PÜ 1: Linearer harmonischer Oszillator

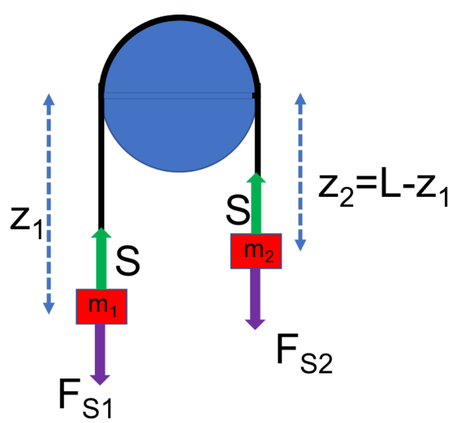
Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich in einer Dimension unter einer Kraft $F_{HO} = -\kappa x$. Bei $t = 0$ ist $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Wir wollen hier $x(t)$ für $t > 0$ bestimmen.

- Schreibe zuerst die Newton'sche Bewegungsgleichung.
- Suche nach Lösungen der Form $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$. Bestimme Ω.
- Die allgemeine Lösung ist dann der Form $A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. Bestimme A und B, und damit die gesuchte $x(t)$, aus der Anfangsbedingungen. Es sollte klar sein, dass die Bewegung periodisch ist. Man hat hier periodische Schwingungen (harmonischer Oszillator).

PÜ 2: Atwoodsche Fallmaschine

Über einen Faden der konstanten Länge L seien 2 Massen m_1 und m_2 miteinander verbunden. Das Schwerefeld der Erde wirke in z-Richtung. Bedenke, dass zur Anwendung des 2. Newtonschen Gesetzes die Fadenspannung S als zusätzliche Kraft zu berüucksichtigen ist. Sie hält die Länge L konstant (Abbildung).

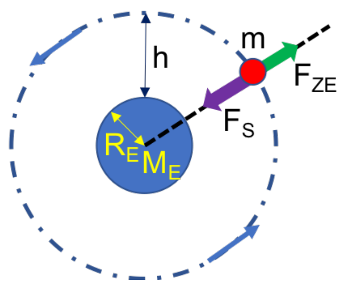
- Wie lauten die Bewegungsgleichungen für m_1 and m_2?
- Berechne die Beschleunigungen z_1 und z_2.
- Da $z_2 = L - z_1$, wie groß ist die Fadenspannung S?
- Bestimme $z_1(t)$.



PÜ 3: Satellite / Zentrifugalkraft

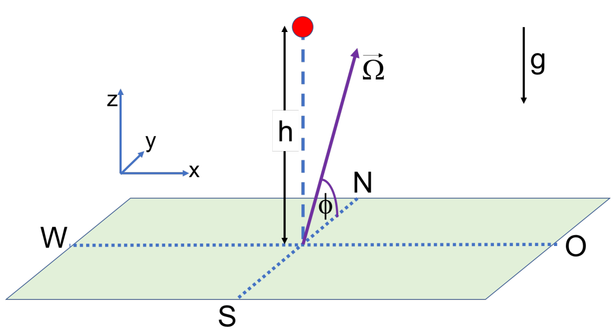
Eine Satellite kreist um die Erde auf einer Hohe $h = 200$km über die Erdoberfläche. Wir wollen die Periode der Satellite um die Erde, $T = 2\pi/\Omega$, bestimmen, wobei Ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Die Masse der Erde ist $M_E = 5.98 \times 10^{24}$kg, der Radius der Erde ist $R_E = 6.38 \times 10^6$m,

- Bestimme die Zentrifugalkraft $\vec{F}_{ZE}$ und die Schwerkraft $\vec{F}_S = \frac{GM_E m}{R^2}$, für eine Satellitenbahn mit Radius R. ($G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$).
- Suche nach der Winkelgeschwindigkeit Ω, solch dass $\vec{F}_{ZE} + \vec{F}_S = 0$.
- Für die konkrete o.g. Werten, solltest Du $T = 88.5$ Minuten erhalten.



PÜ 4: Coriolis-Kraft

Auf einer geographische Breite N40° lässt man ein Objekt aus einer Hohe von $h = 1000$m runterfallen (Abbildung). Wegen der Erdrotation (natürlich mit Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{2\pi}{60\times60\times24}\ \mathrm{s}^{-1}$, also eine komplette Drehung pro Tag), spürt das Objekt die Coriolis-Kraft, und das Objekt fällt nicht direkt unter uns. Wir wollen bestimmen, wo das Objekt gegen den Boden stoßt.



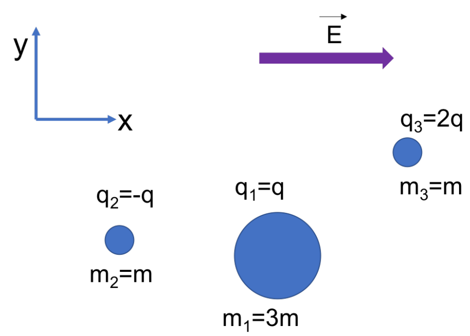
- Schreib die Kraft, die das Objekt spürt im (nicht-inertialen) Bezugssystem der Erde. Du darfst rühig die Zentrifugalkraft vernachlässigen. Die Zentrifugalkraft skaliert mit Ω^2 und die Corioliskraft skaliert mit Ω, und Ω ist sehr klein.
- Schreib die Newton'sche Bewegungsgleichungen. Sie müssen der Form $a_j = F_j(v_x, v_y, v_z)$ sein, wobei $a_{j=x,y,z}$ die Beschleunigungen in Richtungen x, y, z sind. F_j sind Funktionen der Geschwindigkeiten.

- Man darf annehmen, dass die Erdbeschleunigung $g >> 2\Omega|v_x|\cos\phi$. Du kannst dann ganz einfach $v_z(t)$ und $z(t)$ bestimmen. Bestimmt die Zeit t_s, an der das Objekt die Erde trifft.
- Du kennst nun $v_z(t)$. Dann kannst Du die Bewegungsgleichung für $a_x(t)$ schreiben. Hier kannst Du $v_y \simeq 0$, weil die y-Beschleunigung vernachlässigbar ist.
- Mit der Gleichung für $a_x(t)$ kannst Du $v_x(t)$ und letztendlich $x(t)$ bestimmen.
- Nun kannst Du x zur Zeit t_s bestimmen. Du solltest $x(t_s) \simeq \frac{2h\Omega}{3}\cos\phi\sqrt{\frac{2h}{g}}$ erhalten.
- Wie groß ist die Ablenkung $x(t_s)$ für die o.g. Werten? In welche Himmelsrichtung?

PÜ 5: Schwerpunkt

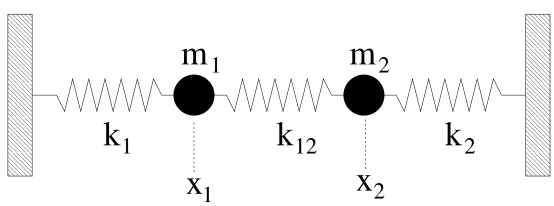
Betrachte drei geladenen Teilchen mit Massen $m_1 = 3m$, $m_2 = m_3 = m$, und Ladungen $q_1 = q$, $q_2 = -q$, $q_3 = 2q$. Die Teilchen befinden sich in einem elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Die Teilchen sind zur Zeit $t = 0$ in Ruhe auf der Stellen $(x_1 = 1, y_1 = 0)$, $(x_2 = 0, y_2 = 1)$, $(x_3 = 2, y_3 = 4)$. Wir sind interessiert an der Bewegung des Schwerpunktes.

- (a) Finde den Schwerpunkt $\vec{R}(t = 0)$ zur Zeit $t = 0$.
- (b) Schreibe die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt.
- Aus (a) und (b) finde $\vec{R}(t > 0)$.



PÜ 6: Gekoppelte Schwingungen

Betrachte zwei Massen m_1 und m_2, die untereinander und jeweils mit einer festen Wand durch Federn mit Federkonstanten k_1, k_{12} und k_2, wie in der Abbildung ersichtlich, verbunden sind. Die Bewegung ist eindimensional.

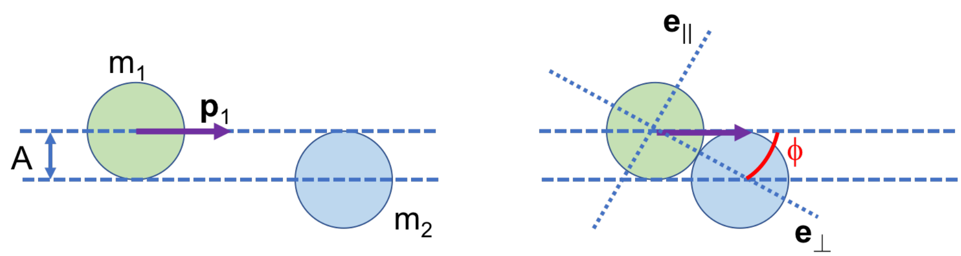


1. (a) Welche Kräfte erfahren die Teilchen? Schreibe die Gesamtenergie des Systems als Funktion von $\dot{y}_{j=1,2}$ und $y_{j=1,2}$, wobei $y_{j=1,2} \equiv x_j - x_{j0}$ an. Hierbei ist x_{j0} die Ruhelage der Masse m_j.
2. (b) Finde die Bewegungsgleichungen fr $y_{j=1,2}$.
3. (c) Suche nach Lösungen dieser Gleichungen der Form $y_i = \alpha_i \cos \omega t$ und bestimme die möglichen Werte von ω. Diese sind die Frequenzen der Normalmoden der gekoppelten Oszillatoren.

4. (d) Betrachte das symmetrische System, d.h. $m = m_1 = m_2$ und $k = k_1 = k_2$, und bestimme die mögliche Werte von ω und die zugehörigen Vektoren $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Welchen Bewegungen entsprechen jeweils den gefundenen Normalmoden? Kannst Du sehen warum eine der Moden unabhängig von k_{12} ist?

PÜ 7: Streuung von harten Kugeln

In der Theorievorlesung haben wir kurz über 3D Stöße diskutiert. Da haben wir gesehen, dass für die 3D Stöße müssen wir den Stoßparameter kennen. Betrachte zwei harte Kugeln jeweils mit Radius A und Massen m_1 und m_2, die sich reibungsfrei bewegen. Zu Beginn sei die Kugel 2 in Ruhe (im Laborsystem) während die Kugel 1 sich mit dem Impuls $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$ ($p_1 > 0$) bewegt. Die Bahn des Mittelpunktes der Kugel 1 sei parallel zur x-Achse mit Abstand A zu ihr. Der Mittelpunkt von Kugel 2 liegt genau auf der x-Achse (Abbildung). Das legt den Stoßparameter fest.



Wir führen die Rechnungen zuerst im Laborsystem:

- (a) Betrachte den elastischen Stoß der zwei Kugeln. Schreib zuerst die Erhaltungssätze.
  Hinweis: Der Impulsbertrag bei der Kollision findet aufgrund des Kontakts der 2 Kugeln statt. Also verändert sich nur die Komponente des Impulses in der Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte ($\perp$-Richtung in der Skizze). Es ist also eine gute Idee, die Impulskomponenten entlang die $||$ und $\perp$ Richtungen zu benutzen (Abbildung).).
- (b) Aus der Erhaltungssätze finde die neue Impulsen $\vec{p}'_{j=1,2} = p'_{j,||}\vec{e}_{||} + p'_{j,\perp}\vec{e}_{\perp}$.
- (c) Berechne den Winkel zwischen der Bahn der Kugel 1 nach dem Stoß und der x-Achse. Was passiert mit Kugel 2?

(d) Drücke nun die Impulse der Kugeln nach dem Stoß im Schwerpunktsystem aus. Zeichne eine Skizze des Stoßes im Schwerpunktsystem.

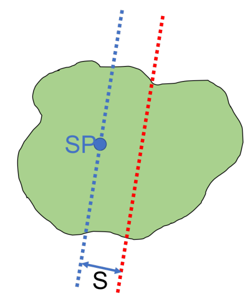
PÜ 8: Steinerscher Satz

Wenn man das Trägheitsmoment (J_S) um einer gegebenen Achse (blaue Linie) durch den Schwerpunkt (SP) kennt, dann kann man sehr einfach das Trägheismoment, J, um alle andere Achse parallel dazu (rote Linie) bestimmen:

$$J = J_S + MS^2,$$

wobei M die Gesamtmasse ist, und S der Abstand zwischen den Achsen ist (wie in der Abbildung). Das ist der sogen. Steinersche Satz. Wir werden hier den Satz beweisen.

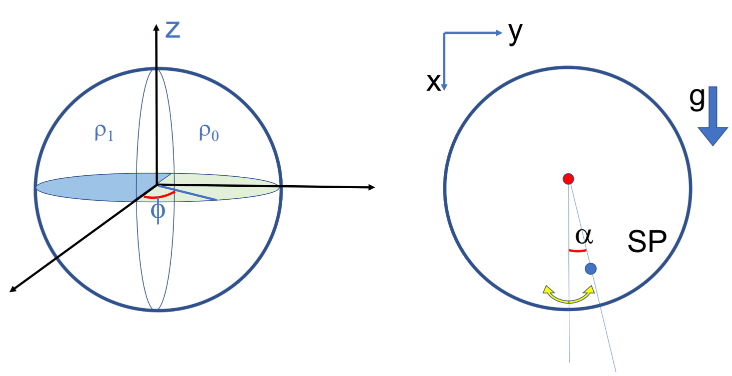
Wir nehmen die z-Richtung als die Richtung der Achsen. Dann $J_S = \sum_i m_i(\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2)$, wobei $\tilde{x}_i$ und $\tilde{y}_i$ die Koordinaten im SP-System sind. Das Trägheitsmoment um der roten Achse ist $J = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$, wobei die Koordinaten x_i und y_i nun in einem Bezugssystem (Q) sind, in dem der Ursprung auf der roten Achse liegt. Benutze die Relation zwischen die Koordinaten im SP-System und im Q-System, um den Steinerschen Satz zu beweisen.



PÜ 9: Inhomogene Kugel

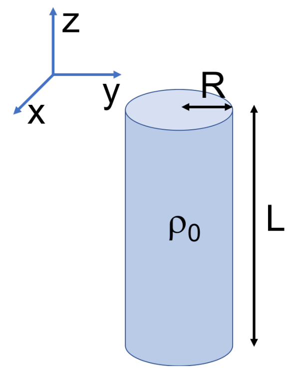
Betrachte eine inhomogene Kugel mit Massendichte $\rho(0 < \phi < \pi) = \rho_0$ und $\rho(\pi < \phi < 2\pi) = \rho_1$ (Abbildung).

- (a) Bestimme der Schwerpunkt. Nutze Symmetriegründen wenn möglich.
- (b) Bestimme das Trägheitsmoment um der z-Achse
- (c) In der Vorlesung haben wir die Pendelbewegung eines starren Körpers um einer Achse unter dem Einfluß der Schwerkraft diskutiert. Bestimme die Kreisfrequenz der Pendelbewegung der inhomogenen Kugel um der z-Achse (die Schwerkraft wirkt in Richtung x, wie in der Abbildung).



PÜ 10: Trägheitsmoment eines Zylinders

Betrachte einen homogenen Zylinder der Dichte ρ_0. Der Zylinder hat einen Radius R und eine Länge L. Die Achse des Zylinders sei entlang der z-Richtung.



- (a) Wir nehmen nun an, dass man den Zylinder um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Wie groß ist die kinetische Energie (T_z)?
- (b) Wir nehmen nun an, dass man den Zylinder um die durch den Massenschwerpunkt verlaufende x-Achse rotiert. Wie groß ist die kinetische Energie (T_x)?
- (c) Berechne das Verhältnis L/R bei dem $T_x > T_z$.

PÜ 11: Nutation der Erde

Die Erde ist keine Kugel, sondern ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Die Halbachsen sind $a = b = 6378$ km (Äquator) und $c = 6357$ km. Auf die Erde wirke kein äußeres Drehmoment (also wir nehmen an, dass die Erde ein kräftefreier Kreisel ist).

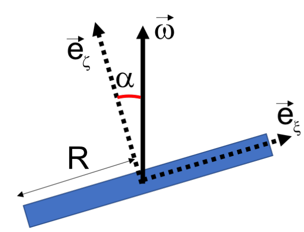
- (a) Rekapituliere aus der Theorievorlesung die Eulersche Gleichungen eines freien, symmetrischen Kreisels. Wie berechnet sich die sogenannte Nutationsfrequenz (also die Frequenz der Rotation der Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse; Ω in der Notation der Vorlesung)? Mache eine Skizze der Erdrotation.

- (b) Wir wollten nun die Nutationsfrequenz Ω der Erde bestimmen. Für das brauchen wir zuerst die Hauptträgheitsmomente A, B und C. Zeige, dass $A = B = M(a^2 + c^2)/5$, und $C = 2Ma^2/5$, wobei M die Masse der Erde ist. (Hinweis: Hier kannst Du ellipsoidale koordinaten nutzen: $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{y} = y/a$, und $\tilde{z} = z/c$, dann $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 1$, also $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ sind in einer Kugel mit Radius 1. Das sollte Dir helfen bei der Berechnung der Integral).

- (c) Berechne nun Ω. Du solltest ca. 303 Tagen erhalten. Experimentell findet man 433 Tage. Woher mag die Abweichung zu deinem berechneten Wert rühren?

PÜ 12: Rotierende Kreisscheibe

Eine homogene Kreisscheibe mit Masse M und Radius R dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch den Mittelpunkt verlaufende, körperfeste Achse. Die Achse bilde mit der Flächennormalen den Winkel α.

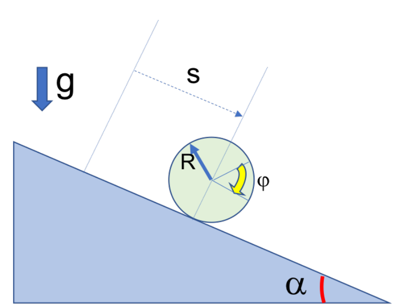


- (a) Bestimme die Hauptträgheismomente der Kreisscheibe. Du solltest $A = B = MR^2/2$ und $C = MR^2/4$ erhalten. (Hinweis: Wir vernachlässigen hier die endliche Dicke der Scheibe. Also bei der Integralen: $\int d^3r \rho(\vec{r}) \dots = \frac{M}{\pi R^2} \int dxdy \dots$)

- (b) Bestimme mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen das Drehmoment $\vec{M}$, das so eine Bewegung auf Recht hielt.

PÜ 13: Abrollen eines Zylinders

Ein Zylinder mit Masse M und Radius R rolle mit waagrecht gelegter Achse eine schiefe Ebene hinunter (Abbildung). Wir beschreiben die Bewegung durch die Koordinate $s(t)$, der Abstand des Auflagepunktes des Zylinders vom Anfangspunkt und den Rotationswinkel $\varphi(t)$ um die Zylinderachse. Die Abrollbedingung besagt, dass $R\dot{\varphi}(t) = s(t)$.

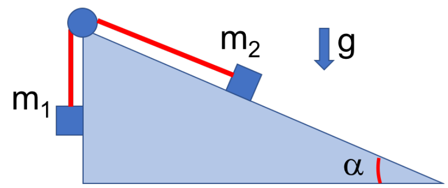


- (a) Bestimme die kinetische Energie T und die Potentialenergie V als Funktion von $s(t)$ und $\dot{s}(t)$.

- (b) Aus der Energieerhaltung $dE/dt = 0$ $(E = T + V)$, finde die Bewegungsgleichung: $\ddot{s} = \frac{2}{3} g \sin\alpha$.

PÜ 14: Modifizierte Atwoodsche Machine

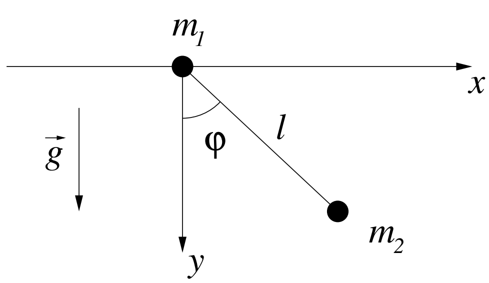
Wie betrachten eine modifizierte Atwoodsche Machine wie in der Abbildung. Die Länge L des Seils ist Konstant.



- (a) Bestimme die Zwangsbedingungen und wählt die generalisierte Koordinate.
- (b) Schreibe die Lagrange Funktion.
- (c) Stelle die Lagrange Gleichung.
- (d) Schreibe die Lösung.

PÜ 15: Schwingende Hantel

Die Masse m_1 einer Hantel der Länge ℓ kann sich reibungsfrei entlang einer horizontalen Geraden bewegen (Abbildung). Wir sind interessiert an der Bewegung der Massen m_1 und m_2 unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die Anfangsbedingungen sind $x_1(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, and $\dot{z}(0) = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\ell\omega_0$.



- (a) Finde die Zwangsbedingungen und die zwei generalisierten Koordinaten.
- (b) Gebe die Lagrangefunktion L an.
- (c) Zeige, dass die Koordinaten der Masse m_2 auf einer Ellipse der Form

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{m_1\ell}{m_1+m_2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\ell^2} = 1.$$

  sind.
- (d) Zeige, dass für $\varphi \ll 1$, $\varphi(t)$ führt eine harmonische Bewegung mit Frequenz $\Omega = \sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{m_1\ell}}$.

PÜ 16: Fallendes Teilchen mit Reibung

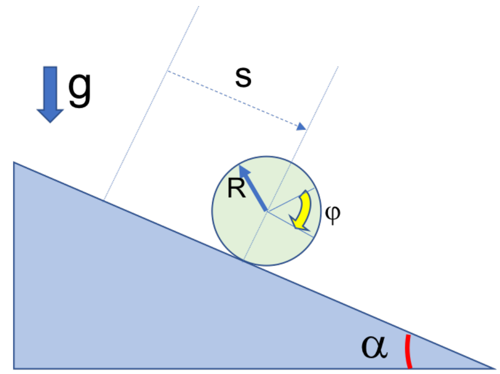
Ein Teilchen der Masse m falle vertikal unter dem Einfluß der Schwerkraft der Erde und der Reibung der Atmosphäre (wir vernachlässigen die Coriolis-Kraft). Die Reibung kann durch die Dissipationsfunktion $D = \alpha v^2/2$ (Stokessche Reibung) modelliert werden. Wir wollen die Dynamik des Teilchens mit Hilfe der modifizierten Lagrange-Gleichungen mit Reibung studieren.

- (a) Schreibe die Lagrange Funktion
- (b) Schreibe die modifizierte Lagrange-Gleichungen
- (c) Sei $v(t=0)=0$. Finde die Geschwindigkeit $v(t)$. Falls das Teilchen eine unendliche Zeit fallen könnte (was natürlich nicht möglich ist), was würde mit der Geschwindigkeit passieren?

PÜ 17: Abrollen eines Zylinders mit Lagrange-Multiplikatoren

In [PÜ13] haben wir das Abrollen eines Zylinders mit Masse M und Radius R auf einer schiefen Ebene untersucht. Nun wollen wir dieses Problem mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren und der Lagrange-Gleichungen 1. Art rechnen. Wie in [PÜ13] beschreiben wir die Bewegung durch die Koordinate $s(t)$, der Abstand des Auflagepunktes des Zylinders vom Anfangspunkt und den Rotationswinkel $\varphi(t)$ um die Zylinderachse. Die Abrollbedingung besagt, dass $R\dot{\varphi}(t) = \dot{s}(t)$.

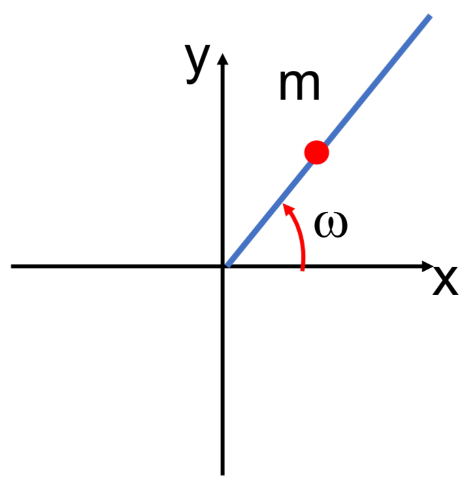
- (a) Schreibe die Abrollbedingung in einer differentiellen Form: $\sum_m a_m dq_m$, wobei $q_{1,2}$ die generalisierte Koordinaten sind. (Bemerkung: Eigentlich ist die Abrollbedingung hier keine nicht-holonome Zwangsbedingung, da hier wir die Bedingung integrieren können, $R\varphi = s$+konst., und daher ist die Bedingung eigentlich holonom. Wir werden trotzdem den Formalismus der Lagrange-Multiplikatoren anwenden, damit ihr sieht wie das funktioniert).
- (b) Führe einen Lagrange-Multiplikator λ ein, und Schreibe die Lagrange-Gleichungen erster Art.
- (c) Mit den Lagrange-Gleichungen und der Rollbedingung hast Du nun 3 Gleichungen für $\ddot{q}_1$, $\ddot{q}_2$ und λ. Finde λ, und die Lösung für $s(t)$ und $\theta(t)$. Vergleiche mit [P13]. Du sollest natürlich, das gleiche Ergebnis erhalten.



PÜ 18: Gleitende Perle auf einem rotierenden Draht

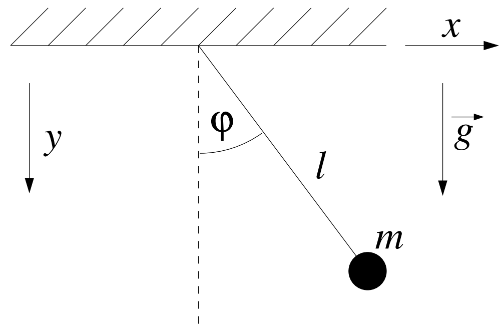
In der Vorlesung haben wir die Hamilton-Funktion eingeführt. Wir haben gesagt, dass für holonomen-skleronomen Zwangsbedingungen die Hamilton-Funktion die Energie entspricht. Wir werden nun ein Beispiel mit holonomen-rheonomen Zwangsbedingungen untersuchen. Nehmen wir die gleitende Perle, die wir in der Vorlesung schon untersucht haben. Wie in der Vorlesung, die Perle gleitet auf einer Stange, die mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω auf der xy-Ebene rotiert (wir betrachten die Schwerkraft nicht).

- (a) Schreibe die Lagrange-Funktion
- (b) Schreibe den generalisierten Impuls und die entsprechende Hamilton-Funktion. Zeige, dass die Hamilton-Funktion eine Konstante der Bewegung ist.
- (c) Zeige, dass die Hamilton-Funktion nicht gleich die Energie des Systems ist.



PÜ 19: Pendelschwingung

Ein Pendel mit konstanter Fadenlänge l und Masse m schwingt im Schwerefeld der Erde.



- (a) Wir wählen $q = \varphi$ als generalisierte Koordinate. Bestimme die Lagrange-Funktion.
- (b) Bestimme den generalisierten Impuls p. Ist p ein Impuls?
- (c) Bestimme die Hamilton-Funktion, H. Ist H die Gesamtenergie?
- (d) Stelle die Hamilton-Gleichungen auf und finde damit eine Gleichung für $\ddot{\varphi}$.

PÜ 20: Hamilton Formalismus

Zwei Teilchen mit Masse m bewegen sich in einer Dimension x. Die Teilchen erfahren ein externes harmonisches Potential $V_{\text{HO}}(x_1, x_2) = \frac{m}{2}\omega^2 (x_1^2 + x_2^2)$, und außerdem eine abstoßende Wechselwirkung zwischeneinander $V_{\text{Int}}(x_1, x_2) = \frac{\gamma}{|x_1 - x_2|}$, mit $\gamma > 0$

- (a) Benutze als generalisierte Koordinaten die Schwerpunkt- und Relativkoordinaten (X_{cm}, x_r). Zeige, dass die Hamilton-Funktion in 2 unabhängige Teile zerlegt werden kann:
$$H = H_{\text{cm}}(X_{\text{cm}}, P_{\text{cm}}) + H_r(x_r, p_r),$$
wobei P_{cm} und p_r die entsprechenden generalisierten Impulse von X_{cm} und x_r sind.
- (b) Bestimme die Bahnen (mit konstanten Energien E_{cm} und E_r) in den Phasenräumen $(X_{\text{cm}}, P_{\text{cm}})$ und (x_r, p_r).
- (c) Stelle die Hamilton-Gleichungen auf. Bestimme damit die Gleichungen für $\ddot{X}_{\text{cm}}$ und $\ddot{x}_r$ (ohne diese zu lösen).

PÜ 21: Poisson-Klammern des Drehimpulses

Seien $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ die kartesischen Koordinaten eines Teilchens und $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ die korrespondierenden Impulse. Ferner sei $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$, der Drehimpuls. Berechne $\{L_x, L_y\}$, $\{L_x, L_z\}$, $\{L_y, L_z\}$ und drücke die Ergebnisse jeweils als Funktion der Drehimpulskomponenten aus. (Hinweis: Nutze die fundamentelle Poisson-Klammer).

PÜ 22: Kanonische Transformationen und erzeugende Funktionen

- (a) Für welche Parameter α, β, γ, δ ist die Transformation $q' = q^\alpha p^\beta$, $p' = q^\gamma p^\delta$ kanonisch?
- (b) Sei die erzeugende Funktion $F_3(p,q') = -\left(e^{q'}-1\right)^2 \tan p$. Finde $q(p,q') = -\frac{\partial F_3}{\partial p}$ und $p'(p,q') = -\frac{\partial F_3}{\partial q'}$. Finde die kanonische Transformation $q'(q,p)$, $p'(q,p)$.
- (c) Wir nehmen die kanonische Transformation von Punkt (a) an. Wir wollen nun die erzeugende Funktion $F_1(q,q')$ bestimmen. Schreibe $p(q,q')$ und $p'(q,q')$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$, und $p' = -\frac{\partial F_1}{\partial q'}$. Integriere die Gleichungen, und finde $F_1(q,q')$.

PÜ 23: Hamilton Funktion

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Frequenz ω, auf den eine aüßere Kraft $K(t)$ einwirkt. Die entsprechende Hamilton Funktion ist

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - K(t)q.$$

Gegeben ist die erzeugende Funktion $F_1(q,q',t) = \frac{m\omega}{2}\left[q - \frac{K(t)}{m\omega^2}\right]^2 \cot q'$.

- (a) Finde die kanonische Transformation $q(q',p')$ und $p(q',p')$.
- (b) Finde die Hamilton Funktion in den transformierten Koordinaten $H'(q',p',t)$. (Achtung: nun ist $\partial F_1/\partial t \neq 0$).

PÜ 24: Eichtransformationen

In Elektrodynamik habt ihr die Eichtransformationen gelernt: sei $\vec{A}(\vec{r},t)$ das Vektorpotential, und $\varphi(\vec{r},t)$ das Skalarpotential, dann für eine beliebige Funktion $\lambda(\vec{r},t)$, stellen $\vec{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$ und $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\lambda$ eine alternative Definition der Vektor- und Skalarpotentiale dar. Wir wollen zeigen, dass die Eichtransformation eine kanonische Transformation ist. Die Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld ist:

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{q},t)\right)^2 + e\varphi(\vec{q},t).$$

- (a) Sei die erzeugende Funktion: $F_2(\vec{q},\vec{p'}) = \vec{q}\cdot\vec{p'} - \frac{e}{c}\lambda(\vec{q},t)$. Finde $\vec{p}(\vec{q},\vec{p'})$ und $\vec{q'}(\vec{q},\vec{p'})$. (Hinweis: in der Vorlesung haben wir gesehen, dass $p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}$ und $q'_j = \frac{\partial F_2}{\partial p'_j}$).
- (b) Zeige, dass die Hamilton-Funktion in der neuen Koordinaten

$$H'(\vec{q'},\vec{p'},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p'} - \frac{e}{c}\vec{A'}(\vec{q'},t)\right)^2 + e\varphi'(\vec{q'},t).$$

ist. Damit haben wir gezeigt, dass die Eichtransformation eine kanonische Transformation ist.

PÜ 25: Hamilton-Jacobi-Gleichung I

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Masse m im Potential $V(x) = -bx$.

- (a) Stelle die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die charakteristische Funktion.
- (b) Finde $W(x)$ als Funktion der Energie $E = \alpha_1$ =konst.
- (c) Ich erinnere euch, dass wenn wir $E = \alpha_1 = p'_1$ wählen, dann die entsprechende $q'_1 = t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}$. Nutze das, um $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}_0 = v_0$ zu bestimmen.

PÜ 26: Hamilton-Jacobi-Gleichung II

Sei ein Teilchen in einem zweidimensionalen harmonischen Oszillator.

- (a) Stelle die Hamilton-Jacobi-Gleichung in kartesischen Koordinaten, und nutze die Separation der Variablen, um die Gleichung in zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zu transformieren.
- (b) Löse die Gleichungen. (Bemerkung: Hier braucht man an einem Punkt, dass $\int ds\sqrt{1-s^2} = \frac{1}{2}\arcsin s + \frac{s}{2}\sqrt{1-s^2}$.)
- (c) Wenn wir die Energie $E = \alpha_1 = p'_1$ auswählen, dann $q'_1 = \beta_1 + t$, $q'_2 = \beta_2$, wobei β_j Konstanten sind. Nutze $q'_j = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j}$, um $x(t)$ und $y(t)$ als Funktion der Konstanten $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ zu bestimmen.

PÜ 27: Wirkungs- und Winkelvariablen

Wir betrachten einen 3D harmonischen Oszillator

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right).$$

Wir wollen hier, dieses Problem mit Hilfe der Wirkungs- und Winkelvariablen untersuchen.

- (a) Stelle die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die charakteristische Funktion $W(x, y, z|\vec{\alpha})$. Wie in der Vorlesung, nehmen wir α_1 als die Energie an. Nutze die Separation der Variablen: $W(x, y, z|\vec{\alpha}) = W_x(x|\vec{\alpha}) + W_y(y|\vec{\alpha}) + W_z(z|\vec{\alpha})$. Separiert zuerst die z-Abhängige Teil von der Rest, also $H_x(x, p_x) + H_y(y, p_y) = \alpha_1 - H_z(z, p_z)$. Diese Separation ergibt eine zweite Konstante α_z. Dann separiert die x- und y-abhängige Teile: $H_x(x, p_x) = \alpha_z - H_y(y, p_y)$. Diese Separation ergibt eine dritte Konstante α_x. So solltest Du drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten.

- (c) Aus der Gleichung von $p_z = \frac{dW_z}{dz}$ sollest Du erhalten: $p_z(z|\vec{\alpha}) = m\omega_z \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m\omega_z^2} - z^2}$. Bestimme die Umkehrpunkte $z_\pm$ und dann die Winkelvariable $J_z = \oint p_z dz = 2\int_{z_-}^{z_+} p_z dz$. Du solltest $J_z = \frac{2\pi}{\omega_z}(\alpha_1 - \alpha_z)$ erhalten. Man findet genauso $J_x = \frac{2\pi}{\omega_x}\alpha_x$, $J_y = \frac{2\pi}{\omega_x}(\alpha_z - \alpha_x)$ (die brauchst Du nicht zu rechnen). (Bemerkung: Hier brauchst Du $\int_{-1}^{1} ds\sqrt{1-s^2} = \pi/2$).

- Zeige, dass die Hamilton-Funktion der Form $H(\vec{J}) = \frac{1}{2\pi}(\omega_x J_x + \omega_y J_y + \omega_z J_z)$ ist, und finde die Frequenzen ν_j der Bewegung.

PÜ 28: Lorenz-Transformation für eine relative Geschwindigkeit mit einer beliebigen Richtung

In der Vorlesung haben wir immer eine relative Geschwindigkeit in der z-Richtung angenommen. Seien nun S und S' zwei Inertialsysteme. S' bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$, wobei die Richtung von $\vec{v}$ beliebig ist. Bestimme die Formeln der Lorentz-Transformation.

Hier solltest Du folgendes berücksichtigen. Der Vektor $\vec{r}$ in S lasst sich als $\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$ zerlegen, wobei $\vec{r}_{||} = \frac{1}{v^2}(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}$ parallel zu $\vec{v}$ ist, und $\vec{r}_{\perp}$ senkrecht zu $\vec{v}$ ist. Eine ähnliche Zerlegung können wir in S' machen. Hier müss man nur berücksichtigen, dass die senkrechte Komponenten bleiben bei der Transformation unverändert, und dass die parallele Komponente genau wie die z-Komponente bei unserer Diskussion in der Vorlesung transformiert wird.

PÜ 29: Lorenz-Transformation der Geschwindigkeit

Seien S und S' zwei Inertialsysteme. S' bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. Ein Teilchen habe in S die Geschwindigkeit $\vec{u} = c\vec{e}_y$.

- (a) Berechne $\vec{u}'$.
- (b) Berechne $|\vec{u}'|$.

PÜ 30: Gleichzeitigkeit

Seien S und S' zwei Intertialsysteme. S' bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. Zwei Ereignisse finden in S zu den Zeiten $t_1 = z_0/c$ und $t_2 = z_0/2c$ and den Orten $(x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = z_0)$ und $x_2 = 0, y_2 = y_0, z_2 = 2z_0)$. Wie gross muss die Relativgeschwindigkeit v sein, damit die Ereignisse in S' gleichzeitig stattfinden? Zu welcher Zeit t'' werden die Ereignisse in S' beobachtet?

PÜ 31: Radiosignal

Ein Raumschiff bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.8c$. Sobald dieses einen Abstand von $d = 6,66 \times 10^8$ km von der Erde hat, wird von der Erdstation ein Radiosignal zum Schiff gesendet. Wie lange benötigt das Signal gemäß einer Uhr auf der Erdstation? Und gemäß einer Uhr im Raumschiff?

PÜ 32: Kausalität

Kann es zwischen den folgenden Ereignisse $[\vec{r}_1 = (x = 1, y = 2, z = 3)\text{m},\ t_1 = 3 \times 10^{-8}s]$ und $[\vec{r}_2 = (x = 4, y = 2, z = 7)\text{m},\ t_2 = 6 \times 10^{-8}s]$ einen kausalen Zusammenhang geben?

PÜ 33: Lorentz Transformation von Winkeln

Seien S und S' zwei Intertialsysteme. S' bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung.

- (a) Ein in S ruhender Stab schließt mit der z-Achse einen Winkel von 45^o ein. Unter welchem Winkel erscheint er in S'?
- (b) Ein Teilchen habe in S die Geschwindigkeit $\vec{u} = (v, 0, 2v)$. Welche Winkel bildet seine Bahn mit den z-Achse in S und S'?
- (c) Ein Photon verlässt den Ursprung von S zur Zeit $t = 0$ in einer Richtung, die mit der z-Achse einen Winkel von 45^o bildet. Welcher Winkel ergibt sich in S'?

PÜ 34: Signalen in einer Rakete

Eine Rakete der Eigenlänge L_0 fliegt mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zu einem Bezugssytem S in z-Richtung. Zur Zeit $t = t' = 0$ passiert die Spitze der Rakete den Punkt P_0 in S. In diesem Moment wird ein Lichtsignal von der Raketenspitze zum Raketenende gesendet.

- (a) Nach welcher Zeit erreicht im Ruhesystem der Rakete der Lichtblitz das Ende der Rakete?
- (b) Zu Welchem Zeitpunkt erreicht das Signal das Raketenende im Ruhesystem S des Beobachters?
- (c) Wann registriert der Beobachter, dass das Raketenende den Punkt P_0 passiert?

PÜ 35: Relativistischer Doppler-Effekt

Wir betrachten ein Beobachter, der im Bezugssystem S in Ruhe ist, und eine Lichtquelle, die sich mit Geschwindigkeit $-v$ von Beobachter entfernt (Abbildung). Sei S', das System in dem die Lichtquelle in Ruhe ist. Wir wollen hier die Lichtfrequenz berechnen, die der Beobachter misst, und sie mit der Eigenfrequenz der Lichtquelle vergleichen.

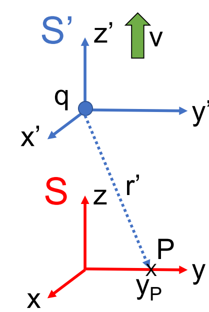
- (a) Wir betrachten das Problem in S'. Zur Zeit $t' = 0$ sind der Ursprung von S und der von S' am selben Ort. Zur Zeit t'_E wird einen Wellenfront gesendet. Bestimme als Funktion von t'_E die Zeit t'_A an der der Wellenfront der Beobachter erreicht.
- (b) Nutze nun die Lorentztransformation und zeige dass in System S (also für den Beobachter), $t_A = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} t'_E$.
- (c) Der Zeitinterval zwischen zwei Wellenfronten ist die Periode (also 1/Frequenz). Bestimme dann, f/f', wobei f' die Eigenfrequenz der Lichtquelle ist, und f die Frequenz, die der Beobachter sieht. Da die Wellenlänge $\lambda = c/f$, zeige, dass für den Beobachter $\lambda > \lambda'$, wobei λ' die Eigenwellenlänge (Rotverschiebung).
- (d) Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung finde f/f' für $v \ll c$. Du solltest $f'/f = 1 - v/c$, also den nicht-relativistischen Doppler-Effekt.

PÜ 36: Elektromagnetische Felder einer bewegten Punktladung

In der Vorlesung haben wir die Transformationsformeln des elektromagnetischen Feldes eingeführt. Seien S und S' zwei Intertialsysteme. S' bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. Dann:

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma(E_x - vB_y) \qquad & B'_x &= \gamma(B_x + vE_y/c^2) \\ E'_y &= \gamma(E_y + vB_x) \qquad & B'_y &= \gamma(B_y - vE_x/c^2) \\ E'_z &= E_z \qquad & B'_z &= B_z \end{aligned} \tag{1}$$

Wir werden nun diese Transformationen anwenden. Wir nehmen an, dass eine Ladung q im Ursprung von S' sei. S sei dagegen das Ruhesystem eines Beobachters P, der im S auf der Stelle $\vec{r}_P = (0, y_P, 0)$ ist. S' bewegt sich relativ zu S mit der konstanten Geschwindigkeit v in z-Richtung, wobei für $t = t' = 0$ die beiden Koordinatenursprünge zusammenfallen.



- (a) Da P im Ruhe in S ist, dann ist $\vec{r}_P$ konstant für alle Zeiten t. Nutze die Lorentz-transformation um das Ereignis $(t, \vec{r}_P)$ im System S' zu finden, also $(t', \vec{r}\,'_P)$. Nun kannst Du den Abstand $\vec{r}\,'(t')$ zwischen die Ladung und P bestimmen.

- (b) Bestimme im Bezugssystem S' das $\vec{E}'$ Felder an der Position P, die die Ladung verursacht. (Hier muss Du Dich an der Elektrostatik erinnern, dass das E-Feld einer Ladung ist $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}$, wobei $\vec{R}$ der Abstandsvektor ist.) Wie ist das $\vec{B}'$ Feld?

- (c) Benutze die Lorentz-Transformation der Felder, um $\vec{E}$ im Bezugssystem S zu bestimmen.

- (d) Bestimme auch $\vec{B}$ in S. Wie kannst Du dein Ergebnis interpretieren?

PÜ 37: Teilchen in einem homogenen B-Feld

Ich erinnere euch, dass in der relativistischen Mechanik $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$, wobei $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ (mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$). Ein Teilchen der Masse m und der Ladung q bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$, und spürt damit die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

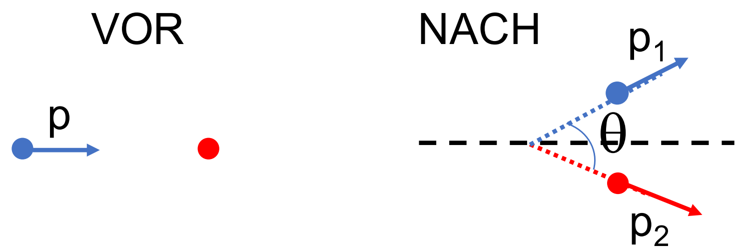
- (a) Zeige, dass $\frac{d}{dt}\vec{p}^{\,2} = 0$, und damit dass v^2 (und damit auch $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$) eine Konstante ist.

- (b) Berechne nun die Zeitabhängigkeit des relativistischen Impulses mit der Anfangsbedingung $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$.

- (c) Berechne die Bahn $\vec{r}(t)$ des Teilchens mit $\vec{r}(0) = (0, y_0 = \gamma\frac{mv_0}{qB}, 0)$.

PÜ 38: Relativistischer Stoß

Wir betrachten den Stoß zweier Teilchen gleicher Masse m im Inertialsystem S, in dem eines des beiden Teilchen vor dem Stoß ruht. Das andere habe vor dem Stoß die Energie T und den Impuls $\vec{p}$. Nach dem Stoß besitzen die Teilchen die Energien T_1 und T_2, und die Impulse $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$.



- (a) Berechne mit Hilfe der Impuls- und Energieerhaltung den Winkel θ zwischen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ nach dem Stoß als Funktion von T und T_1. Achtung: $T(p)^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.
- (b) Zeige, dass wenn die Geschwindigkeit des bewegten Teilchens vor dem Stoß $v \ll c$ man das nicht-relativistische Resultat bekommt.

PÜ 39: Relativistischer Stoß mit Paarerzeugung

Ein Proton stoß mit Energie T und Impuls p auf einem ruhenden Proton (im Laborsystem). Wir wollen bestimmen, wie groß die Energie T mindestens sein muss, damit man bei dem Stoß die Erzeugung von ein Paar Proton/Antiproton beobachten kann.

- (a) Bestimme der Viererimpuls p^μ vor dem Stoß. Berechne $\eta = p_\mu p^\mu$. Ich erinnere euch, dass $p_\mu p^\mu$ Lorentz invariant ist (also gleich in allen Bezuggsystemen!), und muss bei dem Stoß erhaltet bleiben.
- (b) Wir betrachten nun den Stoß im Schwerpunktssystem. Sagen wir, dass die Energie des ankommenden Protons genau genug ist, um ein Paar Proton/Antiproton zu erzeugen. Genau heißt hier, dass nach dem Stoß im Scherpunktsystem die Teilchen bewegen sich nicht und die Energie ist genau die Ruheenergie der 4 Teilchen (also die ursprüngliche 2 Protonen, und die extra Proton und Antiproton). Dann welcher Wert soll η haben?
- (c) Du kannst nun die Energie des ankommenden Protons bestimmen. Du solltest $T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = 7mc^2$ erhalten, wobei m die Ruhemasse des Protons ist. Dann muss man den Proton bis eine Energie (extra zu der Ruheenergie) $E = 6mc^2$ beschleunigt werden.