
HÜ 1 (5 P): Linearer harmonischer Oszillator mit Dämpfung

Aufgrund der Reibung wird jeder reale Oszillator irgendwann zur Ruhe kommen. Wie in der Theorie-Vorlesung, modellieren wir dies mit Hilfe der Reibungskraft, $\vec{F}_R = -\alpha\vec{v}$. Wir nehmen ein 1D Oszillator mit Federkonstante κ . Die Federkraft ist also $\vec{F}_F = -\kappa x\vec{e}_x$. Sei $\beta = \alpha/2m$, und $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$. Die Anfangsbedingungen sind $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

- (0.5 P) Stelle die Newtonsche Bewegungsgleichung.
- (0.5 P) Nutze den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$, und finde die zwei mögliche Werte $\lambda_{1,2}$, die die Gleichung erfüllen. Die allgemeine Lösung ist eine lineare Kombination von $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$.
- (2.5 P) Zeige, dass für $\beta < \omega_0$ (schwache Dämpfung),

$$x(t) = e^{-\beta t} A \cos(\Omega t - \phi),$$

wobei A , Ω und ϕ von β , ω_0 , x_0 , und v_0 abhängen.

- (1.5 P) Zeige, dass für $\beta > \omega_0$ (starke Dämpfung),

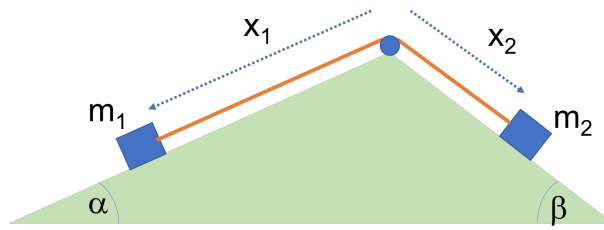
$$x(t) = e^{-\beta t} (C \cosh(\gamma t) + D \sinh(\gamma t)),$$

wobei C , D , und γ auch von β , ω_0 , x_0 , und v_0 abhängen.

HÜ 2 (2.5 P): Seil-Massen-Installation

Zwei Massen m_1 und m_2 können sich im Schwerfeld der Erde auf um die Winkel α und β gegen die Horizontale geneigten Ebenen reibungslos bewegen (Abbildung). Sie sind durch einen Faden konstanter Länge L miteinander verbunden und führen damit eindimensionale Bewegungen aus.

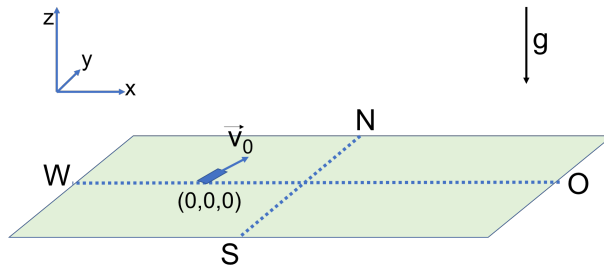
- (0.5 P) Drücke die Beschleunigungen der Massen durch m_1 , m_2 , α , β und g aus.
- (1 P) Berechne die Fadenspannung S .
- (1 P) Nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$ die Massen in Ruhe sind. Welche Bedingung müssen α , β , m_1 und m_2 erfüllen, solch dass für alle $t > 0$ die Massen in Ruhe bleiben?



HÜ 3 (3.5 P): Kanonenkugel

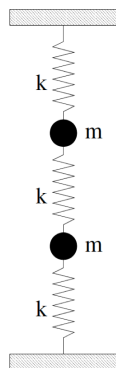
Auf dem Nordhalbkugel, auf einer geographische Breite von ϕ Grad, verschießt eine Kanone eine Kanonenkugel in östlicher Richtung mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$ (Abbildung). Wir vernachlässigen die Reibung durch die Luft.

- (0.5 P) Stelle die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Erdrotation (mit Winkelgeschwindigkeit Ω).
- (2 P) Bestimme die Trajektorie der Kugel. (Hinweis: Wie in der Präsenzübung, kann man annehmen, dass $g \gg 2\Omega \cos \phi |v_x|$. Dazu, an einem Punkt in der Rechnung bekommst Du Glieder, die mit Ω^2 abhängen. Du kannst sie ruhig vernachlässigen.)
- (1 P) Wo stoß die Kugel gegen den Boden? Vergleiche das Ergebnis mit und ohne Berücksichtigung der Erdrotation. In welche Himmelsrichtung wird die Kugel abgelenkt?



HÜ 4 (4.5 P): Gekoppelte Schwingungen im Schwerfeld

Betrachte zwei gleiche Massen m im Schwerfeld der Erde. Die Massen sind, wie in der Abbildung dargestellt, in einer vertikalen Anordnung untereinander und mit jeweils einer festen Wand über eine Feder mit Federkonstanten k verbunden.



- (a) (1 P) Sei $y_j = x_j - x_{j0}$ die Auslenkung aus der Ruhelage der Feder (die Ruhelage ist definiert, als derjenige Wert von x_j für den keine harmonische Kraft der Feder auftritt.). Schreibe die Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt $Y = (y_1 + y_2)/2$ und für die relative Koordinate $y = y_1 - y_2$.
- (b) (2.5 P) Berechne die zeitliche Entwicklung der Position der zwei Massen mit den Anfangsbedingungen $y_1 = \bar{y}_1$, $y_2 = \bar{y}_2$, $\dot{y}_{1,2} = 0$.
- (c) (1 P) Berechne auch die Werte von y_1 und y_2 an denen alle Kräfte kompensiert werden, d.h. die neuen Ruhelagen unter dem Einfluss der Schwerkraft.

HÜ 5 (6.5 P): Gestörtes Keplerproblem

In der Theorievorlesung haben wir das Keplerproblem diskutiert, also zwei Körper, die sich gegenseitig durch die Gravitationskraft anziehen. In dieser Übung werdet ihr eine Variation des Problems untersuchen. Wir betrachten zwei Körper mit Massen m_1 und m_2 , die durch ein Potential der Form:

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{c}{2r^2}$$

wechselwirken, wobei r der Abstand zwischen den Teilchen ist. Für $c = 0$ haben wir das normale Keplerproblem, das wir in der Vorlesung diskutiert haben. Wir wollen die gestörten Bahnen $r(\phi)$ bestimmen.

- (0.5 P) Finde die Kraft $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ die m_1 wegen der Wechselwirkung mit m_2 erfährt.
- (1 P) Arbeite mit Polarkoordinaten $\vec{r} = (r, \phi)$ und schreibe die Bewegungsgleichungen für r und ϕ .

- (1.5 P) Finde die Energie als Funktion des Drehimpulses L , der reduzierten Masse μ , c , $\gamma = GM$ (wobei $M = m_1 + m_2$), $\dot{r}$ und r . Dein Ergebnis sollte fast identisch wie in der Vorlesung sein.

- (2 P) Zeige, dass

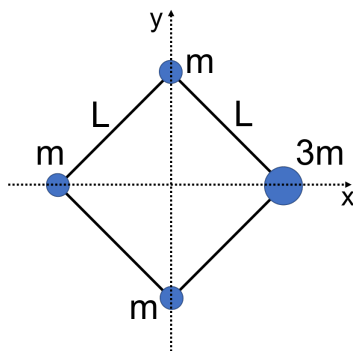
$$r(\phi) = \frac{K}{1 + \epsilon \cos(\alpha\phi)}$$

und bestimme die Konstanten K , ϵ , und α . Wie in der Vorlesung, verlangen wir, dass r minimal für $\phi = 0$ ist. Für die Planetenbewegung um die Sonne heißt der sonnennächste Punkt (also r minimal) Perihel.

- (1 P) Für $\alpha = 1$ ist die Bahn bekanntlich eine Ellipse, hingegen für $\alpha \neq 1$ eine präzessierende Ellipse. Das heisst, dass der Perihel verschiebt sich nach jedem Umlauf. Für $\alpha = 1$, nach n Umläufe, $r(\phi_n = 2\pi n)$ ist immer noch $r(0)$, der minimale Abstand. Daher nach $\Delta\phi = 2\pi$, also genau nach einer Drehung, ist der Planet noch mal am Perihel. Für $\alpha \neq 1$, $r(\phi_n) = r(0)$ für $\phi_n \neq 2\pi n$. Bestimme $\Delta\phi = \phi_{n+1} - \phi_n$ pro Umlauf. Es muss eine Funktion von $c\mu/L^2$ sein.
- (0.5 P) Bestimme näherungsweise die Perihelverschiebung pro Umlauf wenn $c\mu/L^2 \ll 1$, also $\Delta\phi \simeq 2\pi + \text{Korrektur}$.

HÜ 6 (3.5 P): Massenviereck

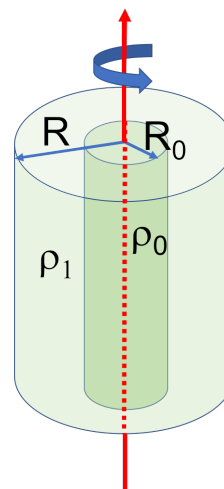
Drei Massen m und eine Masse $3m$ seien mit massenlosen Stangen verbunden, so dass sie in den Ecken eines Quadrates der Kantenlänge L sitzen (siehe Abbildung). Dieses Objekt drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die senkrecht zur Quadratfläche stehende Achse durch den Quadratmittelpunkt.



- (2.5 P) (a) Berechne den Trägheitstensor im Schwerpunkt. Welches sind die Hauptträgheitsachsen?
- (1 P) (b) Berechne den Drehimpuls für die Rotation um den Quadratmittelpunkt unter Verwendung des Steinerschen Satzes (PÜ 8).

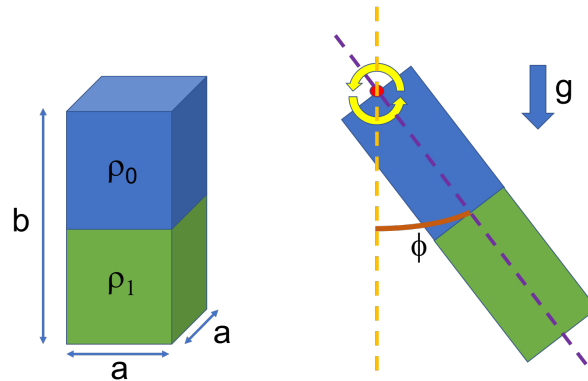
HÜ 7 (3 P): Zylinder mit inhomogener Massenverteilung

Betrachte ein Zylinder mit Höhe h und Radius R mit einem inneren zylindrischen Kern, wie in der Abbildung. Der innere Zylinder hat Radius R_0 und Massendichte ρ_0 . Der Rest der Zylinder (zwischen Radien R_0 und R) hat eine Massendichte ρ_1 . Der Zylinder rotiert um der Zylinderachse mit Winkelgeschwindigkeit ω . Zur Zeit $t = 0$ die Masse in den inneren Kern vermischt sich (instantan) mit der Masse außerhalb, so dass der Zylinder nun eine homogene Massendichte $\bar{\rho}$ hat. Die Gesamtmasse M , der Radius R und die Höhe h bleiben aber unverändert. Bestimme das Verhältnis ω'/ω , wobei ω' die neue Winkelgeschwindigkeit nach $t = 0$ ist, als Funktion von ρ_0/ρ_1 und R_0/R .



HÜ 8 (4 P): Pendelbewegung eines inhomogenen Parallelepipeds

Betrachte einen Parallelepiped mit inhomogener Massenverteilung wie in der Abbildung. Die Massendichte ist $\rho(z < 0) = \rho_1$, $\rho(z > 0) = \rho_0$.

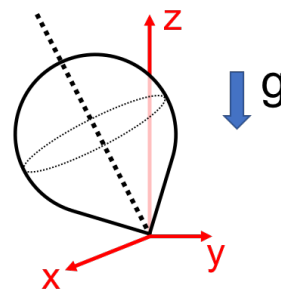


- (1 P) (a) Bestimme den Schwerpunkt.
- (2 P) (b) Bestimme das Trägheitsmoment um der Achse in der Abbildung (rechts).
- (1 P) (c) Betrachte nun die Pendelbewegung des Parallelepipeds unter dem Einfluß der Schwerkraft. Berechne die Kreisfrequenz der harmonischen Bewegung für kleinen Winkeln ϕ .

HÜ 9 (3.5 P): Kreisel unter Schwerkraft

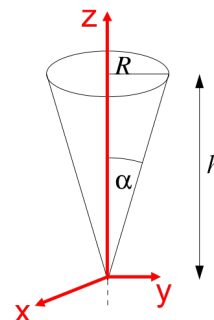
Betrachte einen homogenen symmetrischen Kreisel (Abbildung) mit Hauptträgheitsmomente $A = B \neq C$, und entsprechenden Hauptträgheitsachsen $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$, und $\vec{e}_\zeta$.

- (a) (0.5 P) Finde das Drehmoment $\vec{M}$, das die Schwerkraft verursacht, als Funktion der Gesamtmasse M und der Schwerpunkt $\vec{R}$.
- (b) (1 P) Mit Hilfe der Eulerschen Winkel finde die Komponenten von $\vec{M}$ entlang der Hauptträgheitsachsen.
- (c) (2 P) Mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen zeige, dass die Komponente der Winkelgeschwindigkeit entlang der Figurenachse $\vec{e}_\zeta$ konstant bleibt.

HÜ 10 (3 P): Kegel

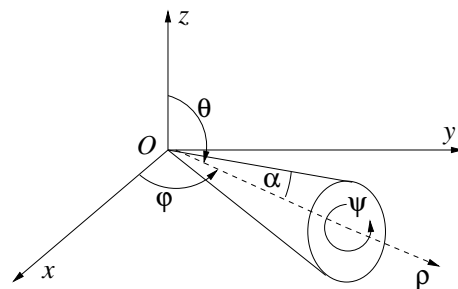
Betrachte einen homogenen Kegel mit Gesamtmasse M , Radius R und Höhe h .

- (a) (1 P) Bestimme den Schwerpunkt.
- (b) (2 P) Bestimme die Hauptträgheitsachsen und die entsprechenden Hauptträgheitsmomente.

HÜ 11 (4 P): Rollender Kegel

Der Kegel aus [H10] rollt auf einer Ebene ab, wie in der Abbildung angedeutet. Der Punkt O bleibt dabei fest. Die Winkel $(\varphi, \vartheta, \psi)$ sind die entsprechenden Eulerschen Winkel. Betrachte den Kegel als einen Kreisel ohne Einfluss äußerer Kräfte.

- (a) (3 P) Bestimme die kinetische Energie T des rollenden Kegels als Funktion von $\dot{\varphi}$, A , C , α , und ℓ/R , wobei $\ell = \frac{h}{\cos \alpha}$.
- (b) (1 P) Bestimme $\varphi(t)$ wenn die Energie erhalten wird.



(Hinweis: Die Abrollbedingung besagt, dass $-R\dot{\psi} = \ell\dot{\varphi}$.)

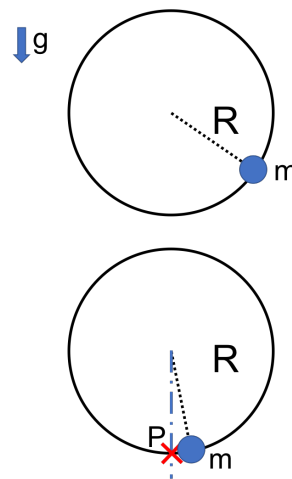
(Hinweis II: Aus der Abbildung sollte klar sein, dass θ eine Konstante ist.)

(Hinweis III: Ihr muss euch erinnern an der Beziehung zwischen Trägheitstensor, Winkelgeschwindigkeit, und kinetischer Energie.)

HÜ 12 (4 P): Perle auf einem Kreisdraht

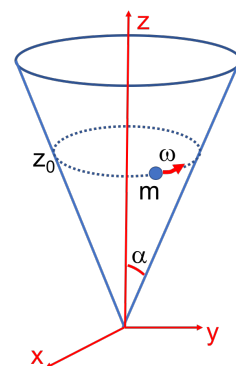
Eine Perle mit Masse m bewegt sich auf einem Kreis mit Radius R unter dem Einfluss der Schwerkraft (Abbildung).

- (a) (0.5 P) Finde die Zwangsbedingungen und wähle eine passende generalisierte Koordinate q .
- (b) (1 P) Gebe die Lagrange Funktion L an.
- (c) (1 P) Schreibe die Lagrange-Gleichung.
- (d) (1.5 P) Wir sind besonders interessiert an der Dynamik der Perle in der Nähe des Punkts P (Abbildung). Wir nehmen an, dass zur Zeit $t = 0$ das Teilchen Null Geschwindigkeit hat, und sie ist in der Nähe von P (mit einer kleinen Auslenkung, wie in der Abbildung). Zeige, dass die Perle eine harmonische Bewegung führt. Welche ist die Frequenz der harmonischen Bewegung?

HÜ 13 (6.5 P): Masse im Kegel

Eine Punktmasse m bewegt sich reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels (mit Öffnungswinkel α) im Schwerfeld der Erde (siehe Abbildung).

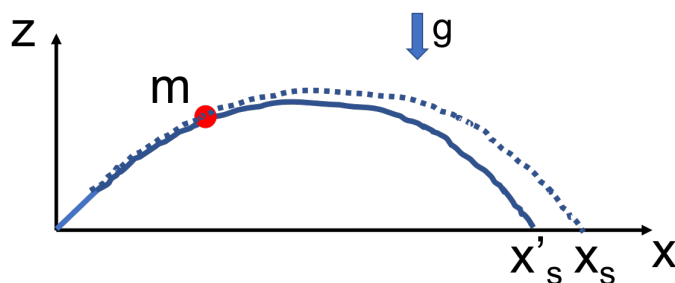
- (a) (0.5 P) Formuliere die Zwangsbedingung. Wähle passende generalisierte Koordinaten q_1 und q_2 .
- (c) (1.5 P) Gebe die Lagrange Funktion L an.
- (d) (1.5 P) Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichungen für die zwei generalisierten Koordinaten. (Hinweis: Wenn Du die generalisierten Koordinaten richtig gewählt hast, erfüllt eine von ihnen, sagen wir q_2 , $\partial L / \partial q_2 = 0$ und dann eine der Euler-Lagrange Gleichungen ist der Form $\partial L / \partial \dot{q}_2 = c$, wobei c eine Konstante ist.
- (e) (1 P) Nutze die Gleichung $\partial L / \partial \dot{q}_2 = c$ und schreibe $\dot{q}_2$ als Funktion von q_1 wenn man $q_1(t = 0)$ und $\dot{q}_2(t = 0)$ kennt. Zeige damit, dass die Bewegungsgleichung für die andere generalisierte Koordinate q_1 der Form $\ddot{q}_1 = A/q_1^3 - B$ ist, wobei A und B Konstanten sind.
- (f) (1 P) Finde die Winkelgeschwindigkeit ω , solch dass das Teilchen sich auf einer Bahn mit konstanter Höhe $z(t = 0) = z_0$ bewegt (Abbildung). Hinweis: Du solltest $\omega = \sqrt{\frac{g}{z_0}} \frac{1}{\tan \alpha}$ erhalten.
- (g) (1 P) Für kleine Ablenkungen $z = z_0 + \delta z$, wobei $\delta z / z_0 \ll 1$, zeige dass die z Koordinate eine harmonische Bewegung führt. Finde die Frequenz der harmonischen Bewegung.



HÜ 14 (5 P): Kanonenkugel mit Reibung

Wir betrachten ein ähnliches Problem wie in [HÜ3], aber diesmal mit Reibung und ohne Betrachtung der Coriolis Kraft. Eine Kanone in $x = z = 0$ verschießt eine Kanonenkugel mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_{x0}\vec{e}_x + v_{z0}\vec{e}_z$ (Abbildung). Wir modellieren die Reibung durch die Luft wie in [P17] mit Hilfe des Stokesche-Dissipationsfunktion $D = \alpha|\vec{v}|^2/2$.

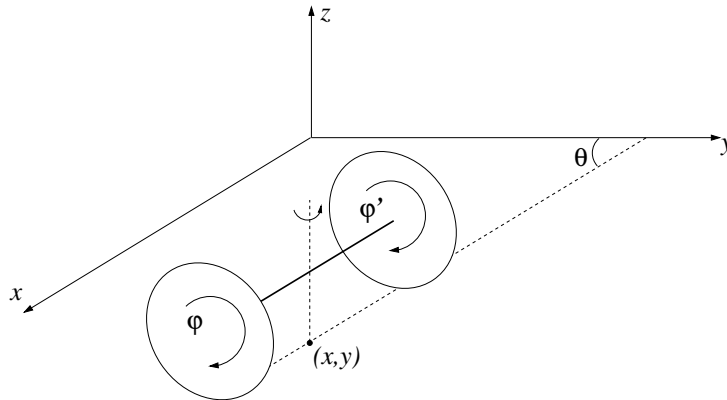
- (0.5 P) (a) Stelle die modifizierte Lagrange-Gleichungen.
- (1.5 P) (b) Finde $x(t)$ und $z(t)$.
- (1.5 P) (c) Ohne Reibung sind die Lösungen der Form $x_0(t) = v_{x0}t$ und $z_0(t) = v_{z0}t - gt^2/2$. Wir sind an einer schwachen Reibung interessiert, solch, dass für alle Zeiten $\frac{\alpha t}{m} \ll 1$. Nutze die Taylor-Entwicklung und finde, dass bis zum ersten Ordnung in $\frac{\alpha t}{m}$, $x(t) \simeq x_0(t) + \frac{\alpha t}{m} \left(\frac{-v_{x0}t}{2} \right)$ und $z(t) \simeq z_0(t) + \frac{\alpha t}{m} \left(\frac{gt^2}{6} - \frac{v_{z0}t}{2} \right)$.
- (1.5 P) (d) Ohne Reibung, trifft die Kugel den Boden zur Zeit $t_s = \sqrt{2v_{z0}/g}$ auf der Stelle $x_s = v_{x0}t_s$. Zeige, dass für $\frac{\alpha t_s}{m} \ll 1$ trifft die Kugel den Boden zur Zeit $t'_s \simeq t_s \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\alpha t_s}{m} \right)$ auf der Stelle $x'_s \simeq x_s \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha t_s}{m} \right)$.



(Bitte wenden)

HÜ 15 (6 P): Rollende Hantel

Betrachte zwei Räder der Masse m mit Radius a , die auf den Enden einer gemeinsamen masselosen Achse der Länge b montiert sind und sich unabhängig voneinander drehen können. θ sei der Winkel dieser Achse mit der y -Achse (siehe Abbildung). Die Drehwinkel der beiden Räder seien φ und φ' und der Mittelpunkt der Achse (was auch der Schwerpunkt des Systems ist) liege am Punkt (x, y) . Diese Anordnung rollt ohne zu rutschen über die xy -Ebene (die Rollbedingung verknüpft die Geschwindigkeiten der Räder und die Winkelgeschwindigkeiten: $v_1 = a\dot{\varphi}$ und $v_2 = a\dot{\varphi}'$).



- (a) (1.5 P) Zeige, dass für das System 2 nicht-holonome Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned}\sin \theta dx - \cos \theta dy &= 0, \\ \cos \theta dx + \sin \theta dy &= a d\Phi,\end{aligned}$$

mit $\Phi = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$, sowie eine holonome Zwangsbedingung:

$$\eta = c + \frac{b}{a}\theta,$$

wobei $\eta = \varphi - \varphi'$ und $c \equiv \text{konst}$, existieren.

- (b) (1.5 P) Schreibe die Lagrange-Funktion als Funktion der generalisierte Koordinaten $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \Phi$, $q_4 = \theta$.

Lösungshinweis: $L = m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + J_1 \dot{q}_3^2 + \frac{3}{4} J_2 \dot{q}_4^2$, mit $J_1 = ma^2/2$ (Trägheitsmoment um die Achse der Räder), und $J_2 = mb^2/2$ (Trägheitsmoment um die vertikale Achse, die durch (x, y) geht).

- (c) (1.5 P) Schreibe die Lagrange-Gleichungen 1. Art mit 2 Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2 .

Lösungshinweis: $2m\ddot{q}_1 = \lambda_1 \sin q_4 + \lambda_2 \cos q_4$; $2m\ddot{q}_2 = -\lambda_1 \cos q_4 + \lambda_2 \sin q_4$; $2J_1\ddot{q}_3 = -a\lambda_2$; $\frac{3}{2}J_2\ddot{q}_4 = 0$.

- (d) (1.5 P) Löse die Gleichungen.

Lösungshinweis: $x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t)$; $y(t) = y_0 - \frac{v_0}{\Omega} \cos(\Omega t)$; $\Phi(t) = \frac{v_0}{a} t + \Phi_0$; $\Omega(t) = \Omega t + \Theta_0$, wobei x_0 , y_0 , v_0 , Φ_0 , θ_0 , v_0 und Ω Konstanten sind.

HÜ 16 (3,5 P): Teilchen auf Ebene

Eine Masse m bewegt sich auf der xy -Ebene im Potential $V(\rho) = -\gamma/\rho$ wobei $\gamma > 0$ eine Konstante ist und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- (a) (1 P) Wir nehmen als generalisierten Koordinaten die Polarkoordinaten $q_1 = \rho$ und $q_2 = \varphi$. Schreibe die Hamilton-Funktion als Funktion der generalisierten Koordinaten, und der kanonisch konjugierten Variablen p_1 und p_2
- (b) (1 P) Stelle die Hamilton-Gleichungen auf, und bestimme die Gleichung für $\ddot{\rho}$ (ohne diese zu lösen).
- (c) (1,5 P) Berechne $\{A_x, H\}$ für

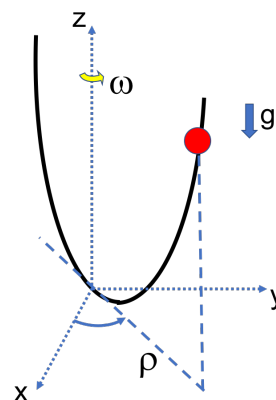
$$A_x = m\rho^2 \dot{\varphi} (\dot{\varphi} \rho \cos \varphi + \dot{\rho} \sin \varphi) - \alpha \cos \varphi.$$

Für welche Wahl der Konstanten α ist A_x eine Erhaltungsgröße?

HÜ 17 (5 P): Parabelförmiger Draht

Auf einem parabelförmig gebogenen Draht ($z = a\rho^2$, wobei $\rho^2 = (x^2 + y^2)$, $a = \text{konst.}$), der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse rotiert, gleitet reibungsfrei eine Perle der Masse m unter dem Einfluß der Schwerkraft (Abbildung).

- (a) (1,5 P) Stelle die Hamilton-Funktion des Systems auf.
- (b) (1,5 P) Leite aus der Hamilton-Funktion die Bewegungsgleichungen des Systems her. Finde die Gleichung für $\ddot{\rho}$.
- (c) (1 P) Überprüfe, ob die Hamilton-Funktion der Energie entspricht und ob die Energie erhalten ist. Erkläre warum.
- (d) (1 P) Nehmen wir $\dot{\rho}(t=0) = 0$. Für welche Frequenz ω bleibt das Teilchen auf einer Konstante Höhe? Erkläre warum.

HÜ 18 (2,5 P): Drehimpuls eines Teilchens unter dem Einfluß der Schwerkraft

Ein Teilchen bewegt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft (in Richtung z).

- (a) (1 P) Zeige mit Hilfe der Theorie der Poisson-Klammer, dass die z -Komponente des Drehimpulses, L_z , eine Bewegungskonstante ist.
- (b) (1 P) Sind die x und y Komponenten, $L_{x,y}$, auch Bewegungskonstante?
- (c) (0,5 P) Erkläre deine Ergebnisse aus Symmetriegründen.

HÜ 19 (4 P): Kanonische Transformationen

- (a) (1 P) Untersuche, ob $q' = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right)$, $p' = q \cot p$ eine kanonische Transformation ist.
- (b) (1 P) Für welche Werte von α und β ist $q' = q^\alpha \cos(\beta p)$, $p' = q^\alpha \sin(\beta p)$ kanonisch?
- (c) (2 P) Sei die Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{p^2 q^4}{2m} + \frac{k}{2q^2}.$$

Sei die erzeugende Funktion $F_1(q, q') = \alpha \frac{q'}{q}$. Bei welcher Wahl von α erhaltest Du eine wohlbekannte Gestalt von $H'(q', p')$?

HÜ 20 (6,5 P): Anharmonischer Oszillator

Die Hamiltonfunktion eines anharmonischen Oszillators mit einer periodischen externen Kraft sei durch

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 + b^2 q^4 + \kappa q \cos \Omega t$$

gegeben.

- (a) (1 P) Zeige, dass die Transformation:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (q' \cos \Omega t + p' \sin \Omega t), \\ p &= \sqrt{m\omega} (-q' \sin \Omega t + p' \cos \Omega t), \end{aligned}$$

kanonisch ist.

- (b) (1,5 P) Bestimme, die erzeugende Funktion $F_1(q, q', t)$ für diese Transformation. Lösungshinweis: $F_1(q, q', t) = \frac{1}{2 \sin \Omega t} [(q^2 m \omega + q'^2) \cos \Omega t - 2 q q' \sqrt{m \omega}]$.
- (c) (2,5 P) Gebe die Hamiltonfunktion $H'(q', p', t)$ in den neuen Koordinaten an. Lösungshinweis:

$$H' = \frac{\omega - \Omega}{2} (p'^2 + q'^2) + \frac{b^2}{m^2 \omega^2} (q' \cos \Omega t + p' \sin \Omega t)^4 + \frac{\kappa}{\sqrt{m \omega}} (q' \cos \Omega t + p' \sin \Omega t) \cos \Omega t$$
- (d) (1,5 P) Nehme an, dass die Frequenz der Kraft, Ω , fast resonant mit der Oszillatorfrequenz, ω ist ($0 < \delta \ll \Omega$, wobei $\delta = \Omega - \omega$). Vernachlässige alle Terme in $H'(q', p', t)$, die mit Frequenzen 2Ω und 4Ω oszillieren (pass bitte auf, dass $\cos^2(n\Omega t) = (1 + \cos(2n\Omega t))/2$ und $\sin(2n\Omega t) = 2 \sin(n\Omega t) \cos(n\Omega t)$).

(Bemerkung: Eine kurze Erklärung von der Begründung dieser Vernachlässigung. Wenn Ω groß ist, dann ist die Periode $T = 2\pi/\Omega$ viel kürzer als die Zeitskalen der Dynamik in den wir interessiert sind. Dann können wir einfach $\cos(n\Omega t)$ in dieser Periode integrieren, und das ergibt natürlich Null. Diese Art von Näherung findet man oft in vielen Problemen der Physik.)

Schreibe die Bewegungsgleichungen für q' und p' auf.
Lösungshinweis:

$$\begin{aligned}\dot{q}' &= -\delta p' + \frac{3b^2}{2m^2\omega^2}p'(p'^2 + q'^2), \\ \dot{p}' &= \delta q' - \frac{3b^2}{2m^2\omega^2}q'(p'^2 + q'^2) - \frac{\kappa}{2\sqrt{m\omega}}.\end{aligned}$$

Damit verschwinde die Zeitabhängigkeit, was eigentlich der Vorteil der Transformation ist.

HÜ 21 (3,5 P): Hamilton-Jacobi-Gleichung

Die Sonne ist nicht perfekt kugelförmig. Ihr Gravitationspotential wird in guter Näherung beschrieben durch die Addition eines Korrekturterms zum Kepler-Potential:

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{GM}{r} + K \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2r^2},$$

wobei K eine Konstante ist.

- (a) (1P) Bestimme die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die Bewegung eines Massenpunktes in diesem Potential.
- (b) (1,5 P) Zeige, dass die in (a) erhaltene partielle Differentialgleichung durch Separation der Variablen in getrennten gewöhnlichen Differentialgleichungen zerlegt werden kann.
- (c) (1P) Finde $p_r(r|\vec{\alpha})$ und $p_\theta(\theta|\vec{\alpha})$, wobei α Konstanten sind, und p_r und p_θ die kanonisch konjugierte Impulsen von r und θ sind.

HÜ 22 (7 P): Gekoppelte Oszillatoren in der Hamilton-Jacobi Theorie

Die Hamiltonfunktion eines Systems aus zwei gekoppelten harmonischen Oszillatoren ist gegeben durch

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}m\omega_2^2(q_1 - q_2)^2,$$

wobei $p_i = m\dot{q}_i$. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen periodische Bahnen im Phasenraum auftreten.

- (a) (1P) Schreibe die Hamiltonfunktion auf die neuen Koordinaten $z_{1,2} = (q_1 \pm q_2)/\sqrt{2}$ um und formuliere die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die Hamiltonsche charakteristische Funktion $W(z_1, z_2, \alpha_1, \alpha_2)$.
- (b) (1P) Nutze die Separation der Variablen, und schreibe die getrennte gewöhnliche Differentialgleichungen.
- (c) (1P) Bestimme die Integralgleichungen für die Wirkungsvariablen $J_i = \oint \frac{\partial W_i}{\partial z_i} dz_i$
- (d) (2,5 P) Berechne die J_i und zeige, dass für die neue Hamilton-Funktion gilt:

$$H'(\vec{J}) = \omega_1 J_1 + \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2} J_2.$$

(Hinweis: Für die Berechnung der Wirkungen J_i muss Du, wie in der Vorlesung, die Umkehrpunkte bestimmen).

- (e) (1,5 P) Das System ist periodisch, wenn es eine Periode T gibt, solch, dass $z_1(t+T) = z_1(t)$ und $z_2(t+T) = z_2(t)$. Zeige, dass das System periodisch ist, wenn

$$\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}} = \frac{n}{m}; \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

HÜ 23 (7,5 P): Relativistische Neujahrsgrüße

Ein Raumschiff startet am Neujahrstag des Jahres 2021 und fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 0,8c$ zu dem erdnächsten Stern Alpha Centauri, der etwa 4 Lichtjahre von uns entfernt ist. Nach einem Aufenthalt von 2 Jahren kehrt das Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v = 0,6c$ zur Erde zurück.

- (a) (1,5P) Wie lange dauert die Reise aus der Perspektive der Erdstation? Wie lange aus der Perspektive des Raumschiffs?
- (b) (4P) Jeweils zur Jahreswende sollen von der Erde und vom Raumschiff Neujahrsgrüße per Funk ausgesendet werden. Wie viele Signalen der Erdstation erreichen das Schiff? Aus der Perspektive des Schiffs, wann kommen diese Signalen an? Wie viele Signalen des Schiffes erreichen die Erdstation? Aus der Perspektive der Erdstation, wann kommen diese Signalen an? (Lösungshinweis: 13 Botschaften erreichen das Schiff, und 10 Signalen erreichen die Erde.)
- (c) (2P) Zeichne in einem Minkowski-Diagramm den Verlauf der Weltraumreise. Trage auch die Funksignale in das Diagramm ein.

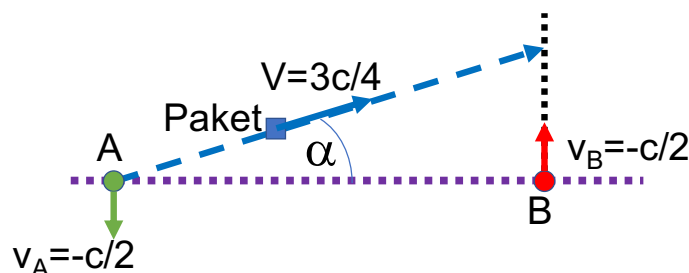
HÜ 24 (3 P): Krieg der Sterne

Ein Raumschiff fliegt mit der Geschwindigkeit $0,2c$ durch die Milchstraße, als es von einer gegnerischen Rakete überholt wird, die mit der Geschwindigkeit $0,8c$ die Galaxie durchquert. Sofort löst der Kommandant des Raumschiffs ein $0,7c$ -Geschoß aus. Erreicht der Geschoß die Rakete?

- (a) (1,5 P) Betrachte das Problem zuerst im Bezugssystem der Galaxie.
- (b) (1,5 P) Betrachte nun das Problem aus der Perspektive des Schiffs.

HÜ 25 (3,5 P): Relativistische Paketensendung

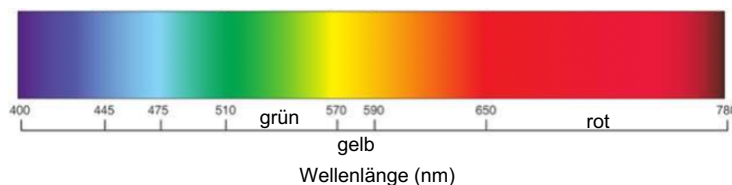
Zwei Raumschiffe, A und B , bewegen sich aus der Perspektive von einem Beobachter S (Abbildung) mit Geschwindigkeiten $v_A = -\frac{c}{2}\vec{e}_z$ und $v_B = \frac{c}{2}\vec{e}_z$ und einem Abstand d entlang x . In dem Moment, aus der Perspektive von S , in dem die beide dieselbe z Koordinate haben, schießt der Schiff A einen Paket für Schiff B mit Geschwindigkeit $V = \frac{3}{4}c$ (aus der S Perspektive).



- (a) (1,5 P) Gucken wir das Problem zuerst aus der Perspektive von S . Mit welchem Winkel α mit der x -Richtung muss der Paket aus dieser Perspektive abgeschickt werden, solch dass der Paket B erreicht?
- (b) (1 P) Mit welchem Winkel muss A (also aus der A Perspektive) den Paket schießen?
- (b) (1 P) Mit welchem Winkel wird von B (also aus der B Perspektive) abgeholt?

HÜ 26 (4,5 P): Relativistischer Fahrer

Ein Fahrer fährt mit seinem relativistisch schnellen Auto auf eine Ampel zu. Die Ampel erscheint ihm grün ($\lambda_1 = 510$ nm). Gleich nachdem er an der Ampel vorbeigefahren ist, erscheint ihm die Ampel im Rückspiegel rot ($\lambda_2 = 650$ nm).

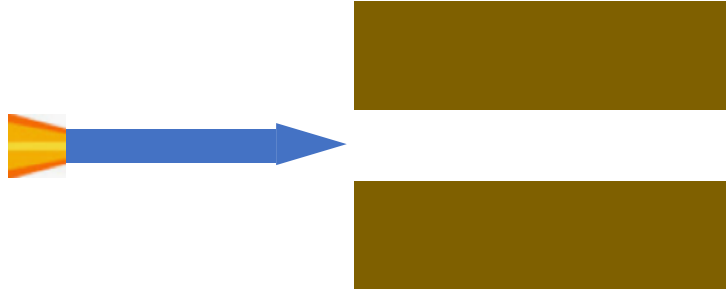


- (a) (1,5 P) Mit welcher Geschwindigkeit v fährt das Auto (im Ruhesystem der Ampel)?
- (b) (1,5 P) Welche Farbe zeigte die Ampel für den neben der Ampel stehenden Polizisten an, kann er Sie aufgrund eines Rotlichtverstoßes belangen? (Nutze den Spektrum in der Abbildung)
- (c) (1,5 P) Der Fahrer will ein Radio Sender mit einer Empfangsfrequenz (im Bezugssystem des Sendemasts, also für $v = 0$) 106,7 MHz. Auf welche Frequenz muss

er sein Radio in seinem relativistischen Auto einstellen, um den Sender zu empfangen, wenn er sich vom Sendemast wegbewegt? Welche Frequenz muss er einstellen, wenn er sich direkt auf den Sendemast zubewegt?

HÜ 27 (3 P): Raumschiff und Kluft

Ein Raumschiff von 4 Km (im Ruhesystem des Raumschiffes) fliegt mit Geschwindigkeit $v = 0.6c$ Richtung einer Kluft. Die Kluft hat eine Länge von 4,5 Km (im Ruhesystem der Kluft). Welche der folgenden Aussagen ist aus der Perspektive des Raumschiffes richtig, und warum?



- (i) Der Raumschiff ist 5 Km lang. Der Front des Schiffes verlässt die Kluft, bevor das Ende des Schiffes rein in die Kluft hineinfliegt.
- (ii) Die Kluft ist 3,6 Km lang. Der Front des Schiffes verlässt die Kluft, bevor das Ende des Schiffes rein in die Kluft hineinfliegt.
- (iii) Der Raumschiff ist 3,2 Km lang. Der Raumschiff pass innerhalb der Kluft.
- (iv) Die Kluft ist 5,625 Km lang. Der Raumschiff pass innerhalb der Kluft.