Till Bargheer 25.1.2021

Erhaltungsgrößen, Symmetrien, Integrabilität

Hamilton-Mechanik: $\boxed{H: M \to \mathbb{R}}$ Hamiltonfunktion

M: Phasenraum, Dimension $2n$, Koordinaten $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$

Jede Trajektorie (Lösung) ist $\{q_i(t), p_i(t)\}$, die Hamilton-Gleichungen $\boxed{\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$ erfüllen.

Für gegebene $q_i(t=0)$, $p_i(t=0)$ ist die Lösung eindeutig.

Poisson-Klammern: $\{F, G\} := \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}$

$$\Rightarrow \{H, q_j\} \left(= -\frac{\partial H}{\partial p_j}\right) = -\dot q_j, \quad \{H, p_j\} \left(= \frac{\partial H}{\partial q_j}\right) = -\dot p_j$$

(Hamilton-Gleichungen)

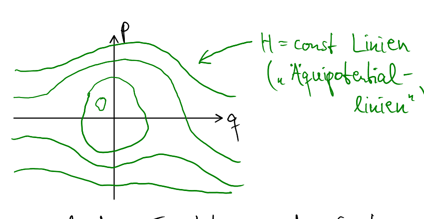
$\Rightarrow$ Zeitentwicklung für eine allgemeine Funktion $F(q_i, p_i)$ entlang von Trajektorien:

$$\dot F = \sum_i \dot q_i \frac{\partial F}{\partial q_i} + \dot p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i} = -\{H, F\}$$

Insbesondere: $\dot H = -\{H, H\} = 0$

$\rightarrow H = \text{const}$ entlang von Trajektorien $(H = E)$

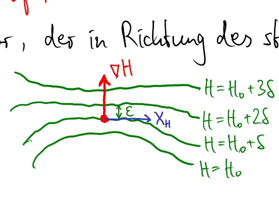
Geometrisches Bild:



$\Rightarrow$ Die Äquipotentiallinien sind die Trajektorien des Systems. (zumindest im 1d-Fall wie im Bild. Wenn $\dim(M) = 2n > 2$, dann liegen die Trajektorien auf den Äquipotential-Hyperräumen (mit codimension 1) von H).

Gradient: $\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$

Der Gradient ist ein Vektor, der in Richtung des stärksten Anstiegs von H zeigt:



Betrag $|\nabla H|$ (Länge) = Steigung von H: $|\nabla H| \sim \frac{1}{\varepsilon}$

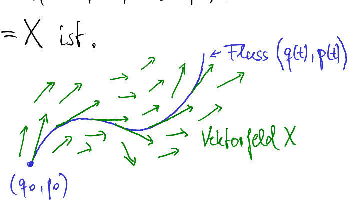
Betrachte das Hamilton-Vektorfeld $X_H := \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$.

X_H ist ∇H um 90° nach rechts gedreht.

X_H liegt also überall tangential zu den Äquipotentiallinien. (Denn ∇H liegt immer senkrecht zu den Äquipotentiallinien)

Begriff des Flusses: X_H ist ein Vektorfeld in M.

Für ein Vektorfeld X in M, definiere den „Fluss entlang X" (eigentlich „Integralfluss") wie folgt:
Beginnend mit einem Punkt (q_0, p_0) ist der Fluss entlang X ein Pfad $(q(t), p(t))$ in M mit $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$, dessen Geschwindigkeitsvektor $(\dot q, \dot p) = X$ ist.



$\Rightarrow$ Jedes Vektorfeld generiert über seinen Fluss eine Einparameterfamilie von Transformationen auf M (mit Parameter t).

Zurück zu $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$: X_H ist ∇H um 90° gedreht (nach rechts), liegt darum tangential zu den Äquipotentiallinien = Trajektorien $\Rightarrow$ Die Flusslinien von X_H sind die Trajektorien des Systems.

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) = (\dot q, \dot p) \quad \Leftrightarrow \text{Hamiltongleichungen.}$$

Def. von X_H — Definition der Flusslinie $(q(t), p(t))$.

Bedeutung der Poissonklammer:

Für eine Funktion f auf M:

$$\dot f = \dot q \frac{\partial f}{\partial q} + \dot p \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} \quad \begin{cases} = -\{H, f\} \\ = X_H \cdot \nabla f \end{cases}$$

Definiere Wirkung von X_H auf f:
$X_H(f) := X_H \cdot \nabla f$. Dann ist $X_H(f) = -\{H, f\} = \dot f$.

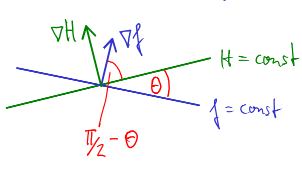
$\Rightarrow$ $X_H(f)$ ist die Richtungsableitung von f entlang der Trajektorien des Systems (also entlang der Äquipot. linien von H).

Mathematisch sind H und f gleichwertig.
Und weil $\{H, f\} = -\{f, H\}$, ist

$$X_H(f) = -\{H, f\} = \{f, H\} = -X_f(H)$$

$\Rightarrow$ Änderung von f entlang X_H = Änderung von H entlang X_f.

Warum ist das so?



$$X_H(f) = X_H \cdot \nabla f = |\nabla H||\nabla f| \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$X_f(H) = X_f \cdot \nabla H = |\nabla H||\nabla f| \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \theta\right)$$
$$\Rightarrow X_H(f) = -X_f(H).$$

$X_H(f) = -X_f(H) = 0 \Leftrightarrow \{f, h\} = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$

$\Leftrightarrow$ $H = \text{const}$ und $f = \text{const}$ liegen aufeinander, schneiden sich also nicht nur in einem Punkt.

Erhaltungsgrößen

Sei $Q: M \to \mathbb{R}$. Q generiert also (via X_Q) eine Einparameterfamilie von Transformationen auf M.

- Q ist eine Symmetrie, falls $X_Q(H) = 0$, wenn also die Energie durch die Transformation Q nicht geändert wird.
- Andererseits ist Q eine Erhaltungsgröße, falls $X_H(Q) = 0$, wenn also Q unter Zeitentwickelung (Fluss entlang X_H) konstant ist.
- Oben haben wir gesehen, dass $X_H(Q) = -X_Q(H)$, also sind beide Eigenschaften äquivalent!

$\boxed{\text{Symmetrie} \cong \text{Erhaltungsgröße} \quad \to \text{Noether-Theorem!}}$

Mehr als 1 Freiheitsgrad

$\dim(M) = 2n$, $H = \text{const}$ Flächen haben codimension 1, also $\dim(\{m \in M \mid H(m) = c\}) = 2n - 1$.

∇H ist weiterhin $\perp$ zu $H = \text{const}$ Flächen, aber was definiert X_H? $\to$ Symplektische Form.

$$X_H(f) = -\{H, f\} = -\left(\sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) \stackrel{!}{=} X_H \cdot \nabla f$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n}\right)$$

$$\Rightarrow X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla H$$

Konventionelle Ordnung der Variablen: $q_1, p_1, q_2, p_2, \dots$

$$\Rightarrow X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Symplektische Form}} \cdot \nabla H$$

$\Rightarrow$ definiert X_H eindeutig (Integrallinien liegen innerhalb von $H = \text{const}$ Unterräumen)

Integrabilität

- $Q_1, \dots, Q_n$ Erhaltungsgrößen, d.h. $\{H, Q_i\} = 0$ (H selbst ist eine der Q_i)
- $\{Q_i, Q_j\} = 0$ für alle i, j

$\Rightarrow$ Jedes Q_i definiert einen Fluss X_{Q_i}
X_{Q_i} ist eine kontinuierliche Transformation des Phasenraums, die H erhält $\Rightarrow$ X_{Q_i} ist eine Symmetrie

$\Rightarrow$ $Q_i = c_i = \text{const}$ ist (für fixes i) ein kodimension-1 Unterraum

$\underbrace{M_c := M|_{Q_i = c_i,\, i = 1, \dots, n}}_{\equiv \text{„Level set"}}$ hat Dimension n (Schnittmenge von n kodim-1 Räumen $\Rightarrow$ kodim-n)

$\to$ The phase space is foliated by the level sets

- Wegen $X_{Q_i}(Q_j) = -\{Q_i, Q_j\} = 0$ sind alle Flusslinien aller X_{Q_i} in einem Level set M_c enthalten (da $X_{Q_i}(Q_j) = 0$, bleiben alle Q_j entlang von X_{Q_i} konstant).

$\Rightarrow$ Die Flusslinien zu allen X_{Q_i} bilden (lokal!) ein vollständiges System von Koordinatenlinien für M_c.

Natürliche Koordinaten entlang dieser Koordinatenlinien sind T_i mit $\{Q_i, T_j\} = -\delta_{ij}$

$\to$
- T_i ist konstant entlang aller X_{Q_j}, $j \neq i$
- Richtungsableitung von T_i entlang X_{Q_i}: $X_{Q_i}(T_i) = -\{Q_i, T_i\} = 1$.
- Q_i, T_i bilden kanonische Variablen

- For the motion (Trajectories), we have:

$$\dot Q_i = -\{H, Q_i\} = 0$$
$$\dot T_i = -\{H, T_i\} = -\sum_j \frac{\partial H}{\partial Q_j} \underbrace{\{Q_j, T_i\}}_{= -\delta_{ji}} = \frac{\partial H}{\partial Q_i} \stackrel{\downarrow}{=} \text{const}$$

H is a fcn of Q_i only

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} Q_i &= c_i = \text{const} \\ T_i &= T_i^0 + t \left.\frac{\partial H}{\partial Q_i}\right|_{Q_j = c_j} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Satz von c_i und T_i^0 spezifiziert Trajektorie eindeutig

Integrability is a global property

- One can always locally (!) define Q_i, T_i such that H is only a fcn. of F_i, $\{Q_i, Q_j\} = \{T_i, T_j\} = 0$, $\{T_i, Q_j\} = \delta_{ij}$.
  $\to$ Integrability is trivial? No!
- For integrability, the Q_i must be global diffeomorphisms on phase space

Liouville-Torus, Wirkungs-Winkel-Variablen

- Wenn M_c kompakt ist, ist M_c diffeomorph zum n-dim. Torus: $M_c = T^n$ („Liouville-Torus")
  [Math. Theorem: Kompakte n-dim. Mannigfaltigkeit mit n kommutierenden Vektorfeldern $\cong T^n$]
- In jedem Fall führt jede invertierbare Transformation der Q_i auf neue, äquivalente Q_i.
  Im Fall kompakter M_c gibt es einen ausgezeichneten Satz

$$Q_i \to I_i: \quad I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \sum_k p_k \, dq_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \sum_k Q_k \, dT_k$$

Hierbei sind C_j die n Zyklen von T^n.
I_j sind die Wirkungsvariablen (konstant auf M_c, also Erhaltungsgrößen)

Konstruktion der dazu konjugierten Winkelvariablen θ_i:
Generierende Funktion für kanonische Transformation:

$$S(q_i, I_i) = \int_{q_0}^{q} \sum_k P_k(q', I) \, dq'_k \qquad (p_k = P_k(q, I))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial I_i} =: \theta_i$$

$$\Rightarrow \oint_{C_k} d\theta_i = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint_{C_k} S = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint_{C_k} \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial I_i}(2\pi I_k) = 2\pi\delta_{ik}$$

$I_j = \text{const}$ along C_k

$\to$ Quantisierung: Wirkungsvariablen quantisiert in $\hbar$.

Beispiel: Drehimpuls

$J_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ in 3d $\Rightarrow M = \mathbb{R}^6$

$\nabla J_3 = (p_2, -q_2, -p_1, q_1, 0, 0)$

$\Rightarrow X_{J_3} = (-q_2, -p_2, q_1, p_1, 0, 0)$

This vector field generates rotations around the z-axis:

$$\dot q_1 = -q_2 \qquad \dot q_2 = q_1 \qquad \dot q_3 = 0$$
$$\dot p_1 = -p_2 \qquad \dot p_2 = p_1 \qquad \dot p_3 = 0$$