1. Elektromagnetismus als Eichtheorie

Lit.: Aitchison & Hey, Vol. I, Kap. 3.2

Vor Maxwell:

① $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$

② $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

③ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} \quad \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \nabla \cdot \vec{j}$

Lokale Erhaltung der el. Ladung:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Maxwell's Erweiterung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow$

④ $\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

→ Ladungserhaltung (≙ Kontinuitätsgleichung) bestimmt Form der Feldgleichungen, auch für freie Felder!

Nebengedanke:

Erhaltene Größen können bestimmt werden

- durch Bilanzierung: $A + B \to C + D + X$
  $\Rightarrow Q(X) = Q(A) + Q(B) - Q(C) - Q(D)$
- durch Messung, z.B. Lorentzkraft, also Interaktion mit einem Feld

In Teilchenphysik gibt es Erhaltungsgrößen, die <u>nur</u> durch Bilanzierung bestimmt werden, z.B. Baryonzahl, Leptonzahl.

Sind diese Größen <u>wirklich</u> streng erhalten?

Aitchison & Hey Vol I Kap 3.3

Potentiale:

① $\nabla\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

④ $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$= 0 - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A}$

Einführung der Potentiale erfüllt Gl. ① u. ④ automatisch!

Eichfreiheit: Potentiale sind nicht ~~best~~ eindeutig

$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi(\vec{x},t)$ läßt $\vec{B}$ unverändert

erfordert

$V \to V' = V - \frac{\partial\chi}{\partial t}$ für gleiches $\vec{E}$

4-Vektor $A^\mu = (V, \vec{A})$:

⑤ $A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi$ $\qquad \partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

$j^\mu = (\rho, \vec{j})$

Kontinuitätsgleichung:

$\partial_\mu j^\mu = 0$ (Summenkonvention, $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$)

Maxwell-Gl. ② u. ③:

⑥ $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Eichtransformation ⑤ läßt $F^{\mu\nu}$ invariant

⑥ mit Potentialen:

$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$ $\qquad \Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Eichfreiheit ungedeckt:

Globale Symmetrie

$$V \to V' = V + \text{const.} \Rightarrow \vec{E} \text{ unverändert}$$

warum nicht lokale Symmetrie

$$V \to V' = V + c(\vec{x}, \vec{t}) ?$$

schreibe

$$V \to V' = V + \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{x}, t) \qquad c = \frac{\partial}{\partial t} \chi$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \to E' = \vec{E} - \nabla \frac{\partial}{\partial t} \chi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\nabla \chi + \vec{A})}_{\vec{A}'\,!}$$

Check:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \to \vec{B}' = \vec{B} + \nabla \times \nabla \chi = \vec{B} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Magnetismus „ermöglicht" lokale Eichinvarianz des el.-st. Potentials!

Eichfreiheit in der QM
Lit.: Aitchison & Hey, Vol. I, Kap. 3.5
Schrödinger~~-~~Gl. für freies Teilchen:

$$① \quad \frac{1}{2m}(-i\nabla)^2\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Globale Symmetrie: $\psi' = \psi \cdot e^{i\alpha}$

erfüllt ①.

Lokale Symmetrie: $\alpha = \alpha(\vec{x},t)$

$$-i\nabla\psi' = -i\nabla(e^{i\alpha}\psi) = (\nabla\alpha)e^{i\alpha}\psi - ie^{i\alpha}\nabla\psi$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi' = \left(-\frac{\partial}{\partial t}\alpha\right)e^{i\alpha}\psi + ie^{i\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Ansatz:
~~Neue Felder~~ Potentiale $\vec{A}$, V

Impulsoperator $\vec{p} = -i\nabla - q\vec{A}$

Energieoperator $E = i\frac{\partial}{\partial t} + qV$

Forderung: $\vec{A} \to \vec{A}' + \nabla\chi$ $\quad e\chi = \alpha$

$V \to V' - \frac{\partial}{\partial t}\chi$

beschreibt gleiche Physik

Neue Gl.:

$$\left(\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\vec{A})^2 + qV\right)\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

kovariant unter

$$\psi \to \psi' = e^{iq\chi}\cdot\psi$$

$$A \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$$

$$V \to V' = V - \frac{\partial}{\partial t}\chi$$

⇒ Forderung nach lokaler Eichsymmetrie von ψ wird erfüllbar durch Einführung der el.-mag. WW!

Detour:

Früher:

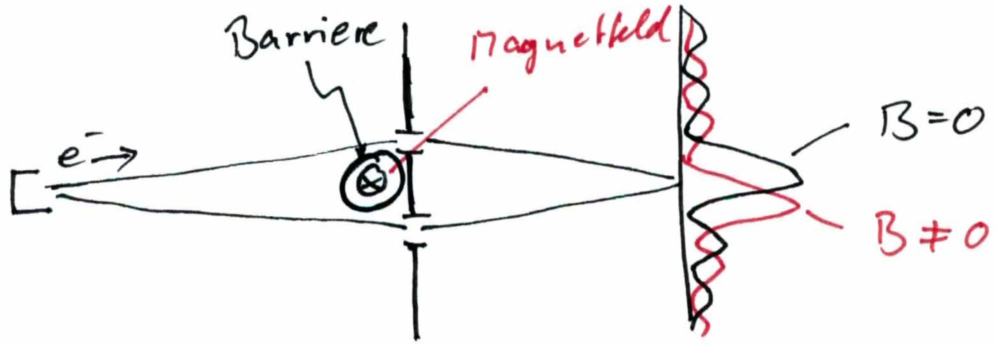
Eichfreiheit ist „Manko":

$\vec{E}, \vec{B}$ sind meßbar, $V, \vec{A}$ sind „Hilfsgrößen"

$$\vec{A} = \nabla f(\vec{x}) \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$$

Führt solch ein $\vec{A}$ zu beobachtbarem Effekt?

Aharonov-Bohm-Effekt:



Doppelschlitz-Experiment

Elektronen bewegen sich im feldfreien Raum $\vec{B} = 0$

Einschalten des Magnetfeldes verschiebt Interferenzmuster!

→ Elektronen werden durch $\vec{A}$ beeinflußt

→ $\vec{A}$ hat „physikalische Realität"

Heute:

Eichfreiheit = Eichsymmetrie wichtiges Leitprinzip zur Formulierung von Quantenfeldtheorien