot{z}^2(\tau) + 2\lambda \int_0^\tau \dot{z}^2 dt + kz^2(\tau) = 0$$

Da alle Ausdrücke quadratisch und daher nichtnegativ sind, folgt $z(t) \equiv 0$, womit die Eindeutigkeit der Lösung $x(t)$ gezeigt ist.

Inhomogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung: Für die Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

ergibt sich die allgemeine Lösung gemäß dem Superpositionssatz als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen und einer speziellen (partikulären) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Eine spezielle Lösung kann wiederum durch Variation der Konstanten ermittelt werden.

Periodische Inhomogenität: Betrachtet wird der Spezialfall der Funktion

$$f(t) = F_0 \cos \omega_f t = F_0 \Re(e^{i\omega_f t})$$

Bei dieser periodischen Funktion von t wird sich nach Abklingen anfänglicher Störungen eine stationäre Lösung der Form

$$x(t) = Ce^{i\omega_f t}$$

einstellen. Einsetzen dieses Lösungsansatzes in die Differentialgleichung liefert für die Amplitude C die Bedingung

$$C(-\omega_f^2 + 2\gamma i\omega_f + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}$$

Die komplexe Amplitude C kann dargestellt werden durch

$$C = \frac{F_0}{m} A e^{-i\delta}$$

mit reeller Amplitude A und Phasenverschiebung δ ($0 \leq \delta \leq \pi$), und damit ergibt sich als spezielle stationäre Lösung

$$x(t) = \frac{F_0}{m} A e^{i(\omega_f t - \delta)} \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \quad \text{und} \quad \tan \delta = \frac{2\gamma \omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

Betrachtung von Spezialfällen.

1) Statischer Grenzfall ($\omega_f \rightarrow 0$). In diesem Grenzfall gilt $\delta \rightarrow 0$ und die Lösung

$$x(t) \rightarrow \frac{F_0}{k}$$

hängt nicht von der Dämpfungskonstanten λ ab.

2) Energieresonanz. Bei $\omega_f = \omega_0$ wird die Phasenverschiebung $\delta = \pi/2$ und die Amplitude $A = 1/2\gamma\omega_0$, die Lösung wird damit

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega_0} e^{i(\omega_0 t - \pi/2)}$$

3) Grenzfall hoher Frequenzen. Für $\omega_f \rightarrow \infty$ wird die Phasenverschiebung $\delta = \pi$ (erregende Kraft und Schwingung gegenläufig) und die Amplitude wird klein:

$$A \rightarrow \frac{1}{\omega_f^2} \quad x(t) \rightarrow \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_f^2} e^{i(\omega_f t - \pi)}$$

4) Extremwerte der Amplitude. Die Bedingung $dA/d\omega_f = 0$ liefert

$$-(\omega_0^2 - \omega_f^2)\omega_f + 2\gamma^2\omega_f = 0$$

Für $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ (schwache Dämpfung) erhält man ein Maximum der Amplitude bei

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$$

und ein Minimum bei $\omega_f = 0$. Bei starker Dämpfung, d.h. $2\gamma^2 > \omega_0^2$, gibt es nur ein Maximum der Amplitude bei $\omega_f = 0$.

Nicht-periodische Inhomogenität: Ist die Inhomogenität $f(t)$ ein Polynom in t , so wählt man als Lösungsansatz für die spezielle Lösung der Differentialgleichung ein Polynom genügend hohen Grades:

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_m t^m$$

Die Koeffizienten C_i werden durch Einsetzen von $x(t)$ in die Differentialgleichung bestimmt.

Kapitel 10

Statistik

10.1 Wahrscheinlichkeit

Das Ergebnis einer Messung oder Beobachtung wird Ereignis genannt. Ereignisse werden mit den Buchstaben A, B, \dots bezeichnet. Die Messung einer kontinuierlichen Variablen x gibt in der Regel (nicht abzählbar) unendlich viele verschiedene Ereignisse, die jedoch zu abzählbar vielen Ereignissen zusammen gefaßt werden können (für eine kontinuierliche Zufallsvariable x kann z.B. das Ereignis $0.5 \leq x \leq 1.0$ betrachtet werden). Das Ereignis, daß die Messung irgendein Ereignis liefert, wird als Einheitsereignis E bezeichnet.

Eine plausible Definition der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Auftreten von Ereignis A ist der Quotient aus der Zahl n von Beobachtungen von A und der Gesamtheit N der Beobachtungen im Limes $N \rightarrow \infty$:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$$

Folgende Schreibweisen werden benutzt:

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
A	$P(A)$
A oder B	$P(A + B)$
A und B	$P(AB)$
B , wenn A	$P(B A)$

Der Wahrscheinlichkeitstheorie können die folgenden Axiome zugrunde gelegt werden:

- $P(A) \geq 0$
- $P(E) = 1$
- $P(A + B) = P(A) + P(B)$, wenn die Ereignisse A und B sich gegenseitig ausschließen.
- $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$

Aus den Axiomen folgen die Aussagen:

Für komplementäre Ereignisse A und \bar{A} gilt:

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn $P(B)$ nicht davon abhängt, ob A bei der gleichen Beobachtung eingetreten ist oder nicht:

$$P(B|A) = P(B) \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

10.2 Zufallsvariable

Meßgrößen sind Zufallsvariablen. Alle Messungen oder Beobachtungen unterliegen zufälligen Schwankungen, daher sind die Zahlenwerte von Messungen oder Beobachtungen nicht exakt vorhersagbar; Grund ist die begrenzte Meßgenauigkeit oder der statistische Charakter der untersuchten Größe selbst. Je nachdem die Meßgrößen x kontinuierliche oder diskrete Werte annehmen können, werden sie kontinuierliche oder diskrete Zufallsvariablen genannt. Beiden liegt eine statistische Verteilung zugrunde.

Die Verteilung einer *kontinuierlichen* Zufallsvariablen x wird bestimmt durch ihre Dichtefunktion $f(x)$ mit den Eigenschaften

$$f(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Die durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

definierte Funktion $F(x)$ heißt Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen x . Es gilt:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Einzelwert x in das Intervall $[x_1, x_2]$ fällt, ist gegeben durch

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Wichtige Eigenschaften einer Verteilung lassen sich durch wenige Parameter angeben. Die beiden wichtigsten Parameter einer Verteilung sind

- Mittelwert (Positionsparameter), und
- Standardabweichung (Streuungsparameter).

Der Mittelwert oder Erwartungswert der Größe x wird mit μ bezeichnet und ist definiert durch ($f(x)$ = Wahrscheinlichkeitsdichte)

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Allgemein sind Erwartungswerte von Funktionen $g(x)$ der Zufallsvariablen x definiert durch

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx.$$

Der Mittelwert μ ist der Erwartungswert für $g(x) = x$. Die Standardabweichung, bezeichnet mit σ , ist die Quadratwurzel aus der Varianz, die definiert ist als der Erwartungswert von $g(x) = (x - \mu)^2$:

$$\sigma^2 = V(x) = E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx.$$

Die Varianz σ^2 der Verteilung einer Zufallsvariablen x kann durch die Erwartungswerte von x und x^2 ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(x - \mu)^2] = E[x^2 - 2x\mu + \mu^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \\ &= E[x^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[x^2] - (E[x])^2. \end{aligned}$$

Die gemeinsame Verteilung von zwei Zufallsvariablen x und y wird durch die Dichtefunktion $f(x, y)$ mit der Normierung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

bestimmt. Die Mittelwerte μ_x und μ_y der beiden Variablen x und y sind definiert durch

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y) dx dy \quad \mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dx dy$$

Neben den Varianzen σ_x^2 und σ_y^2 , definiert durch

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot f(x, y) dx dy \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y)^2 \cdot f(x, y) dx dy$$

gibt es noch die Kovarianz σ_{xy} , definiert durch

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) \cdot f(x, y) dx dy$$

Der durch $\rho = \sigma_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ definierte Korrelationskoeffizient kann Werte zwischen +1 und -1 annehmen. Bei $\rho = 0$ heißen die beiden Variablen x und y unkorreliert. Wenn die beiden Variablen statistisch unabhängig sind, läßt sich ihre Wahrscheinlichkeitsdichte in der Form

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

schreiben und der Korrelationskoeffizient ist 0.

Bei einer *diskreten* Zufallsvariablen sind nur diskrete Werte $x_i, i = 1, 2, \dots$ möglich. Jedem möglichen Wert x_i kann eine Wahrscheinlichkeit $P(i)$ zugeordnet werden mit den Eigenschaften:

$$P(i) \geq 0 \quad \sum_i P(i) = 1$$

Mittelwert und Varianz sind durch Summen über alle möglichen Werte definiert:

$$\begin{aligned} \mu &= E[x] = \sum_i x_i \cdot P(i) \\ \sigma^2 &= V(x) = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(i) = E[x^2] - (E[x])^2. \end{aligned}$$

Theoretische Verteilungen

Normalverteilung. Die Normalverteilung, auch Gaußverteilung genannt, wird durch die beiden Parameter Mittelwert μ und Standardabweichung σ vollständig festgelegt; die Dichtefunktion lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Aus dieser Dichte ergeben sich durch Integration die folgenden Aussagen über die Abweichung eines Einzelwertes x vom Mittelwert μ um ein, zwei und drei Standardabweichungen:

$$\begin{aligned} P(\mu - 1\sigma \leq x \leq \mu + 1\sigma) &= 68.27\% \\ P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) &= 95.45\% \\ P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) &= 99.73\% \end{aligned}$$

Bei der Normalverteilung ist die volle Breite bei halbem Maximalwert (Halbwertsbreite) gleich 2.34σ . Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Viele Verteilungen der Praxis kommen der Normalverteilung sehr nahe und werden daher durch die Normalverteilung approximiert.

Gleichverteilung. Die Dichte der Gleichverteilung zwischen den Grenzen a und b ist

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für Mittelwert und Standardabweichung ergeben sich die Werte:

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Exponentialverteilung. Die Dichte der Exponentialverteilung hat nur einen Parameter λ :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Für Mittelwert und Standardabweichung ergeben sich:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Die Exponentialverteilung beschreibt z. B. die Häufigkeit von Ereignissen, die zeitlich zufällig mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Binomialverteilung. Ein Ereignis A trete bei einem Versuch mit der Wahrscheinlichkeit p auf; entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Auftreten von A gleich $q = 1 - p$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen das Ereignis A k mal auftritt. Die Wahrscheinlichkeit, daß in den ersten k Versuchen das Ereignis A und in den restlichen $n - k$ Versuchen das Ereignis \bar{A} auftritt, ist das Produkt $p^k q^{n-k}$. Das Ereignis k mal A bei n Versuchen kann in $\binom{n}{k}$ verschiedenen Reihenfolgen auftreten. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen k mal das Ereignis A auftritt, gegeben durch

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Dies entspricht dem Binomischen Lehrsatz

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Mittelwert und Varianz der Binomialverteilung sind

$$E[k] = \mu = np \quad \sigma^2 = npq$$

Poissonverteilung. Wenn man in der Binomialverteilung $n \rightarrow \infty$ wachsen läßt, dabei jedoch den Mittelwert $\mu = np$ konstant hält, geht die Binomialverteilung in die Poissonverteilung über:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

Mittelwert und Varianz sind

$$E[k] = \mu \quad \sigma^2 = \mu \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

Die (diskrete) Poissonverteilung geht für große Werte von μ über in die spezielle Normalverteilung ($\sigma = \sqrt{\mu}$)

$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-(k-\mu)^2/2\mu}$$

10.3 Funktionen von Zufallsvariablen

Funktionen von Zufallsvariablen sind selbst wieder Zufallsvariable, für die Mittelwerte und Varianzen angegeben werden können. Die Berechnung der Varianz einer Funktion von Zufallsvariablen aus den Varianzen der Veränderlichen der Funktion nennt man Fehlerfortpflanzung (error propagation).

Funktionen einer Zufallsvariablen. Betrachtet wird eine Funktion $w = w(x)$ der Zufallsvariablen x , die einer Verteilung mit Mittelwert μ_x und Standardabweichung σ_x folgt. Der Mittelwert μ_w kann wie folgt berechnet werden. Ausgehend von der Taylor-Entwicklung

$$w(x) \approx w(\mu_x) + \left. \frac{dw}{dx} \right|_{\mu_x} (x - \mu_x)$$

ergibt sich als Mittelwert von w :

$$\mu_w = E[w] \approx w(\mu_x) + \left. \frac{dw}{dx} \right|_{\mu_x} E[x - \mu_x] = w(\mu_x)$$

Für lineare Funktionen ist diese Beziehung exakt; bei nichtlinearen Funktionen $w(x)$ würde zwar der quadratische Term der Taylorentwicklung eine (kleine) Korrektur liefern, diese ist in der Praxis jedoch i.a. vernachlässigbar. Für die Varianz von w ergibt sich bei Benutzung der Taylorentwicklung als Erwartungswert von $(w(x) - w(\mu_x))^2$:

$$\sigma_w^2 = E[(w(x) - w(\mu_x))^2] = E[(x - \mu_x)^2] \left(\left. \frac{dw}{dx} \right|_{\mu_x} \right)^2 = \sigma_x^2 \left(\left. \frac{dw}{dx} \right|_{\mu_x} \right)^2.$$

Daher folgt:

$$\sigma_w \approx \sigma_x \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=\mu_x}$$

Funktionen mehrerer Zufallsvariablen. Betrachtet wird zunächst eine Funktion $w(x, y)$ von zwei Zufallsvariablen x und y , die Mittelwerte μ_x und μ_y und Standardabweichungen σ_x und σ_y haben. Entsprechend der linearen Näherung

$$w(x, y) \approx w(\mu_x, \mu_y) + \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\mu_x, \mu_y} (x - \mu_x) + \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\mu_x, \mu_y} (y - \mu_y)$$

ergibt sich für Mittelwert und Varianz der Größe w :

$$\begin{aligned} \mu_w &\approx w(\mu_x, \mu_y) \\ \sigma_w^2 &\approx \sigma_x^2 \left(\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\mu_x, \mu_y} \right)^2 + \sigma_y^2 \left(\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\mu_x, \mu_y} \right)^2 \end{aligned}$$

Diese Formeln gelten für den Fall von *unabhängigen* Zufallsvariablen x und y . Wenn die Zufallsvariablen x und y *nicht* statistisch unabhängig sind, ergibt sich für den Ausdruck von σ_w^2 ein (positiver oder negativer) Zusatzterm:

$$\sigma_w^2 \approx \sigma_x^2 \left(\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\mu_x, \mu_y} \right)^2 + 2\sigma_{xy} \left(\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\mu_x, \mu_y} \right) \cdot \left(\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\mu_x, \mu_y} \right) + \sigma_y^2 \left(\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\mu_x, \mu_y} \right)^2$$

Die Verallgemeinerung auf eine Funktion w von n statistisch unabhängigen Zufallsvariablen x_1, x_2, \dots, x_n ergibt:

$$\begin{aligned} \mu_w &\approx w(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \\ \sigma_w^2 &\approx \sum_i \sigma_i^2 \left(\left. \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Spezialfälle. Wenn w von der Form

$$w = x + y - z \dots$$

(Summen und Differenzen) ist, ergibt die Formel

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \dots$$

wenn $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \dots$ die Standardabweichungen der unabhängigen Zufallsvariablen $x, y, z \dots$ sind; die Quadrate der einzelnen Standardabweichungen addieren sich.

Wenn w von der Form

$$w = \frac{x \cdot y \cdot \dots}{z \cdot \dots}$$

(Produkte und Quotienten) ist, ergibt die Formel bei unabhängigen Zufallsvariablen nach Umformung den Ausdruck

$$\left(\frac{\sigma_w}{\mu_w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\mu_y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{\mu_z}\right)^2 + \dots$$

Die Quadrate der *relativen* Standardabweichungen addieren sich.

Für die Funktion (Mittelwert)

$$w = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

wobei alle Zufallsvariablen x_i der gleichen Verteilung mit Mittelwert μ_x und Standardabweichung σ_x entstammen und statistisch unabhängig sind, gilt:

$$\sigma_w^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_x^2 \frac{1}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}.$$

Die Standardabweichung des Mittelwerts von n unabhängigen Zufallsvariablen nimmt also bei Vergrößerung der Zahl n der Messungen proportional zu $1/\sqrt{n}$ ab.

Zentraler Grenzwertsatz: Sind die Zufallsgrößen x_i unabhängig verteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ_x^2 , so ist der Mittelwert

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ *normalverteilt* mit Mittelwert μ und Varianz σ_x^2/n .

10.4 Auswertung von Messungen

Ein Meßwert x einer Meßgröße mit wahren Wert μ folge einer Normalverteilung mit der durch die Meßapparatur bedingten Standardabweichung σ (Meßfehler). Ausgehend von der für die Normalverteilung geltenden Aussage

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 68.27\%$$

erhält man durch Umformung der Ungleichungen

$$\mu - \sigma \leq x \quad x \leq \mu + \sigma$$

in die Ungleichungen

$$\mu \leq x + \sigma \quad x - \sigma \leq \mu$$

die Aussage

$$P(x - \sigma \leq \mu \leq x + \sigma) = 68.27\%$$

Diese Aussage bedeutet, daß der wahre Wert μ mit einer Wahrscheinlichkeit von 68.27 % innerhalb der (einfachen) durch die Standardabweichung gegebenen Fehlergrenzen um den Meßwert liegen. Die Annahme einer Normalverteilung ist bei Messungen meist gerechtfertigt (eine theoretische Begründung liefert der zentrale Grenzwertsatz). Meßergebnisse werden in der Form *Meßwert* \pm *Fehler*

$$x \pm \sigma$$

angegeben, wobei als Fehler die (einfache) Standardabweichung angegeben wird.

Empirische Werte von Mittelwert und Varianz. Zur Bestimmung von Parametern der zugrunde liegenden Verteilung aus statistisch verteilten Daten $x_i, i = 1, \dots, n$ werden Schätzfunktionen $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ benutzt; diese sind als Funktionen der Daten selbst Zufallsvariablen und sollten u.a. die Eigenschaft haben, daß ihre Erwartungswerte im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ (Konsistenz) und bei endlichen Werten von n (Erwartungstreue) gleich den zu schätzenden Parametern der Verteilung ist. Eine Schätzfunktion m für den Mittelwert einer Meßreihe $x_i, i = 1, \dots, n$ ist

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Der Erwartungswert von m ist

$$E[m] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i] = \mu$$

bei $E[x_i] = \mu$ und damit ist m eine erwartungstreue Schätzfunktion. Eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz ist

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

Zum Nachweis der Erwartungstreue wird zunächst die Summe umgeformt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 &= \sum_{i=1}^n ((x_i - \mu) - (m - \mu))^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2(m - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) + n(m - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - n(m - \mu)^2, \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = n(m - \mu).$$

Der Erwartungswert der Summe ist:

$$E \left[\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right] = E \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] - n \cdot E[(m - \mu)^2] = n\sigma_x^2 - n \frac{\sigma_x^2}{n} = (n-1)\sigma_x^2.$$

Also ist der Erwartungswert von s_x^2

$$E[s_x^2] = \frac{1}{n-1} (n-1)\sigma_x^2 = \sigma_x^2$$

und damit ist s_x^2 eine erwartungstreue Schätzfunktion für σ_x^2 . Die empirische Standardabweichung s_x wird oft wie die wahre Standardabweichung behandelt. Tatsächlich ist sie jedoch als Funktion von Zufallsvariablen selbst eine Zufallsvariable und damit statistischen Schwankungen unterworfen. Für große Werte von n (etwa $n \geq 10$) ist die statistische Schwankung gering und meist vernachlässigbar, bei sehr kleinen Werten von n ist jedoch Vorsicht geboten.

Formeln. Die folgenden Formeln sind anwendbar zur Berechnung von Mittelwert und Standardabweichungen, wenn n Einzelwerte x_1, x_2, \dots, x_n gleicher Genauigkeit vorliegen. Die Formeln enthalten zur Erhöhung der numerischen Genauigkeit einen geeignet zu wählenden Wert x_0 , der ungefähr gleich dem Mittelwert sein sollte. Gebildet werden zunächst die Summen:

$$S_x = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2$$

Der Mittelwert \bar{x} , die Standardabweichung des Mittelwerts $s_{\bar{x}}$ und die Standardabweichung der Einzelwerte s_x ergeben sich aus:

$$\bar{x} = x_0 + \frac{S_x}{n} \quad s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left(S_{xx} - \frac{S_x^2}{n} \right) \quad s_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(S_{xx} - \frac{S_x^2}{n} \right)$$

Geradenanpassung. Bei Meßreihen wird häufig eine Zufallsvariable y als Funktion von einer jeweils fest einstellbaren Größe x gemessen. Wenn für die Größe y eine funktionelle Abhängigkeit von x bekannt ist, können die Daten $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$ benutzt werden, um Parameter, die in der funktionellen Abhängigkeit vorkommen, zu bestimmen. Bei einer linearen Abhängigkeit der Form

$$y = y(x) = a + bx$$

lassen sich die Parameter a und b bestimmen. Ein allgemeines Verfahren, um solche Probleme zu behandeln, ist die Methode der kleinsten Quadrate. Im Falle der Anpassung einer Geraden an Daten verfährt man wie folgt. Zu gegebenen Werten der Parameter a und b können die Residuen

$$\epsilon_i = y_i - (a + bx_i)$$

berechnet werden. Nach der Methode der kleinsten Quadrate sind optimale Schätzwerte für a und b die Werte, für die die Summe der Quadrate der Residuen

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2 = \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2ay_i - 2bx_i y_i + a^2 + 2abx_i + b^2 x_i^2].$$

minimal ist. Zur Bestimmung des Minimums von S bezüglich a und b werden die partiellen Ableitungen von S nach a und b gebildet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n (-y_i + a + bx_i) \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n (-x_i y_i + ax_i + bx_i^2), \end{aligned}$$

Die Bedingung, daß die Ableitungen am Minimum verschwinden, führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} an + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung werden die folgenden Summen definiert:

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Mit diesen Größen lautet das lineare Gleichungssystem für a und b :

$$\begin{aligned} an + bS_x &= S_y \\ aS_x + bS_{xx} &= S_{xy}. \end{aligned}$$

Es wird gelöst durch:

$$a = \frac{S_y S_{xx} - S_{xy} S_x}{n S_{xx} - S_x^2} \quad b = \frac{n S_{xy} - S_y S_x}{n S_{xx} - S_x^2}$$

Die Varianzen und Kovarianzen (die Parameter a und b sind voneinander statistisch abhängig) ergeben sich nach den Gesetzen der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 \frac{S_{xx}}{n S_{xx} - S_x^2} \quad \sigma_b^2 = \sigma^2 \frac{n}{n S_{xx} - S_x^2} \quad \sigma_{ab} = \sigma^2 \frac{-S_x}{n S_{xx} - S_x^2},$$

wenn die Standardabweichung σ der Einzeldaten y_i bekannt ist. Wenn die Standardabweichung der Einzeldaten nicht bekannt ist, kann sie durch die Formel

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2 = \frac{1}{n-2} (S_{yy} - aS_y - bS_{xy})$$

abgeschätzt werden.

Kapitel 11

Vektoranalysis

11.1 Felder

Skalare Felder

Eine skalare Größe ϕ , die jedem Raumpunkt $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ zugeordnet ist, heißt skalares Feld:

$$\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z).$$

Wenn die Werte der Funktion ϕ nur von dem Abstand r von einem Zentrum abhängen, heißt $\phi(r)$ ein zentrales Feld. Wenn die Funktionswerte nur vom dem (senkrechten) Abstand ρ von einer Achse abhängen, heißt $\phi(\rho)$ axiales Feld.

Die Punkte, für die die Funktion $\phi(\vec{r})$ den festen Wert C annimmt, bilden eine **Niveaufläche**

$$\phi(\vec{r}) = C$$

im Raum. Für zentrale bzw. axiale Felder sind die Niveauflächen Kugelflächen bzw. Zylinderflächen.

Vektorfelder

Eine vektorielle Größe \vec{A} , die jedem Raumpunkt $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ zugeordnet ist, heißt Vektorfeld:

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z).$$

Das Vektorfeld \vec{A} läßt sich gemäß

$$\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{u}_x + A_y(x, y, z) \vec{u}_y + A_z(x, y, z) \vec{u}_z$$

durch drei skalare Funktionen A_x , A_y und A_z darstellen.

Ein wichtiger Spezialfall ist das sphärische Vektorfeld, bei dem der Betrag nur von dem Abstand r von einem Zentrum abhängt und das die Richtung des Radiusvektors \vec{r} hat; ein solches Feld kann also in der Form

$$\vec{A} = \phi(r) \vec{r}$$

geschrieben werden.

11.2 Gradient und Kurvenintegral

Gradient

Der Gradient eines skalaren Feldes ϕ ist in kartesischen Koordinaten definiert (s. a. Kapitel 7) als der Vektor

$$\text{grad } \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \vec{u}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

D.h.: Ist das skalare Feld ϕ stetig und differenzierbar, so liefert die Gradientenbildung ein vektorielles Feld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r}).$$

Anschauliche Deutung: Betrachtet wird die Änderung des skalaren Feldes ϕ beim Fortschreiten vom Punkt \vec{r} um einen kleinen Schritt $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Die Änderung des Feldes ist

$$\Delta\phi = \phi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \phi(\vec{r})$$

wenn die partiellen Ableitungen stetig sind

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta z + o(|\Delta\vec{r}|^2) \\ &= \text{grad } \phi \cdot \Delta\vec{r} + o(|\Delta\vec{r}|^2). \end{aligned}$$

Für ein infinitesimales Element $d\vec{r}$ ist die Änderung des skalaren Feldes ϕ

$$d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\vec{r}$$

und diese Gleichung kann als allgemeine, von einem Koordinatensystem unabhängige Definition des Gradienten betrachtet werden. Die Gleichung entspricht dem totalen Differential von $\phi(x, y, z)$:

$$d\phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = \left(\vec{u}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot (\vec{u}_x dx + \vec{u}_y dy + \vec{u}_z dz).$$

Wenn der Vektor $d\vec{r}$ innerhalb der Fläche $\phi = \text{const}$ liegt, ist

$$d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = 0.$$

Daraus folgt, daß der Vektor $\text{grad } \phi$ jeweils senkrecht auf der Fläche $\phi = \text{const}$ steht und in die Richtung des stärksten Anstiegs zeigt. Die Änderung $d\phi$ wird maximal, wenn $d\vec{r}$ parallel zu $\text{grad } \phi$ ist, also parallel zur Flächennormalen \vec{n} liegt. Der Normaleneinheitsvektor \vec{n} auf einer Fläche $\phi(x, y, z) = \text{const}$ ist daher gegeben durch

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{\text{grad } \phi(x, y, z)}{|\text{grad } \phi(x, y, z)|}.$$

Die Änderung von ϕ beim Fortschreiten in einer bestimmten Richtung, die durch einen Einheitsvektor \vec{u} gegeben ist, ergibt sich durch die Wahl $d\vec{r} = \vec{u} ds$:

$$d\phi = \text{grad } \phi \cdot \vec{u} ds$$

bzw.

$$\frac{d\phi}{ds} = \text{grad } \phi \cdot \vec{u}$$

(Richtungsableitung von ϕ nach \vec{u}).

Ist ein Vektorfeld \vec{A} als Gradientenfeld

$$\vec{A} = \text{grad } \phi$$

darstellbar, so hat es die stetigen Komponenten

$$A_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad A_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad A_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Gelten die Beziehungen

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z},$$

so folgt

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}.$$

Dies ist hinreichend für stetige Komponenten des Vektorfelds \vec{A} .

Nabla-Operator:

Der Gradient kann durch den Nabla genannten Vektoroperator $\vec{\nabla}$, definiert durch

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

ausgedrückt werden in der Form

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi.$$

Er wirkt auf alle rechts neben ihm stehenden direkt angekettenen Funktionen. Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist selbst kein Vektor (er hat keine Richtung), verhält sich jedoch unter Koordinatentransformationen wie ein Vektor.

Kurvenintegrale

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, durch das jedem Punkt \vec{r} ein Vektor \vec{A} zugeordnet wird, und eine Kurve C zwischen den Punkten \vec{r}_a und \vec{r}_b . Das Kurvenintegral (oder Linienintegral) über $\vec{A}(\vec{r})$ längs der Kurve C ist definiert als Grenzwert einer Riemann-Summe. Dabei wird längs der Kurve C , die in kleine vektorielle Linienelemente $\Delta \vec{r}_i$ eingeteilt ist, die Summe über die skalaren Produkte des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}_i)$ mit den Linienelementen $\Delta \vec{r}_i$ gebildet:

$$\lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \sum_C \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta \vec{r}_i = \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Der Wert des Kurvenintegrals hängt bei vorgegebenem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ im allgemeinen vom Anfangspunkt \vec{r}_a , vom Endpunkt \vec{r}_b und von der Form der Kurve C zwischen \vec{r}_a und \vec{r}_b ab. Es gilt

$$\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_b, C}^{\vec{r}_a} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Bei geschlossener Kurve ($\vec{r}_a = \vec{r}_b$) heißt das Kurvenintegral die **Zirkulation** Γ von \vec{A} entlang der Kurve C :

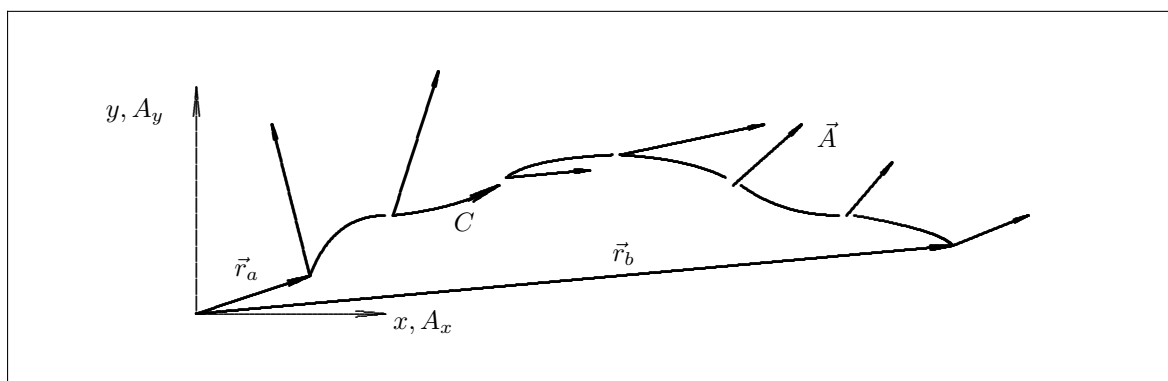
$$\Gamma = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Zur Berechnung kann das Kurvenintegral auf ein gewöhnliches Riemann-Integral zurückgeführt werden, wenn die Kurve C durch eine Parameterdarstellung $\vec{r}(t)$ mit $\vec{r}(t_a) = \vec{r}_a$ und $\vec{r}(t_b) = \vec{r}_b$ gegeben ist. Für einen einzelnen Summanden der Riemann-Summe gilt

$$\vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \left(\frac{\Delta \vec{r}_i(t)}{\Delta t} \right) \Delta t \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt$$

und es folgt

$$\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt.$$



Konservative Vektorfelder

Wenn das vektorielle Feld $\vec{A}(\vec{r})$ dargestellt werden kann als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(\vec{r})$,

$$\vec{A} = \text{grad } \phi,$$

so ist der Wert des Kurvenintegrals

$$\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a).$$

unabhängig vom Weg C . Umgekehrt kann ein Feld \vec{A} , für das das Kurvenintegral vom Weg unabhängig ist, dargestellt werden als Gradient eines skalaren Feldes.

Beweis: Der Weg C sei durch die Parameterdarstellung $\vec{r} = \vec{r}(t)$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_a}^{t_b} \text{grad } \phi \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} d\phi = \phi(t_b) - \phi(t_a) = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a). \end{aligned}$$

Der Wert des Integrals ist nur abhängig von den Endpunkten $\vec{r}(t_a)$ und $\vec{r}(t_b)$, er ist unabhängig vom Weg C . Für Gradientenfelder $\vec{A} = \text{grad } \phi$ verschwindet die Zirkulation Γ :

$$\Gamma = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = 0.$$

Ein Vektorfeld \vec{A} , das als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(\vec{r})$ dargestellt werden kann, heißt konservatives Vektorfeld, das zugehörige skalare Feld ϕ heißt Potential (s. Abschnitt 11.9).

11.3 Divergenz, Flächenintegral und Gaußscher Satz

Divergenz

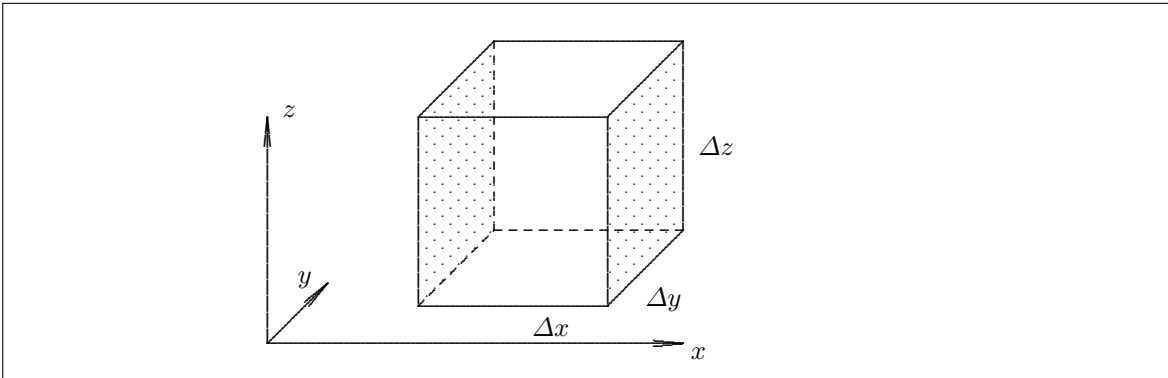
Die Divergenz eines Vektorfeldes \vec{A} ,

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x \cdot \vec{u}_x + A_y \cdot \vec{u}_y + A_z \cdot \vec{u}_z,$$

ist im kartesischen Koordinatensystem definiert durch:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x, A_y, A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Die Divergenz ist ein skalares Feld, das als Quellstärke eines Vektorfeldes bezeichnet wird. Sie ist definiert, wenn das Vektorfeld stetig und differenzierbar ist.



Anschauliche Deutung. Als Beispiel für ein Vektorfeld dient eine Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{v}$, die als eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} strömende Flüssigkeit der Dichte ρ interpretiert werden kann. Durch eine parallel zur yz -Ebene liegende Fläche $\Delta S = \Delta y \Delta z$ strömt der Fluß $\Phi_x = j_x \cdot \Delta y \Delta z$. Betrachtet wird ein Quader mit den Seitenlängen Δx , Δy und Δz . Als Differenz der Flüsse $j_x(x + \Delta x, y, z) \cdot \Delta y \Delta z$ durch die rückseitige Fläche und $j_x(x, y, z) \cdot \Delta y \Delta z$ durch die vordere Fläche ergibt sich der Überschuß des aus dem Quader strömenden Flusses:

$$\Delta \Phi_x = (j_x(x + \Delta x, y, z) - j_x(x, y, z)) \Delta y \Delta z = \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Analoge Ausdrücke für die anderen Flächen des Quaders ergeben insgesamt für den Flußüberschuß aus dem Volumen ΔV , d. h. für den durch die Quelle erzeugten Fluß $\Phi_q = \Delta \Phi$:

$$\Phi_q = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \operatorname{div} \vec{j} \cdot \Delta V.$$

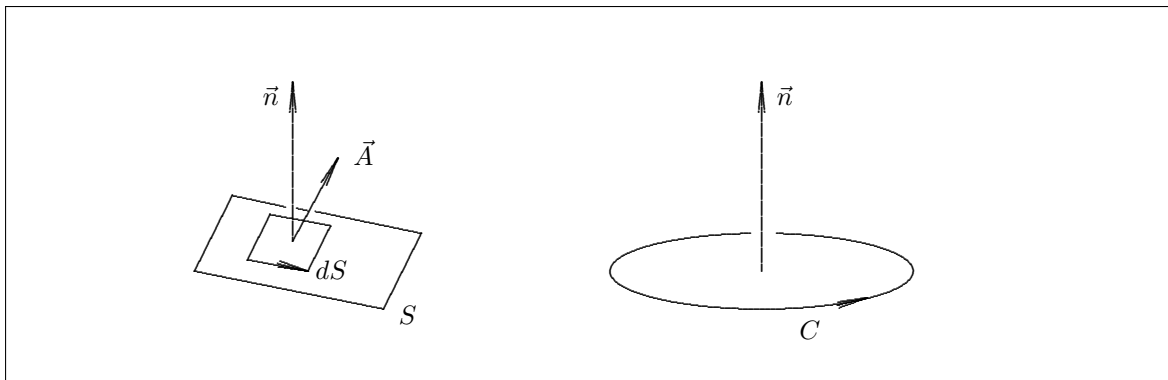
Für $\operatorname{div} \vec{j} > 0$ befindet sich eine Quelle des Flusses innerhalb des Volumens ΔV , für $\operatorname{div} \vec{j} < 0$ eine Senke des Flusses. Für ein Feld \vec{j} ohne Quellen und Senken gilt $\operatorname{div} \vec{j} = 0$; dies gilt im Falle einer Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{v}$, wenn die Flüssigkeit inkompressibel ist ($\rho = \text{const}$, bzw. $\partial \rho / \partial t = 0$).

Flächenintegral

Der Fluß $\Delta \Phi$ eines Vektorfeldes \vec{A} durch eine Fläche ΔS mit Normalenvektor \vec{n} ist

$$\Delta \Phi = \vec{A} \cdot \vec{n} \Delta S.$$

Die Schreibweise als Skalarprodukt liefert automatisch das Vorzeichen des Flusses relativ zur Richtung der Flächennormalen.



Für eine allgemeine Fläche ergibt sich der Fluß als Grenzwert einer Riemann-Summe:

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{A}_i \cdot \vec{n}_i \, \Delta S_i$$

In kartesischen Koordinaten ist:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S A_x n_x \, dS + \iint_S A_y n_y \, dS + \iint_S A_z n_z \, dS \\ &= \iint_S A_x \, dydz + \iint_S A_y \, dzdx + \iint_S A_z \, dxdy. \end{aligned}$$

Wenn für die Randkurve C der Fläche S ein Umlaufssinn definiert ist, so gilt für den Zusammenhang mit der Normalenrichtung die Rechte-Hand-Regel: zeigen die Finger in Richtung des Umlaufsinns, so zeigt der Daumen in die Normalenrichtung (Rechtsschraube). Bei Integralen über eine geschlossene Fläche S , die ein Volumen V einschließt, schreibt man

$$\Phi_q = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Konventionsgemäß zeigt bei geschlossenen Flächen der Normalenvektor \vec{n} stets nach außen.

Zieht man die Größe der Fläche und die Richtung der Flächennormalen zusammen erhält man

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= \vec{n} \, dS && \text{und} \\ \Phi_q &= \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Gaußscher Satz

Der Gaußsche Satz stellt für ein Vektorfeld \vec{A} eine Beziehung her zwischen dem Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes und dem Oberflächenintegral für den Fluß des Vektorfeldes. Er lautet:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \, dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Dabei ist S die das Volumen V einschließende geschlossene Fläche.

Beweisskizze: Für ein kleines Volumen ΔV , das durch die Fläche ΔS umschlossen wird, gilt, wie oben gezeigt wurde, der Zusammenhang

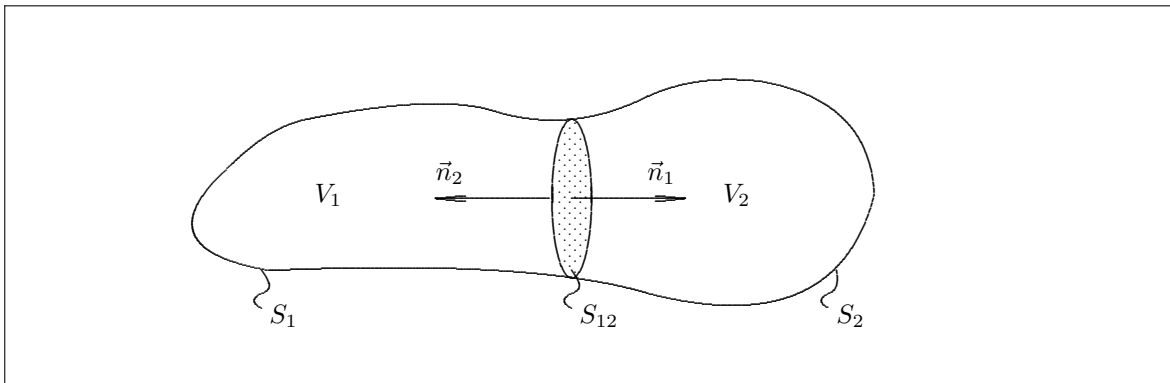
$$\Delta\Phi_q = \operatorname{div} \vec{A} \cdot \Delta V = \vec{A} \cdot \vec{n} \Delta S.$$

Dies gilt für Quader im kartesischen Koordinatensystem und damit auch für infinitesimal kleine Volumina. Nach den folgenden Überlegungen gilt diese Aussage und damit der Gaußsche Satz für jedes beliebige Volumen.

Der durch die Quellen bzw. Senken verursachte Fluß Φ_q durch die Oberfläche S des Volumens V ergibt sich aus der linken Seite durch Summation über alle infinitesimal kleinen Teilvolumina:

$$\Phi_q = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV$$

Den Fluß durch die Oberflächen erhält man aus der rechten Seite. Teilt man das Volumen V durch eine



Schnittfläche S_{12} in zwei Volumina V_1 und V_2 , sodaß die jeweiligen Oberflächen $S_1 + S_{12}$ bzw. $S_2 + S_{12}$ werden, so gilt für den Fluß durch die jeweiligen Volumina:

$$\begin{aligned} \Phi_{q1} &= \iint_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_{12}} \vec{A} \cdot \vec{n}_1 dS \\ \Phi_{q2} &= \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_{12}} \vec{A} \cdot \vec{n}_2 dS. \end{aligned}$$

Gemäß Richtungskonvention ist $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$, daher heben sich bei Addition die Beiträge durch die (gemeinsame) Schnittfläche auf:

$$\Phi_q = \Phi_{q1} + \Phi_{q2} = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS.$$

Die Aufteilung in 2 oder auch mehrere Volumina ist beliebig. Der Gaußsche Satz gilt damit für beliebige Volumina.

Der Gaußsche Satz ermöglicht eine allgemeine, vom Koordinatensystem unabhängige

Definition der Divergenz als Grenzwert eines Integrals:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} \vec{A} \cdot \vec{n} dS.$$

Gaußscher Satz für skalare Felder: Für die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{A} = \vec{a} \cdot \phi$ mit beliebigem, aber konstantem Vektor \vec{a} gilt

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \phi) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \phi = a_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + a_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + a_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Einsetzen in den Gaußschen Satz liefert

$$\iiint_V \vec{a} \cdot \text{grad } \phi \, dV = \iint_S \vec{a} \cdot \phi(\vec{r}) \, d\vec{S}.$$

Da der konstante Vektor \vec{a} beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\iiint_V \text{grad } \phi \, dV = \iint_S \phi(\vec{r}) \, d\vec{S}.$$

11.4 Rotation und Stokesscher Satz

Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$

ist in kartesischen Koordinaten definiert durch

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Die Rotation erzeugt ein vektorielles Feld, das als Wirbelfeld (engl.: solenoidal field) des Vektorfeldes bezeichnet wird. Die Rotation an einem Punkt ist definiert, wenn das Vektorfeld dort endlich, eindeutig und differenzierbar ist.

Anschauliche Deutung: Betrachtet wird die Rotation eines starren Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Einem Punkt des starren Körpers mit Ortsvektor \vec{r} kann ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ zugeordnet werden. Für die Rotation dieses Geschwindigkeitsfeldes ergibt sich $\text{rot } \vec{v} = \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega}$. Das Wirbelfeld $\text{rot } \vec{v}$ ist also konstant.

Stokesscher Satz

Der Satz stellt für ein Vektorfeld \vec{A} eine Beziehung her zwischen der Zirkulation (dem Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve C) und dem Flächenintegral über die Rotation:

$$\iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

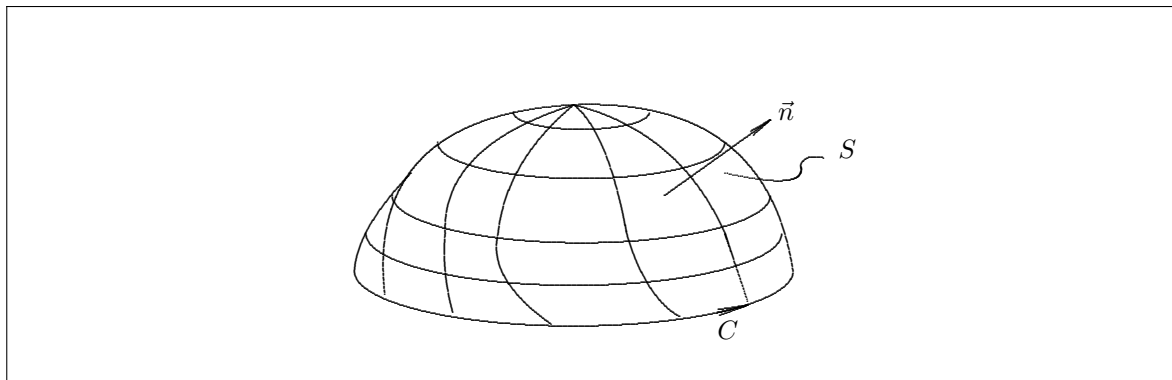
Dabei ist S eine durch die Kurve C begrenzte Fläche.

Beweisskizze: Zunächst wird der Stokessche Satz für ein kleines Flächenelement $\Delta S = \Delta x \Delta y$ parallel zur xy -Ebene betrachtet. Für dieses Flächenelement ist die Normale $\vec{n} = \vec{u}_z$. Das Flächenintegral über $\text{rot } \vec{A}$

$$I = \iint_{\Delta S} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Delta S} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

wird umgeformt; wegen $\vec{n} = \vec{u}_z$ geht nur die z -Komponente $(\text{rot } \vec{A})_z$ in die Rechnung ein:

$$(\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$



Für das Integral I folgt:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Delta S} (\operatorname{rot} \vec{A})_z \cdot \vec{u}_z dS = \iint_{\Delta S} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS \\
 &= \int_{y_1}^{y_1+\Delta y} \left[\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) dx \right] dy - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \left[\int_{y_1}^{y_1+\Delta y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dy \right] dx \\
 &= \int_{y_1}^{y_1+\Delta y} [A_y(x_1 + \Delta x, y) - A_y(x_1, y)] dy - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} [(A_x(x, y_1 + \Delta y) - A_x(x, y_1))] dx.
 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck läßt sich auch schreiben als Summe von vier Kurvenintegralen, jeweils über eine Seite des Flächenelements ΔS :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{y_1}^{y_1+\Delta y} A_y(x_1 + \Delta x, y) dy + \int_{x_1+\Delta x}^{x_1} A_x(x, y_1 + \Delta y) dx \\
 &\quad + \int_{y_1+\Delta y}^{y_1} A_y(x_1, y) dy + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} A_x(x, y_1) dx.
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt gerade die Zirkulation von \vec{A} längs der Randkurve ΔC des Flächenelements ΔS dar:

$$I = \oint_{\Delta C} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{a \rightarrow b} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{b \rightarrow c} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{c \rightarrow d} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{d \rightarrow a} \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

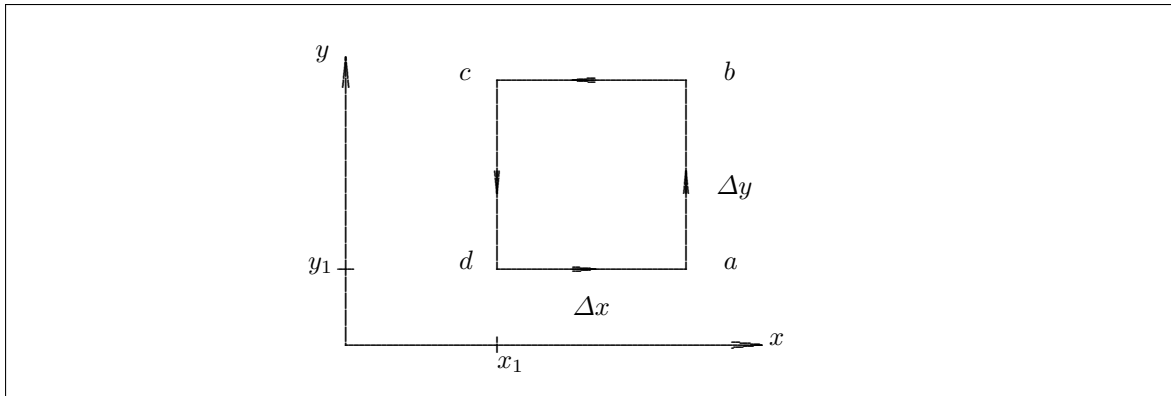
Die Integrale des Stokesschen Integralsatzes haben die Form von Skalarprodukten, daher gilt der skizzierte Beweis für jede Orientierung des Flächenelements ΔS .

Zu zeigen ist noch, daß der Stokessche Satz auch für beliebige Flächen gilt. Eine Fläche S mit Randkurve C kann in zwei Teilflächen S_1 und S_2 mit entsprechenden Randkurven $C_1 + C_{12}$ bzw. $C_2 - C_{12}$ zerlegt werden mit $C_1 + C_2 = C$ (die Randkurven enthalten einen gemeinsamen Weg C_{12}). Für die Integrale über die Flächen S und S_1, S_2 gilt:

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS.$$

In den Kurvenintegralen heben sich die Beiträge von dem gemeinsamen Weg C_{12} auf:

$$\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{C_{12}} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} - \int_{C_{12}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$



Aus dieser Additivitätseigenschaft der Integrale folgt die Gültigkeit des Stokesschen Satzes für endliche Flächen, denn jede Fläche kann beliebig in kleine, infinitesimale Flächenelemente zerlegt werden. Der Stokessche Satz ermöglicht eine allgemeine, vom Koordinatensystem unabhängige Definition der Rotation als Grenzwert eines Integrals:

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

Betrachtet wird dabei eine Folge von Flächenelementen ΔS mit der Flächennormale \vec{n} und den Randkurven ΔC ; der Grenzwert ist nach dem Stokesschen Satz gleich der Komponente von $\operatorname{rot} \vec{A}$ in Richtung der Flächennormale \vec{n} .

Bei dieser Definition braucht das Vektorfeld \vec{A} im Innern des Flächenelements ΔS nicht stetig zu sein.

11.5 Regeln für Differentialoperatoren

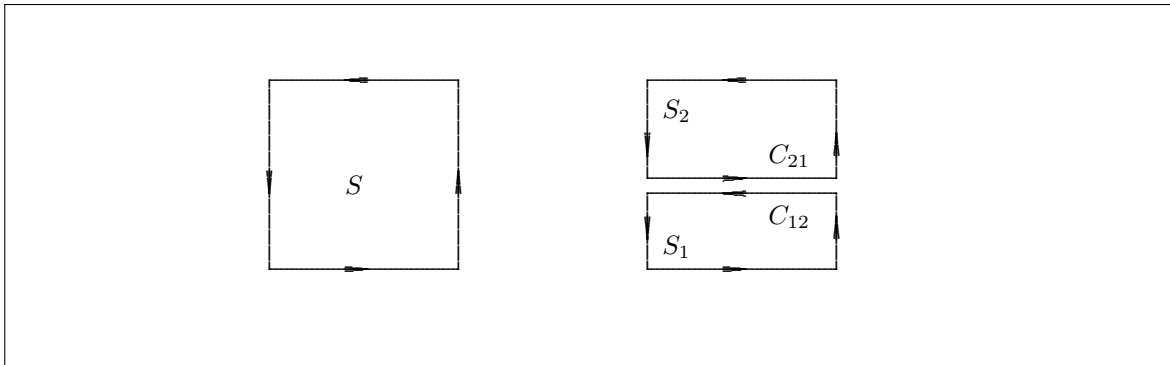
Produktregeln: Durch Anwendung der gewöhnlichen Produktregel der Differentialrechnung können Ausdrücke, bei denen ein Vektordifferentialoperator auf ein Produkt angewendet wird, umgeformt werden. Ein Beispiel ist die folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\phi \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z + \phi \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \vec{A}. \end{aligned}$$

In der Schreibweise mit dem Nabla-Operator lautet diese Produktregel:

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{A} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

Bei Vektordifferentialausdrücken, die auf Produkte angewendet werden, ist zu beachten, daß der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ sowohl ein Differentialzeichen ist, als auch sich wie ein Vektor verhält. Folgende Regel kann bei Produkten benutzt werden:



1. Der Differentialausdruck wird mit Hilfe des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ als Summe von Differentialausdrücken geschrieben, in denen jeweils nur ein Faktor differenziert wird (die konstant zu haltenden Faktoren erhalten den Index c).
2. Gemäß den Regeln der Vektorrechnung werden die Ausdrücke so umgeformt, daß die konstant zu haltenden Faktoren links vom Nablazeichen stehen, das dann durch grad, div oder rot interpretiert wird.

Mit dieser Regel erhält man folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(\phi\psi\eta) &= \vec{\nabla}\phi\psi\eta_c + \vec{\nabla}\phi_c\psi\eta_c + \vec{\nabla}\phi_c\psi_c\eta \\
 &= \psi\eta \text{grad}\phi + \phi\eta \text{grad}\psi + \phi\psi \text{grad}\eta \\
 \text{div}(\phi\vec{A}) &= \vec{\nabla}\phi\vec{A}_c + \vec{\nabla}\phi_c\vec{A} \\
 &= \vec{A} \cdot \text{grad}\phi + \phi \text{div}\vec{A} \\
 \text{rot}(\phi\vec{A}) &= \vec{\nabla} \times \phi\vec{A}_c + \vec{\nabla} \times \phi_c\vec{A} \\
 &= -\vec{A} \times \text{grad}\phi + \phi \text{rot}\vec{A} \\
 \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}_c) + \vec{\nabla}(\vec{A}_c \times \vec{B}) = \vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\
 &= \vec{B} \text{rot}\vec{A} - \vec{A} \text{rot}\vec{B}.
 \end{aligned}$$

Bei Benutzung des Entwicklungssatzes für das zweifache Vektorprodukt gilt ferner:

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} \\
 &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}
 \end{aligned}$$

Laplace-Operator: Für die doppelte Anwendung des Nabla-Operators in der Form $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ schreibt man kurz den Laplace-Operator Δ . Der Laplace-Operator ist gegeben durch

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

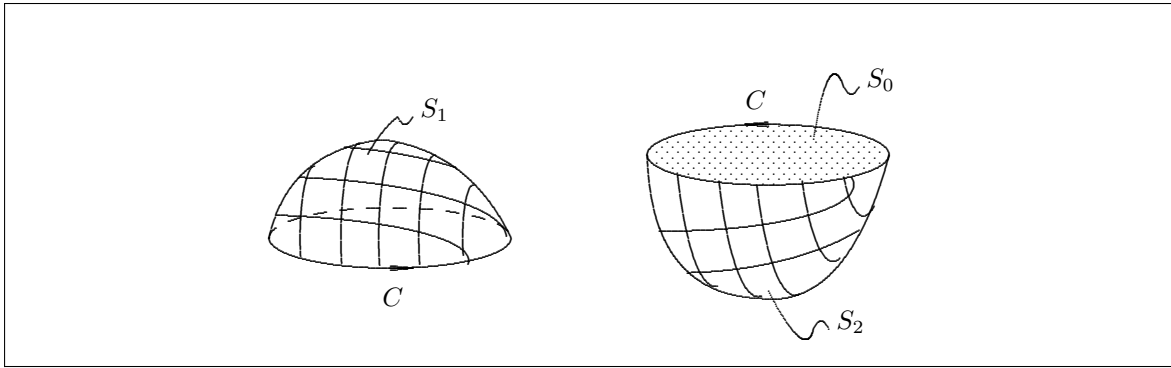
Zweite Ableitungen: Folgende Regeln gelten für die zweifache Anwendung des Nabla-Operators:

$$\begin{aligned}
 \text{div grad}\phi &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \Delta\phi \\
 \text{rot grad}\phi &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi \equiv 0 \\
 \text{div rot}\vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0 \\
 \text{rot rot}\vec{A} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \text{grad div}\vec{A} - \Delta\vec{A}.
 \end{aligned}$$

11.6 Eigenschaften von Wirbel- und Gradientenfeldern

Quellenfreiheit von Wirbelfeldern:

Betrachtet wird ein Volumen V mit der Oberfläche S . Wird eine Schnittfläche S_0 durch das Volumen gelegt, so wird sie durch die Randkurve C an der Oberfläche des Körpers begrenzt. Sie zerschneidet S in zwei Teile, S_1 und S_2 , die sich bei C berühren.



Nach dem Stokesschen Satz ist der Fluß des Vektors $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ durch die Flächen S_1 , S_2 und S_0 (dem Betrage nach) gleich:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{B} d\vec{S} &= \iint_{S_1} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{S_0} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \\ &= - \iint_{S_2} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n}_2 dS = \iint_{S_0} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Die Flächennormale \vec{n} wurde so gewählt, daß sie in das Innere des Körpers mit S_1 zeigt. Da \vec{n}_1 und \vec{n}_2 in entgegengesetzte Richtungen (nach außen) zeigen, ergibt sich der Vorzeichenwechsel in der 2. Zeile. Subtrahiert man beide Zeilen, so erhält man für den Fluß des Vektorfeldes $\text{rot } \vec{A}$ durch die Gesamtfläche $S = S_1 + S_2$

$$\oiint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n}_S dS = 0$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes liefert als Folge

$$\iiint_V \text{div} (\text{rot } \vec{A}) dV = 0$$

für ein beliebiges Vektorfeld \vec{A} . Da dies für jedes Volumen gilt, folgt

$$\text{div rot } \vec{A} \equiv 0$$

oder in Worten: das Vektorfeld $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ist quellenfrei. Diese Aussage folgt auch aus einer differentiellen Betrachtung:

$$\text{div rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} \equiv 0.$$

Wirbelfreiheit von Gradientenfeldern:

Für ein Gradientenfeld $\vec{A} = \text{grad } \phi$ ergibt die Bildung der Rotation:

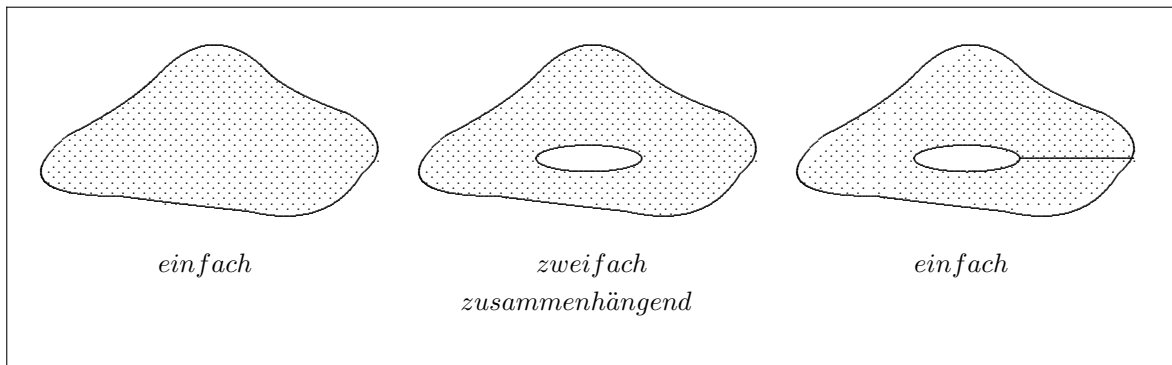
$$\text{rot } \vec{A} = \text{rot grad } \phi = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
&= \vec{u}_x \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right) + \vec{u}_y \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) + \vec{u}_z \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Äquivalente Folgerungen aus der Wirbelfreiheit ($\operatorname{rot} \vec{A} = 0$) eines Vektorfeldes \vec{A} sind:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \text{wegunabhängig}$$

Eine genauere Formulierung dieser Aussage ist: Wenn in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ gilt, dann gelten die obigen Aussagen und das Vektorfeld \vec{A} kann dargestellt werden als Gradient $\operatorname{grad} \phi$ eines skalaren Feldes ϕ . Ein Gebiet ist einfach zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte des Gebiets mindestens ein ganz in dem Gebiet verlaufender Weg C existiert und jeder andere Weg durch stetige Verformung in den Weg C übergeführt werden kann.



11.7 Krummlinige Koordinaten

Bisher wurden bei den Differentialoperatoren grad , div und rot die kartesischen Koordinaten x , y und z benutzt. Die Wahl eines speziellen krummlinigen Koordinatensystems kann die Behandlung eines physikalischen Problems wesentlich vereinfachen. Die krummlinigen Koordinaten werden mit u , v und w bezeichnet. Zwischen diesen Koordinaten und den kartesischen Koordinaten x , y und z muß eine umkehrbar eindeutige Abbildung existieren:

$$\begin{aligned}
x &= x(u, v, w) & u &= u(x, y, z) \\
y &= y(u, v, w) & \text{bzw. } v &= v(x, y, z) \\
z &= z(u, v, w) & w &= w(x, y, z).
\end{aligned}$$

Statt Koordinatenachsen, wie im kartesischen Koordinatensystem, definiert man Koordinatenlinien. Die u -Linie ist die Schnittlinie der beiden Flächen $v = \text{const}$ und $w = \text{const}$. Die v - und die w -Linie ergibt sich analog.

Differentieller Ortsvektor, Einheitsvektoren, Linienelement und Metrik:

Der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

oder beschrieben als Funktion der krummlinigen Koordinaten

$$\vec{r} = x(u, v, w) \vec{e}_x + y(u, v, w) \vec{e}_y + z(u, v, w) \vec{e}_z$$

Die infinitesimale Änderung $d\vec{r}$ in kartesischen Koordinaten, als Funktion der krummlinigen, lautet dann:

$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \right) \vec{e}_z$$

oder kurz

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw. \quad (11.1)$$

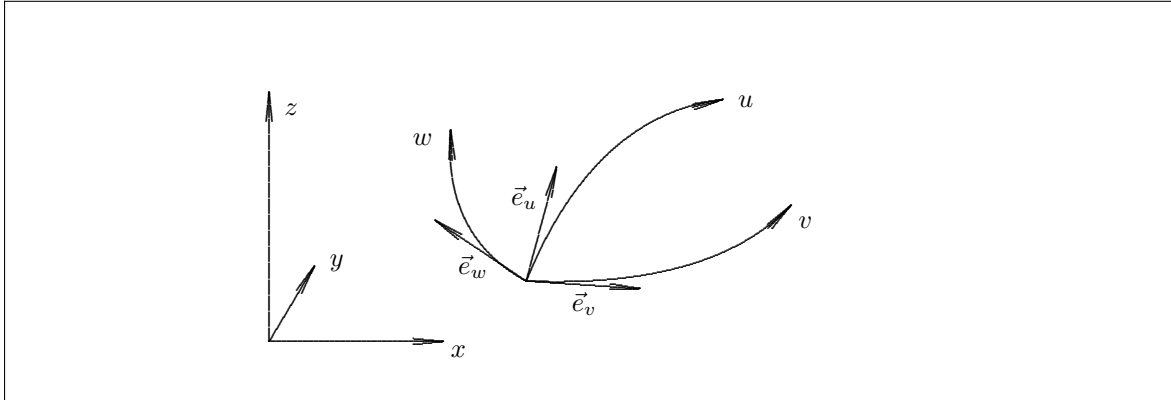
Die Beträge der Ableitungen von \vec{r} nach den Koordinaten u , v und w heißen metrische Koeffizienten und beschreiben die Änderung des Maßstabs mit dem Ort:

$$g_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| \quad g_v = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \quad g_w = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|.$$

Die Ableitung $\partial \vec{r} / \partial u$ ist ein tangential zur u -Linie gerichteter Vektor; entsprechendes gilt für die Ableitungen nach v und w . Die Einheitsvektoren in Tangentenrichtungen sind dann

$$\begin{aligned} \vec{e}_u &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|} & \vec{e}_v &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} & \vec{e}_w &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|} \\ \vec{e}_u &= \frac{1}{g_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} & \vec{e}_v &= \frac{1}{g_v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} & \vec{e}_w &= \frac{1}{g_w} \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Ist \vec{r} in kartesischen Koordinaten gegeben, dann werden diese Einheitsvektoren auch durch kartesische Koordi-



naten ausgedrückt. Die Einheitsvektoren \vec{e}_u , \vec{e}_v und \vec{e}_w bilden an jedem Punkt des Raumes ein lokales Dreiein in den Richtungen der drei Koordinatenlinien.

In diesem neuen Koordinatensystem wird $d\vec{r}$ dargestellt durch

$$d\vec{r} = (d\vec{r} \cdot \vec{e}_u) \cdot \vec{e}_u + (d\vec{r} \cdot \vec{e}_v) \cdot \vec{e}_v + (d\vec{r} \cdot \vec{e}_w) \cdot \vec{e}_w$$

Gleichung 11.1 eingesetzt, die partiellen Ableitungen durch 11.2 substituiert und unter Verwendung von

$$(\vec{e}_u \cdot \vec{e}_x)^2 + (\vec{e}_u \cdot \vec{e}_y)^2 + (\vec{e}_u \cdot \vec{e}_z)^2 = |\vec{e}_u|^2 = 1$$

führt zu

$$d\vec{r} = g_u du \vec{e}_u + g_v dv \vec{e}_v + g_w dw \vec{e}_w.$$

Die Komponenten von $d\vec{r}$ im krummlinigen Koordinatensystem sind demnach $g_u du$, $g_v dv$ und $g_w dw$.

Mit den Bezeichnungen u_1, u_2 und u_3 für u, v und w und den Bezeichnungen \vec{e}_i bzw. g_i für die Einheitsvektoren und die metrischen Koeffizienten läßt sich die Änderung des Ortsvektors kurz in der Form

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 g_i du_i \vec{e}_i$$

schreiben. Das skalare **Linielement** ds erhält man aus dem Produkt $(d\vec{r})^2$:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_i g_j du_i du_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} du_i du_j$$

Die Elemente g_{ij} bilden die **Metrik** des Systems:

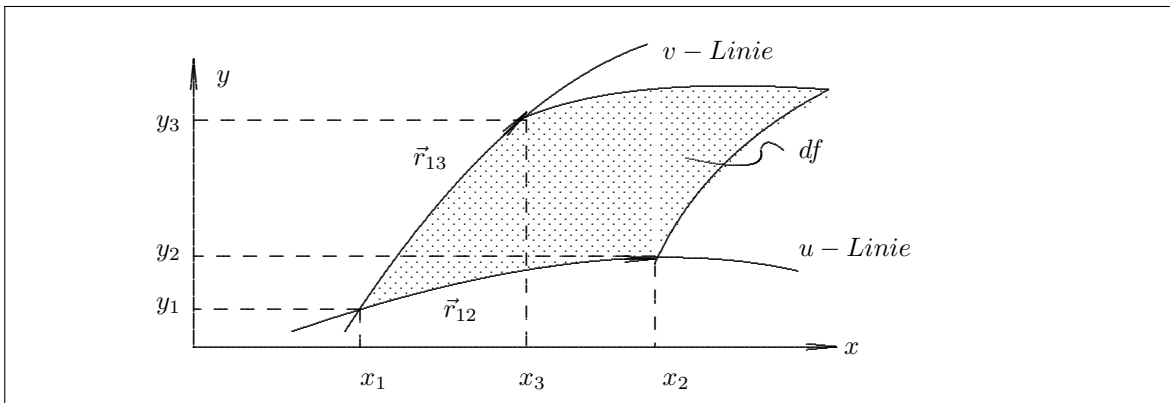
$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} \right) = g_i g_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j).$$

Die g_{ij} formen eine Matrix

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Das Flächenelement:

Die Koordinatensysteme seien so gelegt, daß das in der Abbildung skizzierte kleine Flächenelement $\Delta \vec{f}$ ganz in der xy -Ebene und ganz in der uv -Fläche liegt.



Die Koordinaten der Eckpunkte werden über eine Taylorentwicklung verknüpft:

$$\text{Längs der } u\text{-Linie: } x_2 = x_1 + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u; \quad y_2 = y_1 + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u;$$

$$\text{Längs der } v\text{-Linie: } x_3 = x_1 + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v; \quad y_3 = y_1 + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v;$$

und die Vektoren \vec{r}_{12} und \vec{r}_{13} werden

$$\vec{r}_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u, 0 \right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u \quad \text{und} \quad \vec{r}_{13} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v, 0 \right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v$$

Ist $\Delta\vec{f}$ klein, so berechnet es sich als Vektorparallelogramm

$$\begin{aligned}\Delta\vec{f} &= \vec{r}_{12} \times \vec{r}_{13} \\ &= \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v \\ &= \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \cdot \vec{e}_f \\ &\equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Delta u \Delta v \cdot \vec{e}_f.\end{aligned}$$

Der Einheitsvektor \vec{e}_f steht senkrecht auf der Fläche Δf und ist bei unserer Wahl des Koordinatensystems gleich \vec{e}_z .

Beim Übergang zu infinitesimal kleinen Flächenelementen erhält man für den Betrag $df = dx dy$

$$dx dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv.$$

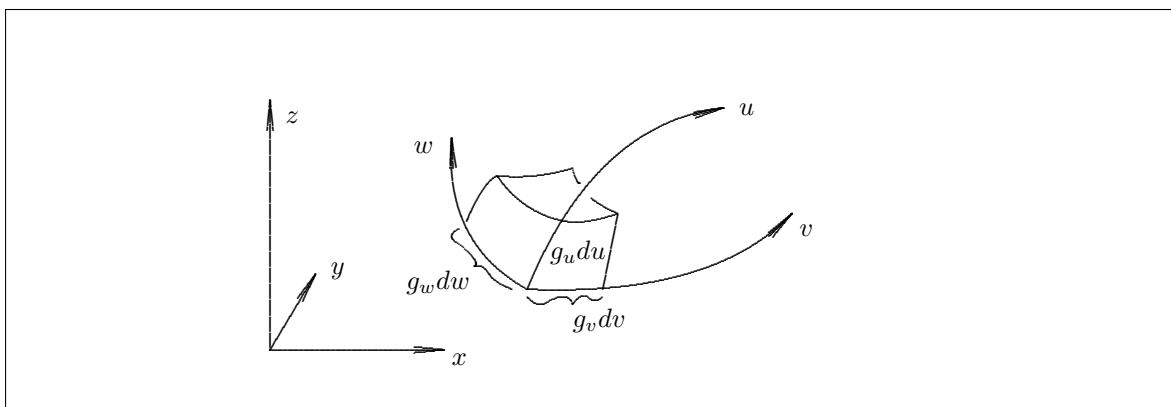
Es wurde die Abkürzung für die Jacobi- oder Funktional-Determinante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v \end{vmatrix}$$

benutzt.

Das Volumenelement:

Für die Transformation des Volumenelements aus krummlinigen in kartesische Koordinaten findet man



$$dV = dx dy dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} du dv dw.$$

Zum Beweis wird ein Parallelepiped als Volumenelement dV betrachtet, das durch die Vektoren

$$\begin{aligned}d\vec{r}_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du, \frac{\partial z}{\partial u} du \right) \\ d\vec{r}_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv, \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \\ d\vec{r}_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial w} dw, \frac{\partial y}{\partial w} dw, \frac{\partial z}{\partial w} dw \right)\end{aligned}$$

aufgespannt wird. Das Volumen des Parallelepipeds ist gleich dem Spatprodukt

$$dV = d\vec{r}_1 \cdot (d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3) = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u \, du & \partial y / \partial u \, du & \partial z / \partial u \, du \\ \partial x / \partial v \, dv & \partial y / \partial v \, dv & \partial z / \partial v \, dv \\ \partial x / \partial w \, dw & \partial y / \partial w \, dw & \partial z / \partial w \, dw \end{vmatrix}$$

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du \, dv \, dw$$

Orthogonale Koordinaten

Man nennt die krummlinigen Koordinaten u_1 , u_2 und u_3 orthogonal, wenn für die Produkte der Einheitsvektoren

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

gilt. Für die Metrik bei orthogonalen Koordinaten folgt:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3^2 \end{pmatrix}$$

und es gilt für das Linienelement ds

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 g_i^2 (du_i)^2 = g_u^2 du^2 + g_v^2 dv^2 + g_w^2 dw^2.$$

Weil nach Definition gilt:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = g_u \vec{e}_u \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = g_v \vec{e}_v \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = g_w \vec{e}_w \quad ,$$

erhält man für das Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du \, dv \\ &= (g_u \vec{e}_u \times g_v \vec{e}_v) du \, dv \\ &= g_u g_v du \, dv (\vec{e}_u \times \vec{e}_v) \\ &= g_u g_v du \, dv \vec{e}_w \end{aligned}$$

Ähnlich verfährt man für das Volumenelement und erhält damit

$$dV = g_u g_v g_w \vec{e}_u \cdot (\vec{e}_v \times \vec{e}_w) du \, dv \, dw = g_u g_v g_w du \, dv \, dw$$

Die Funktionaldeterminanten in orthogonalen Systemen sind also

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = g_u g_v \quad \text{und} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = g_u g_v g_w.$$

Im folgenden werden ausschließlich orthogonale krummlinige Koordinaten betrachtet.

Gradient: Der Gradient $\text{grad } \phi$ des skalaren Feldes ϕ ist allgemein definiert durch

$$d\phi = (\text{grad } \phi) \cdot d\vec{r}.$$

In krummlinigen, orthogonalen Koordinaten u , v und w ist

$$\begin{aligned} d\phi &= (\text{grad } \phi) \cdot \vec{e}_u g_u du + (\text{grad } \phi) \cdot \vec{e}_v g_v dv + (\text{grad } \phi) \cdot \vec{e}_w g_w dw \\ &= (\text{grad } \phi)_u g_u du + (\text{grad } \phi)_v g_v dv + (\text{grad } \phi)_w g_w dw \end{aligned}$$

und

$$d\vec{r} = \vec{e}_u g_u du + \vec{e}_v g_v dv + \vec{e}_w g_w dw.$$

Durch Vergleich mit dem Ausdruck für das totale Differential

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial \phi}{\partial v} \right) dv + \left(\frac{\partial \phi}{\partial w} \right) dw$$

erhält man als Komponenten des Gradienten:

$$(\text{grad } \phi)_u = \frac{1}{g_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \quad (\text{grad } \phi)_v = \frac{1}{g_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \quad (\text{grad } \phi)_w = \frac{1}{g_w} \frac{\partial \phi}{\partial w}.$$

Divergenz: Die allgemeine, vom Koordinatensystem unabhängige Definition der Divergenz $\text{div } \vec{A}$ eines Vektorfeldes \vec{A} lautet:

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{A} d\vec{S}.$$

Als Volumenelement ΔV wird ein Quader im u, v, w -System mit Kanten parallel zu den u, v, w -Koordinatenlinien gewählt: $\Delta V = g_u g_v g_w \Delta u \Delta v \Delta w$. Der Fluß durch die beiden Quaderflächen mit Normalen parallel zur u -Richtung ist unter Beachtung der jeweiligen Normalenrichtung

$$A_u(u + \Delta u) \Delta S(u + \Delta u) - A_u(u) \Delta S(u).$$

Mit $\Delta S = g_v g_w \Delta v \Delta w$ für diese Quaderflächen wird der Fluß

$$g_v(u + \Delta u) g_w(u + \Delta u) A_u(u + \Delta u) \Delta v \Delta w - g_v(u) g_w(u) A_u(u) \Delta v \Delta w = \frac{\partial(g_v g_w A_u)}{\partial u} \Delta u \Delta v \Delta w.$$

Als Fluß durch sämtliche Quaderflächen erhält man den Ausdruck

$$\oint_{\Delta S} \vec{A} d\vec{S} = \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (g_v g_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (g_w g_u A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (g_u g_v A_w) \right\} \Delta u \Delta v \Delta w,$$

der gemäß der allgemeinen Definition der Divergenz gleich

$$\text{div } \vec{A} \Delta V = \text{div } \vec{A} g_u g_v g_w \Delta u \Delta v \Delta w$$

ist. Damit erhält man die Formel für die Divergenz in orthogonalen krummlinigen Koordinaten:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{g_u g_v g_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (g_v g_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (g_w g_u A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (g_u g_v A_w) \right\}.$$

Rotation: Die allgemeine, vom Koordinatensystem unabhängige Definition der Rotation $\text{rot } \vec{A}$ eines Vektorfeldes \vec{A} lautet:

$$(\text{rot } \vec{A})_{\vec{n}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \vec{A} \cdot d\vec{r},$$

wobei der Grenzwert einer Folge von Flächenelementen ΔS mit der Flächennormalen \vec{n} betrachtet wird. Bei einem Flächenelement $\Delta S = g_v g_w \Delta v \Delta w$ bildet der Umlaufsinn der Randkurve ΔC mit der Normalenrichtung $\vec{n} = \vec{e}_u$ eine Rechtsschraube. Das Kurvenintegral über die geschlossene Kurve ΔC ist:

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta C} \vec{A} \cdot d\vec{r} &= g_v(w) A_v(w) \Delta v + g_w(v + \Delta v) A_w(v + \Delta v) \Delta w - g_v(w + \Delta w) A_v(w + \Delta w) \Delta v - g_w(v) A_w(v) \Delta w \\ &= \frac{\partial(g_w A_w)}{\partial v} \Delta v \Delta w - \frac{\partial(g_v A_v)}{\partial w} \Delta v \Delta w \end{aligned}$$

Im Limes $\Delta S \rightarrow 0$ erhält man:

$$(\text{rot } \vec{A})_u = \frac{1}{g_v g_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (g_w A_w) - \frac{\partial}{\partial w} (g_v A_v) \right\}.$$

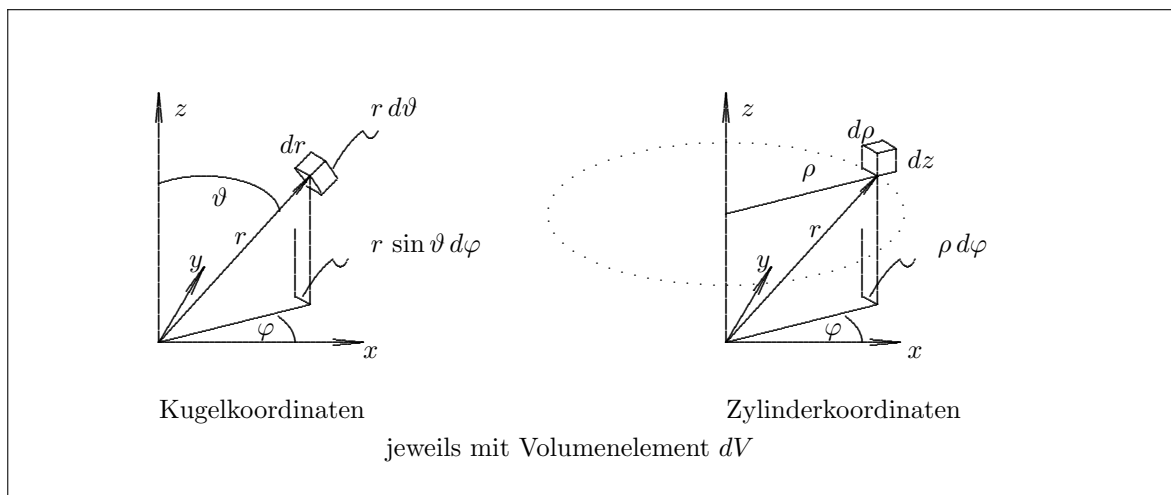
Bei Berücksichtigung der anderen möglichen Orientierungen des Flächenelements erhält man als Formel für die Rotation in orthogonalen krummlinigen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{g_u g_v g_w} \begin{vmatrix} g_u \vec{e}_u & g_v \vec{e}_v & g_w \vec{e}_w \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ g_u A_u & g_v A_v & g_w A_w \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{g_u g_v g_w} \left\{ g_u \vec{e}_u \left(\frac{\partial(g_w A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(g_v A_v)}{\partial w} \right) + g_v \vec{e}_v \left(\frac{\partial(g_u A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(g_w A_w)}{\partial u} \right) \right. \\ &\quad \left. + g_w \vec{e}_w \left(\frac{\partial(g_v A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(g_u A_u)}{\partial v} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Laplace-Operator: Durch Kombination der Formeln für Divergenz und Gradient erhält man für den Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten:

$$\Delta \phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{g_u g_v g_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g_v g_w}{g_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{g_w g_u}{g_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{g_u g_v}{g_w} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \right\}.$$

Spezielle orthogonale Koordinatensysteme



Kugelkoordinaten sind die Koordinaten r , ϑ und φ , der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Metrische Koeffizienten:

$$g_r = 1 \quad g_\vartheta = r \quad g_\varphi = r \sin \vartheta$$

und damit die Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \cdot \vec{e}_y + \cos \vartheta \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \vec{e}_y - \sin \vartheta \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Oder die kartesischen Vektoren ausgedrückt durch Vektoren in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \vec{e}_x \cdot (\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \vec{e}_r + \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \vec{e}_\vartheta - \sin \varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \vec{e}_y \cdot (\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi) = \sin \vartheta \sin \varphi \cdot \vec{e}_r + \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \vec{e}_\vartheta + \cos \varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \cdot (\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi) = \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r - \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Volumenelement:

$$dV = dx dy dz = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = -r^2 dr d(\cos \vartheta) d\varphi$$

Vektordifferentialoperatoren:

$$\begin{aligned}(\text{grad } \phi)_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} & (\text{grad } \phi)_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} & (\text{grad } \phi)_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \\ \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ (\text{rot } \vec{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta A_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \\ (\text{rot } \vec{A})_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \\ (\text{rot } \vec{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \\ \Delta \phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten sind die Koordinaten ρ , φ und z . Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z.\end{aligned}$$

Metrische Koeffizienten:

$$g_\rho = 1 \quad g_\varphi = \rho \quad g_z = 1$$

und damit die Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \varphi \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_z &= \frac{1}{1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y + 1 \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

Volumenelement:

$$dV = dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$$

Vektordifferentialoperatoren:

$$\begin{aligned}(\text{grad } \phi)_\rho &= \frac{\partial \phi}{\partial \rho} & (\text{grad } \phi)_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} & (\text{grad } \phi)_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \text{div } \phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ (\text{rot } \vec{A})_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} & (\text{rot } \vec{A})_\varphi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} & (\text{rot } \vec{A})_z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \\ \Delta \phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

11.8 Greensche Sätze

Für die Divergenz des Vektorfeldes $\phi\vec{A}$ (dabei ist ϕ ein skalares und \vec{A} ein vektorielles Feld) gilt

$$\operatorname{div}(\phi\vec{A}) = (\operatorname{grad}\phi) \cdot \vec{A} + \phi \operatorname{div}\vec{A}.$$

In dieser Gleichung steht rechts ein Skalarprodukt von zwei Vektorfeldern und ein Produkt von zwei skalaren Feldern. Das Integral des ganzen Ausdrucks über ein Volumen V ist

$$\iiint_V \operatorname{div}(\phi\vec{A}) \, dV = \iiint_V [(\operatorname{grad}\phi) \cdot \vec{A} + \phi \operatorname{div}\vec{A}] \, dV.$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf die linke Seite ergibt (S ist die Oberfläche des Volumens V):

$$\oiint_S \phi\vec{A} \, d\vec{S} = \iiint_V [(\operatorname{grad}\phi) \cdot \vec{A} + \phi \operatorname{div}\vec{A}] \, dV.$$

Für das vektorielle Feld \vec{A} wird der Gradient des skalaren Feldes ψ gewählt: $\vec{A} = \operatorname{grad}\psi$. Für die Divergenz dieses Feldes gilt: $\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \Delta\psi$. Einsetzen dieses Feldes liefert den **ersten Greenschen Satz**:

$$\oiint_S \phi(\operatorname{grad}\psi) \, d\vec{S} = \iiint_V [(\operatorname{grad}\phi) \cdot (\operatorname{grad}\psi) + \phi\Delta\psi] \, dV.$$

oder

$$\oiint_S \phi(\vec{\nabla}\psi) \, d\vec{S} = \iiint_V [(\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\psi) + \phi\Delta\psi] \, dV.$$

Durch Vertauschen von ϕ und ψ erhält man

$$\oiint_S \psi(\operatorname{grad}\phi) \, d\vec{S} = \iiint_V [(\operatorname{grad}\psi) \cdot (\operatorname{grad}\phi) + \psi\Delta\phi] \, dV$$

und durch Subtraktion der vorigen Gleichung den

zweiten Greenschen Satz:

$$\oiint_S [\psi \operatorname{grad}\phi - \phi \operatorname{grad}\psi] \, d\vec{S} = \iiint_V [\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi] \, dV.$$

oder

$$\oiint_S [\psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\psi] \, d\vec{S} = \iiint_V [\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi] \, dV.$$

11.9 Potentiale

Als Potential bezeichnet man eine Zustandsfunktion, die von mehreren unabhängigen Variablen abhängen kann und die durch partielle Differentiation nach diesen Variablen zu Größen mit eigener physikalischer Bedeutung umgewandelt wird. Eine Zustandsfunktion ist dabei eine Größe, die den Zustand des Systems charakterisiert und nicht vom Weg abhängt, auf dem dieser Zustand erreicht wurde.

Ist das Potential durch eine skalare Funktion charakterisiert, so spricht man von einem skalaren Potential. Bilden mehrere skalare Potentiale die Komponenten eines Vektorfeldes, so spricht man von einem Vektorpotential. Als Tensorkomponenten angeordnet erhält man ein Tensorpotential.

Bei lokalen Potentialen geht nur der Ort ein, dessen Zustand beschrieben wird. Bei nichtlokalen Potentialen ist der Zustand auch von den Koordinaten im übrigen Raum abhängig.

Die Existenz des Potentials führt zu mehreren äquivalenten Aussagen, hier am Beispiel des skalaren Potentials erläutert:

1. Das Potential ϕ **besitzt ein totales Differential** $d\phi$, denn für beliebig wählbare Punkte \vec{r}_0 , \vec{r} ist

$$\int_{\vec{r}_0, C}^{\vec{r}} d\phi = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$$

Das Ergebnis $\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ gilt für beliebige Integrationswege C , ist also nicht vom Integrationsweg abhängig.

2. Es existiert ein Feld \vec{F} (z.B. ein Kraftfeld), das sich darstellen läßt als

$$\vec{F} = -\text{grad } \phi$$

Wegen

$$d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\vec{r}$$

ist diese Aussage äquivalent zu der in Absatz 1.

Ist nur das Feld und nicht das Potential von physikalischer Bedeutung, dann ist die Integrationskonstante $\phi(\vec{r}_0)$ (Absatz 1) frei wählbar.

3. Das Linienintegral $\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ **ist unabhängig vom Weg**.

Die Integration längs des beliebigen Wegs C liefert

$$\int_{\vec{r}_0, C}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_0, C}^{\vec{r}} \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\phi = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$$

d.h. **die Zirkulation Γ verschwindet** für einen Weg C' , der von \vec{r}_0 nach \vec{r} und wieder zurück führt:

$$\Gamma = - \oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C'} \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = 0.$$

Ist \vec{F} eine Kraft, dann ist $\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0)$ die Arbeit längs des Weges C . Sie ist nicht vom Weg, sondern nur von den Endpunkten abhängig. Beim Rückweg von \vec{r} nach \vec{r}_0 wird die Energie zurückgewonnen.

“ \vec{F} ist ein konservatives Feld”

4. \vec{F} **ist wirbelfrei**.

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

dann gilt auch für das Integral über die Fläche S mit dem Rand C'

$$0 = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

wie oben.

Physikalische Anwendung und Poisson-Gleichung

Beispiele für Potentiale

Newton'sches Potential	$V = f \frac{Mm}{r}$	Gravitationskraft	$\vec{F} = - \text{grad } V$
Hydrodynamik, wirbelfreie Strömung = Potentialströmung:			
Geschwindigkeitspotential	$\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$	Geschwindigkeit	$\vec{v} = \text{grad } \Phi$
Elektrostatisches Potential	$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	Feldstärke	$\vec{E} = - \text{grad } \phi$
Magnetisches Vektorpotential	$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$	Magnetfeld	$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

Thermodynamische Potentiale (mit Temperatur T , Volumen V , Druck p , und Anzahl der Mole n_i in einem Gemisch; μ_i ist das “chemische Potential”):

$$\text{Innere Energie } U = U(S, V) \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, n_i}, \quad -p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, n_i}, \quad \mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{S, V, n_j};$$

$$\text{Enthalpie } H = H(p, S) = U + pV \\ T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{V, n_i}, \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S, n_i}, \quad \mu_i = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{S, p, n_j};$$

$$\text{Freie Energie } F = F(T, V) = U - TS \\ -S = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V, n_i}, \quad -p = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T, n_i}, \quad \mu_i = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_j};$$

$$\text{Freie Enthalpie } G = G(T, p) = H - TS \\ \text{(Gibbssches Potential)} \quad -S = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p, n_i}, \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T, n_i}, \quad \mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_j}.$$

Ermittlung der Potentiale

Elektrostatische Felder $\vec{E}(\vec{r})$ sind wirbelfrei; sie werden durch elektrische Ladungen q hervorgerufen, die die Quellen des elektrischen Feldes darstellen. Bei räumlich verteilten elektrischen Ladungen, die durch eine elektrische Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ beschrieben werden, ist die Divergenz des resultierenden elektrischen Feldes durch die Ladungsdichte gegeben. Im Vakuum gilt:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{rot } \vec{E} = 0$$

(ϵ_0 = Permittivität des Vakuums). Bei der Darstellung des elektrischen Feldes \vec{E} als Gradient eines skalaren Potentials ϕ wird ein negatives Vorzeichen benutzt:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi.$$

Einsetzen in die Divergenz-Gleichung ergibt die **Poisson-Gleichung**:

$$\text{div grad } \phi = \Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Bei gegebener elektrischer Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$ ergibt sich das Potential $\phi(\vec{r})$ aus der Poisson-Gleichung durch Integration über das die gesamte Ladung umfassende Volumen:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

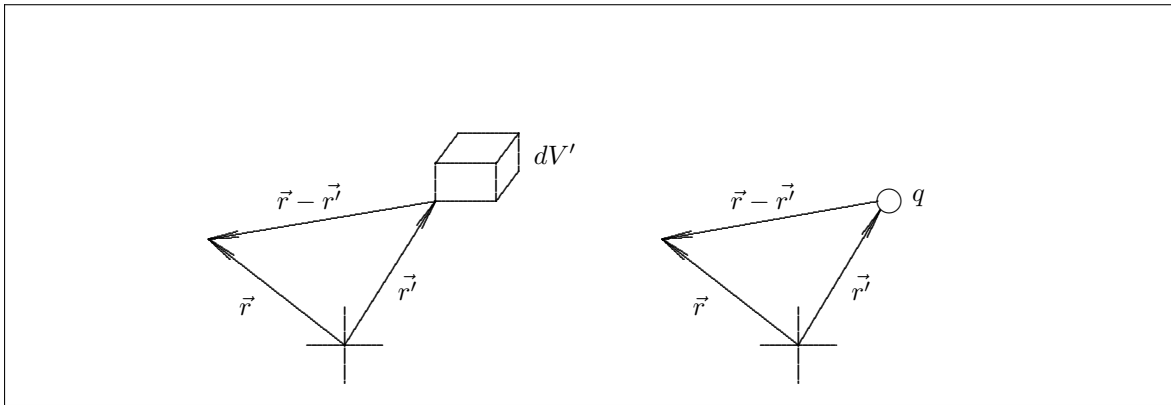
Diese Gleichung stellt eine Verallgemeinerung der entsprechenden Formel für das Potential am Ort \vec{r} dar, wenn sich eine Punktladung q am Ort \vec{r}' befindet:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Formal ergibt sich die Lösung der Poisson-Gleichung wie folgt. In dem zweiten Greenschen Satz wird speziell $\psi = 1/r$ gewählt. Bei dieser Abhängigkeit gilt (bei $r \neq 0$) $\text{grad}(1/r) = -\vec{u}_r/r^2$ und $\Delta(1/r) = 0$. Einsetzen in den zweiten Greenschen Satz liefert

$$\oint_S \left[\frac{1}{r} \text{grad } \phi + \frac{\vec{u}_r}{r^2} \phi \right] \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \left[\frac{1}{r} \Delta\phi \right] dV.$$

Für $\Delta\phi$ im rechten Integral kann gemäß der Poisson-Gleichung $-\rho/\epsilon_0$ eingesetzt werden. Bei der Integration des linken Integrals über den gesamten Raum wird angenommen, daß das Volumen nach außen durch eine ins Unendliche strebende Fläche S begrenzt wird, und nach innen durch die Fläche K einer Kugel begrenzt wird, deren Radius r_0 gegen Null geht. Für eine endliche Ladungsmenge nimmt das Potential ϕ für große Werte von r sicher mindestens proportional zu $1/r$ ab. Daher verschwindet das Integral über die Fläche S , denn der Integrand



nimmt mindestens proportional zu $1/r^3$ ab, die Integrationsfläche dagegen verhält sich wie r^2 . Die Kugelfläche K (Fläche = $4\pi r_0^2$) um den Aufpunkt liefert dagegen einen endlichen Beitrag: für die beiden Summanden im Integranden gilt

$$\frac{1}{r} \operatorname{grad} \phi \cdot \vec{n} \Rightarrow -\frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=r_0} \quad \frac{\vec{u}_r}{r^2} \phi \cdot \vec{n} \Rightarrow -\frac{1}{r_0^2} (\phi)_{r=r_0}$$

Da weder ϕ noch $\partial\phi/\partial r$ am Aufpunkt $r = 0$ unendlich werden, erhält man im Limes $r_0 \rightarrow 0$ nur von dem zweiten Summanden einen nicht verschwindenden Beitrag $-4\pi(\phi)_{r=0}$ und insgesamt

$$4\pi (\phi)_{r=0} = \iiint \frac{\rho}{\epsilon_0 r} dV.$$

Bezeichnet man den Ortsvektor des Aufpunktes ($r = 0$) nun mit \vec{r} und den Ortsvektor des Integrationspunktes mit \vec{r}' , so erhält man

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

als Lösung der Poisson-Gleichung.

Vektoriell Potential

Das Feld $\vec{A}(\vec{r})$ heißt vektoriell Potential des Vektorfeldes $\vec{B}(\vec{r})$, wenn gilt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}).$$

Voraussetzung für die Definition eines vektoriellen Potentials $\vec{A}(\vec{r})$ ist die Quellenfreiheit von $\vec{B}(\vec{r})$:

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0.$$

Diese Eigenschaft hat ein Wirbelfeld, denn es gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \equiv 0.$$

Zu dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ kann der Gradient eines beliebigen skalaren Feldes χ addiert werden (siehe unten).

Physikalische Anwendung: Statische Magnetfelder $\vec{B}(\vec{r})$ werden durch stationäre elektrische Ströme verursacht, die die Wirbel des magnetischen Feldes darstellen, das quellenfrei ist. Wird die elektrische Stromdichte mit \vec{j} bezeichnet, so gilt im Vakuum:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

(μ_0 = Permeabilität des Vakuums). Zu einem die Gleichung $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}'$ erfüllenden Feld \vec{A}' kann noch ein beliebiges Gradientenfeld $\text{grad } \chi$ addiert werden,

$$\vec{B} = \text{rot} \left(\vec{A}' + \text{grad } \chi \right),$$

denn $\text{rot grad } \chi = 0$. Bei der Coulomb-Eichung wird ein skalares Feld χ so gewählt, daß das Feld $\vec{A}' + \text{grad } \chi$ quellenfrei ist:

$$\text{div} \left(\vec{A}' + \text{grad } \chi \right) = \text{div } \vec{A}' + \Delta \chi = 0.$$

Dies läßt sich erreichen durch die Wahl

$$\Delta \chi = -\text{div } \vec{A}'.$$

Für das Vektorpotential \vec{A} folgt aus der Gleichung $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$:

$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{j} &= \text{rot rot } \vec{A} \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ &= \text{grad} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung verschwindet bei der Coulomb-Eichung $\text{div } \vec{A}$, sodaß man die Beziehung

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

zwischen der Stromdichte \vec{j} und dem Vektorpotential \vec{A} erhält. Für jede Komponente von \vec{A} gilt also die Poisson-Gleichung:

$$\Delta A_x(\vec{r}) = -\mu_0 j_x \quad \Delta A_y(\vec{r}) = -\mu_0 j_y \quad \Delta A_z(\vec{r}) = -\mu_0 j_z$$

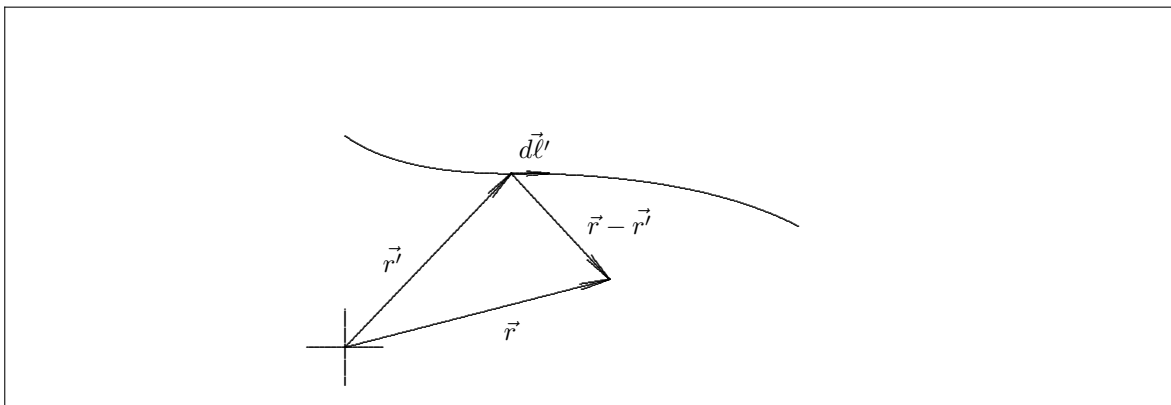
Die Lösung ist daher analog zum Fall des skalaren Potentials gegeben durch

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_x(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{etc.}$$

und in Vektorform

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Wird die Stromdichte über den Querschnitt des stromführenden Leiters integriert, so erhält man den Strom



$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{f}$. Deshalb gilt $\vec{j} dV' = I d\vec{\ell}'$. Das Leiterelement $d\vec{\ell}'$ am Ort $d\vec{r}'$ hat die Richtung der Stromdichte. Die Integration wird über die gesamte Länge ℓ des den Strom I führenden Leiters ausgeführt. Damit wird

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell} \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und für \vec{B} erhält man durch Bildung der Rotation:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell} \vec{\nabla} \times \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Dabei ist zu beachten, daß der Nabla - Operator nur auf \vec{r} , aber nicht auf \vec{r}' bzw. $d\vec{\ell}'$ wirkt. Unter Benutzung von

$$\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

erhält man schließlich das Gesetz von Biot-Savart für das Magnetfeld eines Stromes:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell} \frac{d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Eindeutige Vektorfelder

Das im letzten Abschnitt unter der Bedingung $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ hergeleitete Vektorfeld \vec{B} wurde erst mit der Randbedingung $\text{div } \vec{B} = 0$ eindeutig. Allgemein gilt der Satz:

Ein Vektorpotential ist in einem Gebiet eindeutig, wenn seine Divergenz und seine Rotation dort gegeben und wenn seine Normalkomponente auf dem Rand bekannt ist. (Statt der Normalkomponente kann ein anderer vollständiger Satz von Randbedingungen gegeben sein.)

Beweis: Angenommen, Divergenz, Rotation und Normalkomponente zweier Vektorfelder \vec{V}_1 und \vec{V}_2 seien

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \vec{V}_1 = \rho & \vec{\nabla} \vec{V}_2 = \rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \vec{B} & \vec{\nabla} \times \vec{V}_2 = \vec{B}, \\ V_{1n} = \vec{V}_1(\vec{r}_{max}) \cdot \vec{n}(\vec{r}_{max}) & V_{2n} = V_{1n}, \end{array}$$

dann gilt für das Vektorfeld $\vec{W} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \vec{W} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{W} = 0 \end{array}$$

und

$$W_n = 0.$$

Die Wirbelfreiheit erlaubt zu schreiben (Vorzeichen ist Konvention):

$$\vec{W} = -\vec{\nabla} \varphi$$

und die Quellenfreiheit ergibt:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \varphi) = \Delta \varphi = 0.$$

Der 1. Greensche Satz mit $\psi = \phi = \varphi$ liefert

$$-\oint_S \varphi \vec{W} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \left[(\vec{\nabla} \varphi)^2 + \varphi \Delta \varphi \right] dV.$$

Wegen $\vec{W} \cdot \vec{n} = W_n$ ergibt die linke Seite gleich Null und deshalb

$$0 = \oint_S \varphi W_n dS = \iiint_V (\vec{\nabla} \varphi)^2 dV = \iiint_V \vec{W}^2 dV.$$

Weil $\vec{W}^2 \geq 0$ ist, muß $\vec{W} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = 0$ sein, d. h. \vec{V}_1 ist eindeutig.

Helmholtzsches Theorem

Ist ein Vektorpotential \vec{V} gegeben durch Quellenstärke ρ und Wirbelstärke \vec{j} , die beide im Unendlichen verschwinden, so kann es in eine Summe aus einem Gradientenfeld $-\vec{\nabla}\varphi$ und einem reinen Wirbelfeld $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ zerlegt werden.

Beweis: Der Satz sagt aus, daß

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

wobei

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{V} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \vec{j} \\ \vec{\nabla}\vec{A} &= 0. \end{aligned} \quad \text{und}$$

Nach dem vorhergehenden Satz ist das Vektorpotential \vec{V} eindeutig bestimmt. Die Ausführung der letzten Gleichungen führen auf Poisson - Gleichungen, deren Lösungen, wie oben gezeigt, die Potentiale φ und \vec{A} und damit auch \vec{V} ergeben.

Kapitel 12

Schwingungen und Wellen

12.1 Definitionen

Das ein- oder mehrfache Anschwellen und Abklingen eines Meßwertes mit der Zeit nennt man eine **Schwingung**. Harmonische Schwingungen sind Lösungen der harmonischen Differentialgleichung und werden durch Kosinus-, Sinus- oder Exponentialfunktionen beschrieben (vgl. Abschnitt 9.3):

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (\text{Dämpfung } \lambda)$$

hat die allgemeine Lösung

$$y = e^{-\lambda t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})$$

oder

$$y = e^{-\lambda t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}),$$

mit den beiden Integrationskonstanten A und B oder C_1 und C_2 .

Eine **Welle** ist sowohl eine Funktion des Ortes als auch der Zeit. Man versteht als Welle eine Größe, die durch Funktionen der Art

$$f_1 = f_1(x + v t)$$

$$f_2 = f_2(x - v t)$$

dargestellt werden. Das Argument der Funktion heißt die **Phase**

$$\varphi_{\pm} = x \pm v t$$

Eine konstante Phase wandert für φ_+ mit zunehmender Zeit t in negative, für φ_- in positive x - Richtung.

Ein Punkt mit konstanter Phase, z. B. ein bestimmter Wellenberg, genügt der Gleichung

$$x \pm v t = \text{const.}$$

Differentiation nach der Zeit liefert

$$\dot{x} = \mp v;$$

d. h. ein Punkt konstanter Phase bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit v .

12.2 Harmonische Wellen

Harmonische Wellen werden durch Sinus-, Kosinus- oder Exponentialfunktionen beschrieben. Man erhält sie im 1 - dimensionalen Raum durch die

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}.$$

Mit dem Ansatz $\psi(x, t) = \mathcal{X}(x) \cdot \mathcal{T}(t)$ erhält man

$$\frac{\mathcal{X}''}{\mathcal{X}} = \frac{1}{v^2} \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}},$$

mit den Abkürzungen:

$$\mathcal{X}'' = \frac{d^2 \mathcal{X}}{d\mathcal{X}^2} \quad \mathcal{T}'' = \frac{d^2 \mathcal{T}}{d\mathcal{T}^2}.$$

Weil nun auf den beiden Seiten der Gleichung unabhängige Funktionen von den unterschiedlichen Parametern x und t stehen, läßt sich die Gleichung trennen, indem man beide Seiten einer Konstanten ($-k^2$) gleichsetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{X}''}{\mathcal{X}} &= -k^2 & \frac{1}{v^2} \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}} &= -k^2 \\ \mathcal{X}'' + k^2 \mathcal{X} &= 0 & \mathcal{T}'' + k^2 v^2 \mathcal{T} &= 0 \\ \mathcal{X}_{\pm} &= A_{\mathcal{X}_{\pm}} e^{\pm i k x} & \mathcal{T}_{\pm} &= A_{\mathcal{T}_{\pm}} e^{\pm i k v t}. \end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 e^{+i k (x+v t)} + A_2 e^{-i k (x+v t)} \\ \psi_2 &= A_3 e^{+i k (x-v t)} + A_4 e^{-i k (x-v t)} \\ (A_1 &= A_{\mathcal{X}_+} \cdot A_{\mathcal{T}_+}) \\ (A_2 &= A_{\mathcal{X}_-} \cdot A_{\mathcal{T}_-}) \\ (A_3 &= A_{\mathcal{X}_+} \cdot A_{\mathcal{T}_-}) \\ (A_4 &= A_{\mathcal{X}_-} \cdot A_{\mathcal{T}_+}) \end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung : $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Randbedingungen legen die Konstanten fest.

Die allgemeine Lösung zeigt, daß sich mehrere harmonische Wellen ungestört überlagern können.

Für reelles k sind die Wellen periodisch in x mit der Periodenlänge λ :

$$\psi(k x + k \lambda, t_0) = \psi(k x, t_0),$$

wenn $k \lambda = 2 \pi,$

also $k = \frac{2 \pi}{\lambda}$

Ebenso erhält man die Periodizität in t mit der Periode T :

$$\psi(x_0, k v t + k v T) = \psi(x_0, k v t),$$

wenn $k v T = 2 \pi.$

Mit $\nu = 1/T$ folgt $\lambda \nu = v$

und $k v = 2 \pi \nu \equiv \omega.$

Im 3 - dimensionalen Raum muß die 2 - fache Ortsableitung in der Wellengleichung durch den Laplace - Operator ersetzt werden. Sie lautet dann

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Im kartesischen Koordinatensystem kann sie separiert werden durch den Ansatz

$$\psi(x, y, z, t) = \mathcal{X}(x) \cdot \mathcal{Y}(y) \cdot \mathcal{Z}(z) \cdot \mathcal{T}(t).$$

Spezielle Lösungen sind die Ebenen Wellen und die Kugelwellen.

12.3 Spezielle Wellen

Ebene Wellen

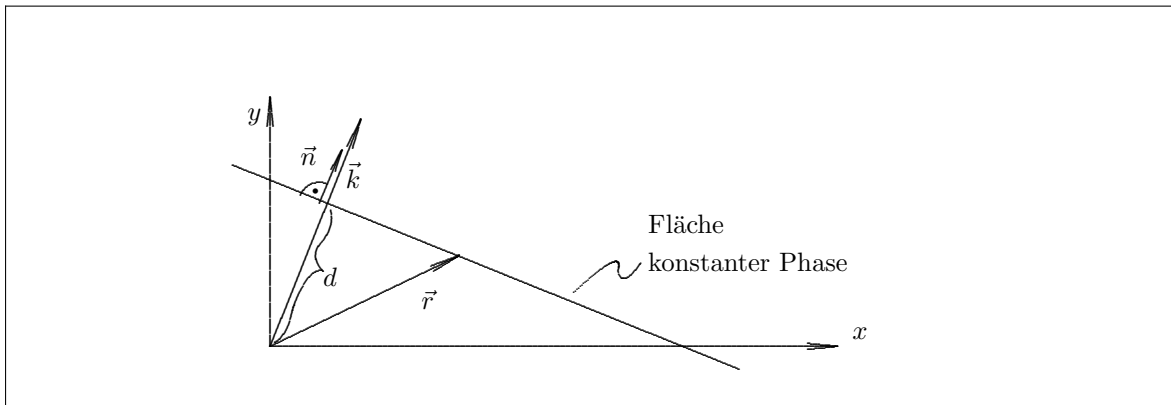
Ebene Wellen werden beschrieben durch

$$\psi = f(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t).$$

Mit $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$ und der Komponente von \vec{r} in Richtung \vec{n} , $d = \vec{r} \cdot \vec{n}$, erhält man

$$\psi = f(k d \pm \omega t),$$

d.h. eine Welle, die sich mit der Zeit in positive oder negative \vec{k} - Richtung ausbreitet.



Zu fester Zeit t genügen Punkte konstanter Phase der Gleichung

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$$

Im 3 - dimensionalen Raum ist dies die Gleichung einer Ebene senkrecht zu \vec{k} im Abstand $d = \vec{k} \cdot \vec{r} / k$ vom Ursprung. Eine ebene Welle, die sich in x - Richtung ausbreitet, wird durch

$$\psi = f(k x \pm \omega t),$$

beschrieben.

Kugelwellen

Die Wellengleichung

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

lautet in Kugelkoordinaten (vgl. Abschnitt 11.7)

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Bei Kugelsymmetrie hängt die Wellenfunktion nicht von den Winkeln ab. Die Ableitungen nach den Winkeln verschwinden und es verbleibt als Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Die Substitution

$$u(r, t) = r \cdot \psi(r, t)$$

führt auf die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

mit der Lösung

$$u = f(k r \pm \omega t).$$

Daraus folgt die Wellenfunktion

$$\psi = \frac{1}{r} f(k r \pm \omega t).$$

Die Punkte konstanter Phase zur festen Zeit t_0 bilden Kugeloberflächen, beschrieben durch

$$r = \frac{\text{const} \mp \omega t_0}{k}.$$

Die Amplitude nimmt bei fester Zeit mit $1/r$ ab.

Stehende Wellen

Überlagern sich zwei entgegengesetzt laufende Wellen ψ_+ und ψ_- gleicher Wellenlänge, Frequenz und Amplitude, so bilden sich stehende Wellen aus, z. B. :

$$\begin{aligned} \psi &= \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \\ &= 2 \sin kx \cos \omega t. \end{aligned}$$

Man sieht, daß das Resultat keine Welle mehr darstellt, sondern eine Schwingung. Für konstante Zeit ändert sich die Amplitude in diesem Beispiel mit dem Ort wie eine Sinusfunktion. Jeder Punkt schwingt harmonisch mit der Zeit. Die schwingende Seite ist ein typisches Beispiel für eine stehende Welle. Zu stehenden Wellen im 2 - oder 3 - dimensionalen Raum wird man z. B. über die Schwingungen eingespannter Platten oder die Schwingungen von Luft in Hohlräumen geführt.

Kapitel 13

Systeme orthogonaler Funktionen

13.1 Die Fourier - Reihe

Ist die Funktion $f(x)$ einer beliebigen Variablen x periodisch mit der Periode $2l$, d.h.

$$f(x + 2l) = f(x) ,$$

so läßt sich die Funktion unter recht weiten Bedingungen (s. u.) durch eine Fourier-Reihe interpolieren, d. h. als eine Überlagerung von Sinus- und Kosinus-Funktionen der Periode $2l/n$ ($n = 1, 2, \dots \infty$) darstellen:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n \pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n \pi x}{l}$$

mit

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \cos \frac{n \pi x}{l} dx \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Häufig vorkommende Spezialfälle sind $2l = 2\pi$ mit $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = -\pi$, falls x eine dimensionslose Variable (Winkel) ist.

Falls für x die Variable der Zeit t eingesetzt wird, dann bedeutet die Approximation der Schwingung $f(t)$ durch die Fourier-Reihe, daß eine Frequenzanalyse durchgeführt wird.

Im Frequenzanalysator wird $f(t)$ in harmonische Schwingungen zerlegt. Dabei ist $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ jeweils die Kreisfrequenz. Im Frequenzsynthesizer, umgekehrt, wird $f(t)$ aus harmonischen Schwingungen aufgebaut. A_n und B_n sind die Spektralkoeffizienten, die, über den Frequenzen ω_i aufgetragen, das diskrete Frequenzspektrum ergeben.

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Reihe:

- $A_0/2$ ist der Mittelwert von $f(x)$.
- Für eine gerade Funktion ($f(-x) = f(x)$) enthält die Reihe nur cos-Terme ($B_n = 0$).
- Für eine ungerade Funktion ($f(-x) = -f(x)$) enthält die Reihe nur sin-Terme ($A_n = 0$).

Herleitung der Fourier-Reihe

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $l = \pi$ und $\alpha = 0$ gewählt werden. Der Ansatz der Fourier-Reihe wird, wie oben beschrieben, angenommen. Es ist dann zu zeigen, daß sich die Koeffizienten wie angegeben berechnen.

Multiplikation der Reihe mit $\cos mx$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) und Integration über die Grundperiode führt zu

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx + \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos mx \cos nx + B_n \cos mx \sin nx \right] dx$$

Ist $f(x)$ integrierbar und die Reihe gleichmäßig konvergent (d. h. konvergiert sie im Intervall $0 < x < 2\pi$), so lassen sich Summation und Integration vertauschen:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx + B_n \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx \right]$$

Es gilt bei Benutzung des **Kronecker Symbols**

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \, dx = 2 \cdot \pi \cdot \delta_{m0} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned} 2 \sin mx \cos nx &= \sin(m-n)x + \sin(m+n)x \\ 2 \sin mx \sin nx &= \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \\ 2 \cos mx \cos nx &= \cos(m-n)x + \cos(m+n)x \end{aligned}$$

erhält man die Orthogonalitätsrelationen:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx \\ \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx \end{aligned} \right\} = \pi \cdot \delta_{nm}$$

Dies eingesetzt liefert die Formel für A_m . Analog erhält man die Formel für B_m durch Multiplikation mit $\sin mx$ und Integration über x .

13.2 Konvergenz der Fourier - Reihe

Kriterien (Dirichletsche Bedingungen)

Damit die Fourier-Reihe im Intervall der Länge $2l$, z. B. im Intervall $0 \leq x \leq 2l$, konvergiert, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Im Intervall $0 \leq x \leq 2l$ darf $f(x)$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen. Die Grenzwerte

$$f_{i+} = f(x_i + 0) \quad \text{und} \quad f_{i-} = f(x_i - 0)$$

müssen endlich sein.

(Die Funktionswerte $f(x_i)$ an den Unstetigkeitsstellen werden nicht beachtet.)

2. Das Intervall $0 \leq x \leq 2l$ soll so in endlich viele Teilintervalle zerlegbar sein, daß in jedem $f(x)$ monoton ist. Dies schließt unendlich schnelle Oszillationen aus.

Der Wert der Reihe im Intervall $0 \leq x \leq 2l$ wird dann

$$\begin{aligned} f(x) & \quad \text{in allen stetigen Bereichen von } f(x); \\ \frac{1}{2} (f(x_i + 0) + f(x_i - 0)) & \quad \text{in allen Unstetigkeitsstellen } x_i; \\ \frac{1}{2} (f(+0) + f(2l - 0)) & \quad \text{an den Intervallenden.} \end{aligned}$$

In jedem abgeschlossenen Teilintervall, in dem $f(x)$ stetig ist, konvergiert die Reihe gleichmäßig.

Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe

Das Konvergenzverhalten der Reihe hängt stark von der Art der Unstetigkeitsstellen ab. Besitzt die Funktion $f(x)$ stetige Ableitungen bis zur $(k-1)$ -ten Ordnung und genügt die k -te Ableitung den Dirichletschen Bedingungen, dann gelten für die Koeffizienten der Reihe die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} & \leq |A_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}} \quad \text{und} \\ B_n \sin \frac{n\pi x}{l} & \leq |B_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}}. \end{aligned}$$

Dabei ist M ein passend gewählter positiver Wert.

Damit erhält man eine Majorante zur Fourier-Reihe:

$$F.R. \equiv \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \leq \frac{M}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{k+1}}$$

Man sieht daraus, daß bei einer stetigen Funktion $f(x)$, die schon endlich viele Unstetigkeitsstellen in $f'(x)$ besitzen soll, die Abschätzung lautet (d. h. $k=1$):

$$F.R. \leq \frac{M}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$$

Folglich konvergiert die Fourier-Reihe selbst in diesem Fall schon absolut und gleichmäßig.

Bei unstetigen Funktionen läßt sich das Konvergenzverhalten verbessern, indem man eine einfache Treppenfunktion subtrahiert, die die gleichen Unstetigkeitsstellen wie $f(x)$ besitzt. Man entwickelt dann die Differenzfunktion.

13.3 Beispiele für Fourier-Zerlegungen

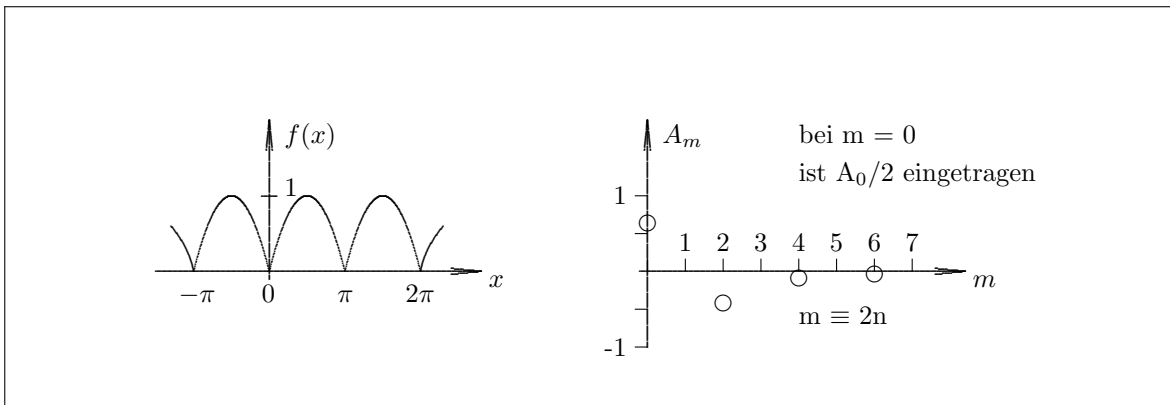
Beispiel 1: Zweiweggleichrichter erzeugen aus einem sinusförmigen Wechselstrom einen Strom, der sich im Idealfall darstellen läßt durch

$$f(x) = |\sin x|$$

Wegen $f(-x) = f(x)$ folgt $B_n = 0$. Die Periodizität ist $2l = \pi$.

Mit $l = \pi/2$ und $\alpha = 0$ und $f(x) = \sin x$ erhält man

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos 2nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(x+2nx) + \sin(x-2nx)] \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(x+2nx)}{1+2n} + \frac{\cos(x-2nx)}{1-2n} \right]_0^{\pi} \\ A_n &= -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n)^2 - 1} \end{aligned}$$



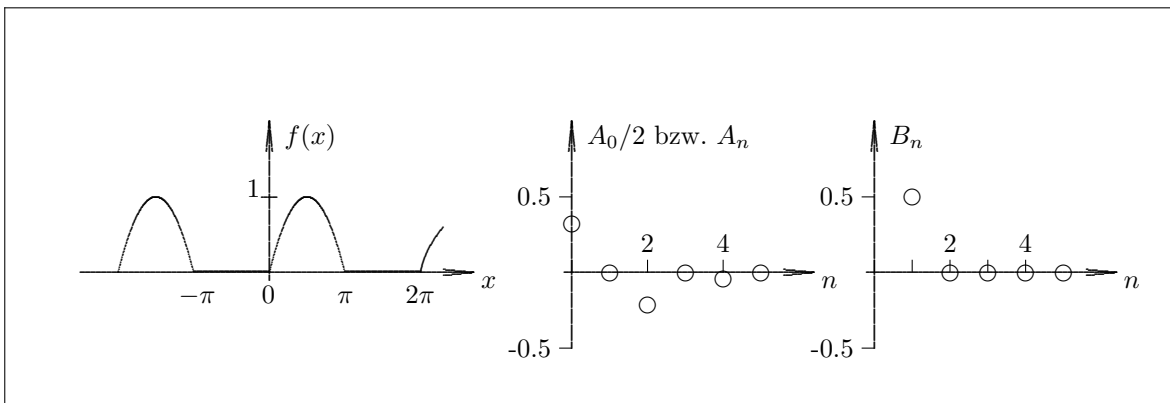
Damit wird

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} - \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} - \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} - \dots \right)$$

Beispiel 2: Einweggleichrichtung:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Es ist $l = \pi$. Wählt man $\alpha = -\pi$, dann folgt



$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\sin(x+nx) + \sin(x-nx)] dx \\
 \text{und wegen } \cos[(1 \pm n)\pi] &= (-1)^{n+1} \\
 A_n &= -\frac{1}{\pi} \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \quad \text{für } n \neq 1 \quad \text{und} \\
 A_1 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(x-nx) - \cos(x+nx)] dx
 \end{aligned}$$

dies liefert

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{2} \quad \text{und} \\
 B_n &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-n)\pi]}{1-n} - \frac{\sin[(1+n)\pi]}{1+n} \right] = 0 \quad \text{für } n \neq 1.
 \end{aligned}$$

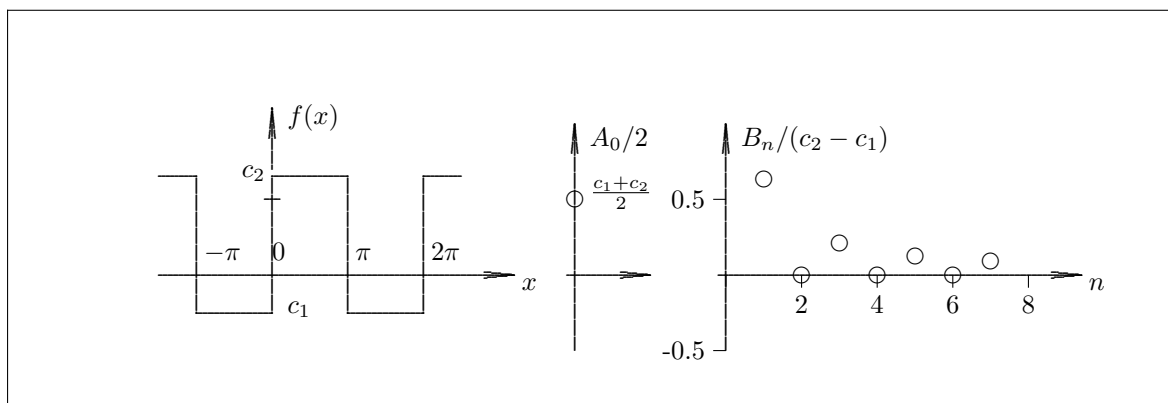
Damit wird

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \dots \right) \\
 f(x) &= \frac{1}{2} (\sin x + |\sin x|)
 \end{aligned}$$

Beispiel 3: Mäander-Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ c_2 & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Es ist $l = \pi$. Für $\alpha = -\pi$ folgt



$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 c_1 dx + \int_0^\pi c_2 dx \right] \\
 A_0 &= c_1 + c_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 c_1 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} c_2 \cos nx \, dx \right] \\
 &= \frac{c_1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{c_2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} \\
 A_n &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 c_1 \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} c_2 \sin nx \, dx \right] \\
 &= \frac{c_1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{c_2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi}
 \end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned}
 \cos n\pi &= (-1)^n \\
 B_n &= \frac{c_2 - c_1}{n\pi} [1 - (-1)^n]
 \end{aligned}$$

Damit wird

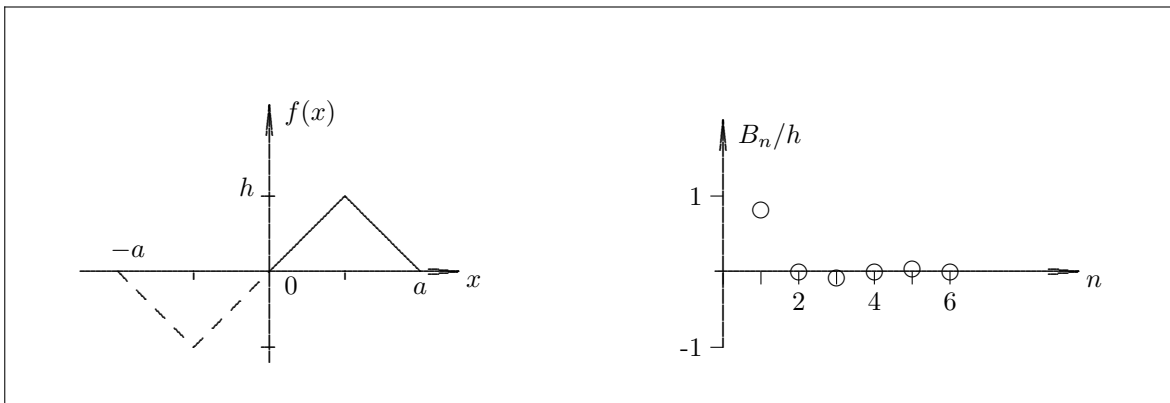
$$f(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right]$$

An den Unstetigkeitsstellen $-\pi, 0, \pi$, usw. nimmt die Reihe den Wert $(c_1 + c_2)/2$ an.

Beispiel 4: Die gezupfte Saite: Zur Zeit $t = 0$ sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{a}x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \frac{2h}{a}(a-x) & \text{für } \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

Die durch die physikalischen Bedingungen nur im Intervall $[0, a]$ definierte Funktion wird nun durch periodische Fortsetzung zu einer periodischen, mathematischen Funktion erweitert. Eine Möglichkeit, dies zu tun, ist die Fortsetzung als **ungerade** Funktion. Es ist $l = a$, und es sei $\alpha = -a$.



Aus Symmetriegründen ist

$$A_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$B_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\
&= \frac{4h}{a^2} \left[\int_0^{a/2} x \sin \frac{n\pi x}{a} dx + \int_{a/2}^a (a-x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \right] \\
\text{und wegen } \int x \sin bx dx &= -\frac{1}{b} x \cos bx + \frac{1}{b^2} \sin bx \\
B_n &= \frac{4h}{a^2} \left\{ \left[-\frac{a}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{a^2}{n^2 \pi^2} x \sin \frac{n\pi x}{a} \right]_0^{a/2} \right. \\
&\quad \left. + \left[-\frac{a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{a}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{a} - \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \right]_{a/2}^a \right\} \\
B_n &= \frac{8h}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

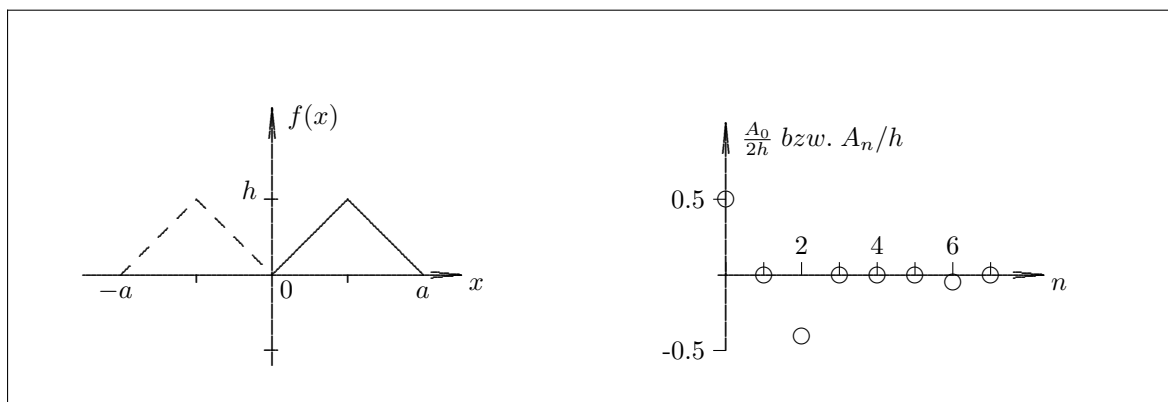
Damit wird

$$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{a} - \dots + \dots \right)$$

Die **gerade** Fortsetzung von $f(x)$ ist ebenfalls möglich. Sie führt zu

$$\begin{aligned}
B_n &= 0, \\
A_0 &= h, \\
A_n &= -\frac{16h}{n^2 \pi^2} \quad \text{für } n = 2, 6, 10, \dots \quad \text{und} \\
A_n &= 0 \quad \text{sonst.}
\end{aligned}$$

Man erhält die Fourier-Reihe



$$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{2\pi 3x}{a} + \dots \right).$$

Sie beschreibt die Funktion im Intervall $0 \leq x \leq a$ ebenfalls richtig. Sie spiegelt jedoch nicht den physikalischen Sachverhalt wieder. Die Schwingungen haben keine Knoten an den Befestigungsstellen 0 und a . Die Auslenkungen zu $f(x) < 0$ müssen separat durch $h < 0$ hergestellt werden.

13.4 Das Gibbsche Phänomen

Anhand der rechteckförmigen Mäanderfunktion wird untersucht, wie gut die Approximation durch die Fourierreihe ist, wenn sie nach dem Term mit der m -fachen Grundfrequenz abgebrochen wird. Die zu untersuchende Summe für den Spezialfall $c_1 = -1$, $c_2 = +1$ lautet

$$f_m(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^m \frac{\sin nx}{n}$$

oder mit $2\nu + 1 \equiv n$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{(m-1)/2} \frac{\sin [(2\nu + 1)x]}{2\nu + 1}.$$

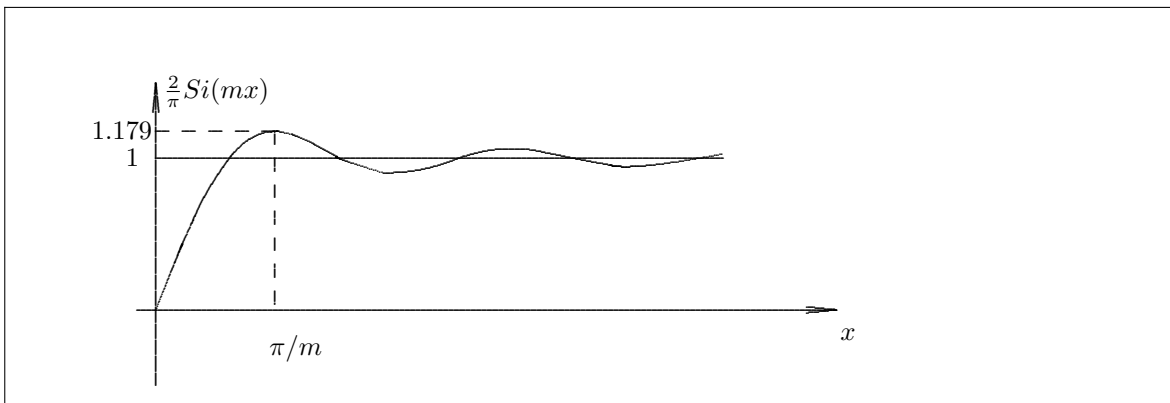
Mit der Substitution $\xi_\nu = (2\nu + 1)x$ und $\Delta\xi = \xi_\nu - \xi_{\nu-1} = 2x$ erhält man:

$$f_m(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{(m-1)/2} \frac{\sin \xi_\nu}{\xi_\nu} \Delta\xi$$

Für kleine x , in der Nähe der Sprungstelle bei $x = 0$, läßt sich die Summe in ein Integral überführen:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ mx \neq 0}} f_m(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{mx} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \equiv \frac{2}{\pi} Si(mx)$$

D. h. für kleine x kann die Funktion $f_m(x)$ durch den Integralsinus ersetzt werden. (s. z. B. Handbook of Mathematical Functions, editors M. Abramowitz and I. A. Stegun; National Bureau of Standards AMS 55 (1964) oder I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik; Verlag Harri Deutsch, Thun / Frankfurt M. (1985))



Besondere Werte sind:

$$\begin{aligned} Si(\pi) &= 1.852 \\ Si(\infty) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Die Näherung $f_m(x)$ schießt also bei $x = \pi/m$ um den Faktor $2 \cdot Si(\pi)/\pi = 1.179$ über die Rechteckfunktion hinaus.

13.5 Die Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise

Mit den Eulerschen Beziehungen

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \qquad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

wird die Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left(e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l} \right) + \frac{B_n}{2i} \left(e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l} \right).$$

Definiert man

$$\begin{aligned} A_{-n} &\equiv A_n \\ B_0 &\equiv 0 \\ B_{-n} &\equiv -B_n \qquad \text{und} \\ C_n &= \frac{A_n - iB_n}{2}, \end{aligned}$$

so kann die Summation bei $-\infty$ beginnen, und man erhält die Fourier-Reihe in kompakter Schreibweise ($\alpha = -l$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x/l} \\ C_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten C_n wurden symmetrische Integrationsgrenzen gewählt und die Orthogonalitätsrelationen

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{im\pi x/l} e^{-in\pi x/l} dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{i(m-n)\pi x/l} dx = \delta_{mn} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

benutzt, die man mit Hilfe der Eulerschen Beziehungen aus den früheren Relationen für die Winkelfunktionen erhält.

13.6 Die diskrete Fourier-Transformation

Die Fourier-Reihe aus Kapitel 13.5 kann benutzt werden, um diskrete Funktionswerte zu interpolieren.

Sei die Funktion $f(x)$ an m Stellen ($m = 0, 1, \dots, m-1$) mit $x_0 = 0$ gegeben und definiert man die Länge des Periodizitätsintervalls $L = 2l = x_m - x_0$ (d.h. $f(x_m) = f(x_0)$) so erhält man für die komplexen Koeffizienten

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-in\pi x/l} dx \\ &\approx \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j) e^{-in2\pi x_j/L} \Delta x \qquad \text{mit } x_j = j \cdot L/m \text{ und } \Delta x = L/m \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j) e^{-in2\pi j/m} \end{aligned}$$

Die C_n liefern wieder das Häufigkeitsspektrum der für die Approximation nötigen Wellenzahlen. Diese sind Vielfache von $2\pi/L$.

In der Literatur findet man auch eine Definitionen, die anstelle von $1/m$, aus Symmetriegründen jeweils einen Faktor $1/\sqrt{m}$ bei der Gleichung für $f(x)$ und für C_n verwendet.

Für 2^M Datenpunkte erhält man besonders schnelle Algorithmen (Schnelle Fourier-Transformationen; FFT). Sie liefern $1+2^{M-1}$ komplexe Koeffizienten. Reelle Funktionen liefern reelle Koeffizienten. Die FFT-Algorithmen liefern dann häufig komplexe Koeffizienten der halben Anzahl. Die 2. Hälfte ist konjugiert komplex. Die entgeltigen Koeffizienten können daraus ermittelt werden.

13.7 Das Fourier-Integral

Eine nicht-periodische Funktion kann aufgefaßt werden als eine Funktion, deren Periodizitätsintervall von $-\infty$ bis ∞ reicht. Genügt die Funktion $f(x)$ den Dirichletschen Bedingungen in jedem Teilintervall und ist sie absolut integrierbar, d. h. existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

so läßt sie sich folgendermaßen in ein Fourier-Integral entwickeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \\ g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

Die Beziehung ist symmetrisch:

$f(x)$ nennt man die Fourier-Transformierte von $g(k)$ und ebenso ist $g(k)$ die (inverse) Fourier-Transformierte von $f(x)$.

Ist x die Ortskoordinate, so ist k die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$. Wird anstelle von x die Zeitvariable t benutzt, dann gehört dazu die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$.

Herleitung der Integralformel

Man geht von der symmetrischen Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise aus.

Definiert man $k_n \equiv n\pi/l$ und $\Delta k \equiv k_n - k_{n-1} = \pi/l$ und setzt den Ausdruck für die Koeffizienten in die Reihe ein, so erhält man die Identität

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} e^{ik_n x} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-ik_n \xi} d\xi$$

Beim Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ gehen $\Delta k \rightarrow dk$ und $k_n \rightarrow k$, und die Reihe geht in ein Integral über:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left\{ \int_{-l}^l f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right\} dk$$

Das Innere Integral existiert nach Voraussetzung. Setzt man es gleich $\sqrt{2\pi} \cdot g(k)$, so erhält man die Integralformeln.

Nimmt man die gleiche Substitution bei den **Orthogonalitäts-Relationen** vor, so wird:

$$\frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-l}^l e^{ik_m x} e^{-ik_n x} dx = \delta_{mn}$$

und für jedes m bleibt bei Summation über n ein Term übrig:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-l}^l e^{i(k_m - k_n)x} dx = 1$$

Im Grenzübergang $l \rightarrow \infty$, ($k_m \rightarrow k'$, $k_n \rightarrow k$) erhält man die wichtige Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k'-k)x} dx dk = 1.$$

Benutzt man die folgende Definition der sogenannten Diracschen δ -Funktion:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k'-k)x} dx \equiv \delta(k' - k),$$

so lautet dies in Kurzform

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k' - k) dk = 1.$$

Allgemein gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k) \delta(k' - k) dk = g(k').$$

13.7.1 Das Fourier-Integral im 3-dimensionalen Raum

Die Erweiterung der Transformationsformeln für den 3-dimensionalen Raum lauten

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k \\ g(\vec{k}) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3r \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $g(\vec{k})$ in das 1. Integral kann man die Identität zeigen.

13.7.2 Das Fourier-Integral bei Kugelsymmetrie

Ist die Funktion $f(\vec{r})$ kugelsymmetrisch

$$f(\vec{r}) = f(r)$$

so vereinfacht sich die Formel für die Fourierkoeffizienten zu

$$\begin{aligned} g(\vec{k}) &= (2\pi)^{-3/2} \int f(r) e^{-ikr \cdot \cos\vartheta} d\varphi d\cos\vartheta r^2 dr && \text{mit } \cos\vartheta = \cos(\vec{k}, \vec{r}) \\ g(k) &= \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \left[i \int_0^{\infty} r f(r) e^{-ikr} dr + \text{conj. complex} \right] \end{aligned}$$

oder auch

$$g(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} r^2 f(r) \frac{\sin(kr)}{kr} dr$$

Die Formel für $f(r)$ lautet entsprechend

$$f(r) = \frac{1}{r\sqrt{2\pi}} \left[-i \int_0^{\infty} k g(k) e^{ikr} dk + \text{conj. complex} \right]$$

13.7.3 Die diskrete Fourier-Transformation bei Kugelsymmetrie

Ist die Funktion wie in Kapitel 13.6 an m Stellen gegeben, so erhält man analog die Approximation für die Koeffizienten. Bei symmetrischer Schreibweise ergibt sich

$$g(k) \approx \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \left[i \sum_{j=0}^{m-1} r_j f(r_j) e^{-ikr_j} \Delta r + \text{conj. compl.} \right]$$

mit $k = n \cdot k_{\min}$, $k_{\min} = 2\pi/L$, $r_j = jL/m$ und $\Delta r = L/m$ folgt

$$\begin{aligned} C_n &\approx \frac{L^2}{n\sqrt{m}} (2\pi)^{-3/2} \cdot \left[\frac{i}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} r_j f(r_j) e^{-in2\pi j/m} + \text{conj. compl.} \right] \\ &= -\frac{L^2}{n\sqrt{m}} (2\pi)^{-3/2} \cdot 2 \cdot \text{Im}\{\text{FFT}(r_j f(r_j))\} \end{aligned}$$

13.8 Beispiele für Fourier-Zerlegungen von Impulsen

Beispiel 1: Man bestimme die Zerlegung eines Rechteck-Impulses der Form

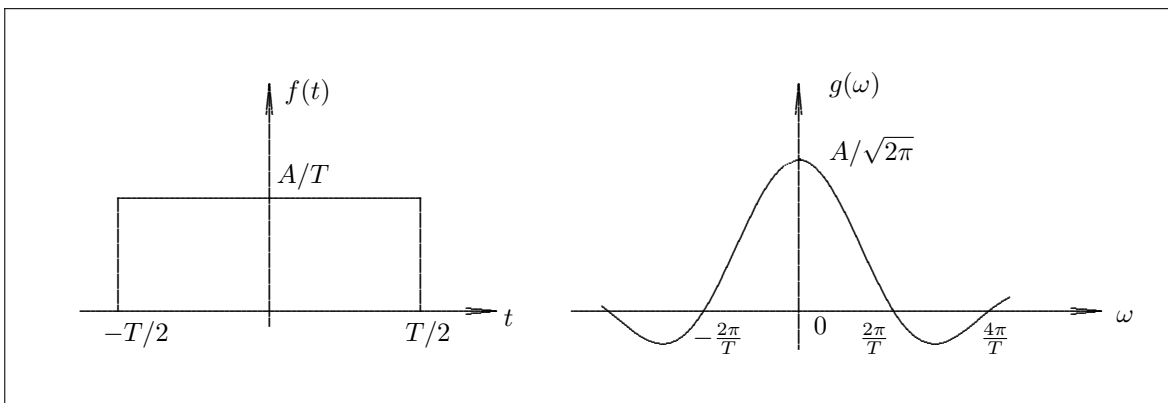
$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{T} & \text{für } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Die Fourier-Zerlegung lautet dann

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

mit der Spektralfunktion

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt && \text{und wegen } f(-t) = f(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t dt \\ g(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \end{aligned}$$



Diskussion:

- i) Wenn $T \rightarrow 0$, so erhält man einen schmalen Impuls mit scharfer Zeitdefinition. Die ersten Nulldurchgänge von $g(\omega)$ bei $\omega_0 = \pm 2\pi/T$ wandern ins Unendliche. D. h., es ist ein unendlich weites Frequenzspektrum nötig, um den scharfen Impuls aufzubauen.
- ii) $T \rightarrow \infty$ erzeugt ein enges, monochromatisches Frequenzspektrum um den Wert Null. Dies erwartet man auch anschaulich, da zu einer unendlich großen Wellenlänge eine unendlich kleine Frequenz gehört.

Beispiel 2: Ein Impuls sei gegeben durch

$$f(t) = e^{-|\alpha t|}$$

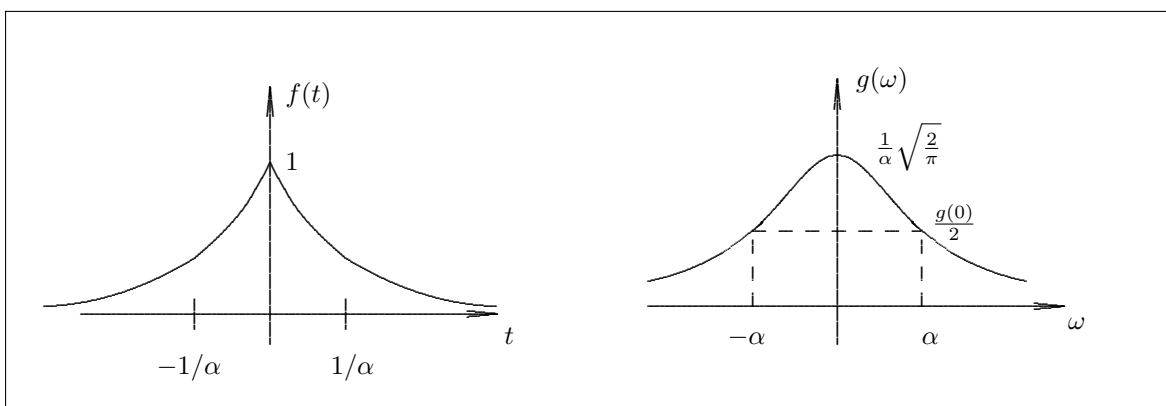
Wegen

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos \omega t \, dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

ergibt die Rechnung

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

eine sogenannte Lorentz-Kurve. Die halbe Höhe $g(0)/2$ liegt bei $\omega = \pm\alpha$.



Beispiel 3: Ein gaußförmiger Impuls mit der halben Breite σ am Wendepunkt

$$f(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

liefert mit Hilfe von

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} \cos \omega t \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\omega^2/(4a^2)}$$

auch ein gaußförmiges Frequenzspektrum:

$$g(\omega) = \sigma e^{-\sigma^2 \omega^2/2}.$$

